МАТЕМАТИКА

*Александр Николаевич ДЕГТЕВ —
заведующий кафедрой алгебры
и математической логики
математического факультета, доктор
физико-математических наук, профессор,
Анастасия Валерьевна ДОЛГИХ —
студентка 5 курса*

УДК 517.11

ОБ ОПЕРАЦИЯХ НАД РЕКУРСИВНО-ПЕРЕЧИСЛИМЫМИ МНОЖЕСТВАМИ, 2

АННОТАЦИЯ. В точности установлено, к какому классу будет принадлежать $X \times Y$ и $X \cup Y$, если X и Y взяты из классов рекурсивных, креативных, простых, псевдопростых или псевдокреативных множеств.

In this article we precisely establish what a set $X \times Y$ and $X \cup Y$ will be when X and Y are from the classes of recursive, creative, simple, pseudosimple or pseudocreative sets.

В работах [1, 2] семейство всех рекурсивно-перечислимых множеств (РПМ) было разбито на пять классов: R — рекурсивных, C — креативных, S — простых, PS — псевдопростых и PC — псевдокреативных множеств. Определения этих классов можно найти в [3, 4].

В заметке [3] было полностью выяснено, к какому классу будет принадлежать $X \oplus Y$ и $X \cap Y$ для X и Y, взятых из пяти указанных выше классов. В данной заметке решается аналогичная проблема для $X \times Y$ и $X \cup Y$. Пусть $N = \{0,1,2,\dots\}$, $\overline{X} = N - X$ для $X \subseteq N$ и если $X, Y \subseteq N$, то

$$X \oplus Y = \{2x : x \in X\} \cup \{2y+1 : y \in Y\},$$
$$X \times Y = \{\langle x, y\rangle : x \in X,\ y \in Y\},$$

где $\langle x, y\rangle$ гёделевский номер пары чисел (x, y), $x, y \in N$.

Лемма 1.1. [А. Лахлан, см. 4] $X \times Y \in \mathbf{C} \Leftrightarrow X \in \mathbf{C}$ или $Y \in \mathbf{C}$.

Заметим также, что $X \times Y \in \mathbf{R} \Leftrightarrow X, Y \in \mathbf{R}$.

Лемма 1.2. Если X и Y бесконечные множества, то
$X \times Y \notin \mathbf{S} \cup \mathbf{PS}$.

Доказательство.

Ясно, что $X \times Y \notin S$ для любых $X, Y \subseteq N$. Пусть X — нерекурсивно и $Z \subseteq \overline{X \times Y}$. Тогда РПМ Z состоит из некоторых элементов $\langle x, y\rangle$, где $x \notin X$ или $y \notin Y$. Если $n = \langle x, y\rangle$, то пусть l и r такие общерекурсивные функции (ОРФ), что $l(n) = x$ и $r(n) = y$ [4]. Тогда

$$D = \{l(z): z \in Z, r(n) \in Y\}$$

будет рекурсивно-перечислимым подмножеством $\overline{X}$. Так как $\overline{X \cup D} \neq N$ (иначе X оказалось бы рекурсивным множеством), то пусть $d \in \overline{X \cup D}$. Тогда $\{<d, y>: y \in Y\}$ будет бесконечным подмножеством $\overline{D \cup (X \times Y)}$, как только Y — бесконечное множество. Следовательно, $X \times Y \notin \mathbf{PS}$.

Лемма 1.3. Если $X \in \mathbf{R}$, то

(а) $Y \in \mathbf{R} \Rightarrow X \times Y \in \mathbf{R}$;
(б) $Y \in \mathbf{S} \Rightarrow X \times Y \in \mathbf{PS} \cup \mathbf{PC}$;
(в) $Y \in \mathbf{PS} \Rightarrow X \times Y \in \mathbf{PS} \cup \mathbf{PC}$;
(г) $Y \in \mathbf{PC} \Rightarrow X \times Y \in \mathbf{PC}$.

Доказательство.

Пункт (а) очевиден.

(б) Если X бесконечно, то $X \times Y \notin \mathbf{C} \cup \mathbf{PS} \cup \mathbf{S}$ по леммам 1.1 и 1.2. Но $X \times Y$ — нерекурсивное множество и поэтому $X \times Y \notin \mathbf{PC}$. Аналогично доказываются утверждения пунктов (в) и (г) в случае бесконечности X.

Пусть $X = \{0\}$. Тогда $X \times Y \in \mathbf{PS}$, т. к. $Z \cap \overline{(X \times Y)} = \varnothing$ и $Z \cap (X \times Y) \in \mathbf{S}$, где РПМ $Z = \{< x,y >: x \neq 0, y \in N\}$.

(в) Если $Y \in \mathbf{PS}$, то существует РПМ Y' такое, что $Y \cup Y' = \varnothing$ и $Y \cup Y' \in \mathbf{S}$. Если $X = \{0\}$, то опять $X \times Y \in \mathbf{PS}$, т. к. $Z \cap \overline{(X \times Y)} = \varnothing$ и $Z \cap (X \times Y) \in \mathbf{S}$, где РПМ

$$Z = \{<x,y>: x \neq 0, y \in N\} \cup \{<0,y>: y \in Y'\}.$$

(г) Выше замечено, что $X \times Y \notin \mathbf{R} \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{S}$ и $X \times Y \notin \mathbf{PS}$, если X — бесконечное множество (Y автоматически бесконечно, так как $Y \in \mathbf{PC}$).

Пусть X — конечное, скажем $X = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $n \geq 0$, и РПМ $Z \subseteq \overline{X \times Y}$. Если

$$Z' = \{r(z): l(z) = x_0, z \in Z\},$$

то $Z' \subseteq \overline{Y}$ и $Z' \cup Y$ не иммунно, т. к. $Y \in \mathbf{PC}$. Следовательно, и $X \times Y \notin \mathbf{PS}$.

Лемма 1.4. Если $X \in \mathbf{S} \cup \mathbf{PS} \cup \mathbf{PC}$, то $Y \in \mathbf{S} \cup \mathbf{PS} \cup \mathbf{PC} \Rightarrow X \times Y \in \mathbf{PC}$. □

Доказательство.

Следует из лемм 1.1, 1.2 и нерекурсивности $X \times Y$. □

Итак, все возможные 15 случаев, каким должно быть $X \times Y$, рассмотрены.

Начнем с очевидного факта: если $X \in \mathbf{S}$, то $X \cup Y \in \mathbf{S}$ или $X \cup Y \in \mathbf{R}$, точнее $\overline{X \cup Y}$ — конечно.

Лемма 2.1. Если $X \in \mathbf{C}$, а Y принадлежит одному из классов **R**, **C**, **PS** или **PC**, то $X \cup Y$ может принадлежать любому из этих четырех классов.

Доказательство.

Если $K \in \mathbf{C}$, то $X \in \mathbf{C}$, где $X = (K \oplus N) \oplus Z$ для любого РПМ Z, а $Y = (N \oplus Z') \oplus \varnothing$, как и $(N \oplus N) \oplus Z'$, принадлежит тому же классу из четырех, указанных в лемме, что и Z'. Но

$$X \cup Y = (N \oplus N) \oplus Z.$$

Теперь утверждение леммы становится очевидным, если Z и Z' в определении X и Y независимо друг от друга пробегают представители из классов **R**, **C**, **PS** и **PC**. □

Следующие две леммы завершают решение сформулированной выше проблемы для $X \cup Y$.

Лемма 2.2. Если $X \in \mathbf{PS}$, то

(а) $Y \in \mathbf{PS} \Rightarrow X \cup Y \in \mathbf{R} \cup \mathbf{PS} \cup \mathbf{S}$;

(б) $Y \in \mathbf{PC} \Rightarrow X \cup Y \in \mathbf{R} \cup \mathbf{PS} \cup \mathbf{S} \cup \mathbf{PC}$.

Доказательство.

(а) Если $Z \in \mathbf{PS}$, то

$X = N \oplus Z,\ Y = Z \oplus N \Rightarrow X, Y \in \mathbf{PS} \wedge X \cup Y = N \oplus N \in \mathbf{R}$;

$X = Y = Z \Rightarrow X, Y \in \mathbf{PS} \wedge X \cup Y = Z \in \mathbf{PS}$.

Разобьем простое множество S на два нерекурсивных РПМ X и Y [4]. Тогда $X, Y \in \mathbf{PS}$ и $X \cup Y \in \mathbf{S}$.

Осталось показать, что объединение двух псевдопростых множеств A_1 и B_1 не может быть креативным или псевдокреативным множеством. Но для A_1 и B_1 найдутся РПМ A_2 и B_2 такие, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ и $A_1 \cup A_2,\ B_1 \cup B_2 \in \mathbf{S}$. Пусть $C_1 = A_1 \cup B_1$ и $C_2 = A_2 \cap B_2$. Ясно, что $C_2 \subseteq \overline{C_1}$. Покажем, что $\overline{C_1 \cup C_2}$ конечно (и тогда $C_1 \in R$) или $C_1 \cup C_2 \in \mathbf{S}$. Пусть РПМ $D \subseteq \overline{C_1 \cup C_2}$. Так как $D_1 = D \cap A_2$ и $D_2 = D \cap B_2$ являются рекурсивно-перечислимыми подмножествами дополнений простых множеств $B_1 \cup B_2$ и $A_1 \cup A_2$ соответственно, то D_1 и D_2 — конечные множества. Поэтому $C \backslash (D_1\ D_2)$ — рекурсивно-перечислимое подмножество как $\overline{A_1 \cup A_2}$, так и $\overline{B_1 \cup B_2}$, т. е. опять конечно. Значит, и все D — конечное множество.

(б) Пусть $A \in \mathbf{PS}$ и $B \in \mathbf{PC}$ и $C \in \mathbf{S}$. Тогда

$X = A \oplus N,\ Y = B \oplus N \Rightarrow X \in \mathbf{PS} \wedge Y \in \mathbf{PC} \wedge X \cup Y = N \oplus N \in \mathbf{R}$;

$X = A \oplus N,\ Y = \varnothing \oplus B \Rightarrow X \in \mathbf{PS} \wedge Y \in \mathbf{PC} \wedge X \cup Y = A \oplus N \in \mathbf{PS}$;

$X = A \oplus \varnothing,\ Y = N \oplus B \Rightarrow X \in \mathbf{PS} \wedge Y \in \mathbf{PC} \wedge X \cup Y = N \oplus B \in \mathbf{PC}$;

$X = (N \oplus \varnothing) \oplus C,\ Y = (B \oplus N) \oplus \varnothing \Rightarrow$

$X \in \mathbf{PS} \wedge Y \in PC \wedge X \cup Y = (N \oplus N) \oplus C \in \mathbf{S}$.

Осталось показать, что $A \cup B \notin \mathbf{C}$. Так как $A \in \mathbf{PS}$, то найдется РПМ D такое, что $A \cap D = \varnothing$ и $A \cup D = \mathbf{S}$. Предположим, что $A \cup D \in \mathbf{C}$. Тогда существует общерекурсивная функция (ОРФ) f такая, что

$$(\forall n)(W_n \subseteq \overline{A \cup B} \Rightarrow f(n) \in (\overline{A \cup B}) \cap \overline{W_n}),$$

где W_n — РПМ с постовским номером n. Придем к противоречию, если покажем, что $B \in \mathbf{C}$.

Пусть $W_n \subseteq \overline{B}$ и $W_m = W_n \cap C$. Заметим, что $m = m(n)$ находится по n эффективно. Если ОРФ g такова, что $W_{g(x)} = W_x \cup \{f(x)\}$ [4], то

$f(m) \in \overline{A \cup B} \cap \overline{W_m} \wedge W_{g(m)} \subseteq \overline{A \cup B}$,

$fg(m) \in \overline{A \cup B} \cap \overline{W_{g(m)}} \wedge W_{gg(m)} \subseteq \overline{A \cup B}$,

. . . .

Итак, $f(m), fg(m), fgg(m), \ldots$ есть рекурсивное перечисление некоторого бесконечного РПМ, содержащегося в $\overline{A \cup B} \cap W_m$ и тем более в $\overline{B} \cap \overline{W_m}$. Но $A \cup D \in \mathbf{S}$ и поэтому, перечисляя C эффективно, можно найти элемент $p_n = fg \ldots g(m)$, принадлежащий C. Тогда $p_n \in \overline{W_n}$ и $h(n) = p_n$ будет ОРФ, обладающей следующим свойством:

$$(\forall n)(W_n \subseteq \overline{B} \Rightarrow h(n) \in \overline{B} \cap \overline{W_n}).$$

Значит, B ∈ **C**, что противоречит выбору множества B. □

Лемма 2.3. Если X,Y ∈ **PC**, то X ∪ Y ∈ **R** ∪ **C** ∪ **S** ∪ **PS** ∪ **PC**.

Доказательство.

Пусть A∈**PC** и B∈**S**. Тогда

X = A⊕N, Y = N⊕A ⇒ X∈**PC** ∧ Y∈**PC** ∧ X ∪ Y = N⊕N∈**R**;

X = (A⊕N)⊕B, Y = (N⊕A)⊕B ⇒
X∈**PC** ∧ Y∈**PC** ∧ X ∪ Y = (N⊕N)⊕B∈**S**;

X = ((A⊕N)⊕∅)⊕B, Y = ((N⊕A)⊕∅)⊕B ⇒
X∈**PC** ∧ Y∈**PC** ∧ X ∪ Y = ((N⊕N)⊕∅)⊕B∈**PS**;

X = Y = A ⇒ X∈**PC** ∧ Y∈**PC** ∧ X ∪ Y = A∈**PC**.

Осталось показать, что объединение двух псевдокреативных множеств может быть некоторым креактивным множеством K. Разобьем K по Фридбергу-Ейтсу на два T-несравнимых РПМ X и Y. Тогда X ∪ Y=K, но X,Y∉C, т. к. креативные множества среди РПМ имеют наибольшую T-степень. По лемме 2.2. X, Y ∈ **PC**. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Post E. L. Recursively enumerable cets and their decision problems // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. V. 50. P. 284-316.
2. Успенский В. А. Несколько значений о перечислимых множествах // Z. Math. Logik und Grundl/ Math/ 1957. V. 3. P. 157-170.
3. Дегтев А. Н., Кладова Е. В. Об операциях над рекурсивно-перечислимыми множествами // Вестник ТГУ. 1998. № 2. С. 3—7.
4. Дегтев А. Н. Перечислимые множества и сводимости // Тюмень: Изд-во ТГУ, 1988. 94 с.

Владимир Николаевич КУТРУНОВ — заведующий кафедрой математического моделирования математического факультета, доктор физико-математических наук, профессор,
Михаил Владимирович ДМИТРИЕВСКИЙ — студент 5 курса

УДК 512.64+519.6

Метод операторного полинома наилучшего равномерного приближения решения матричных уравнений

АННОТАЦИЯ. В 1959 году С. Я. Альпером разработан полином наилучшего равномерного приближения функции $1/(a-z)$ на комплексной плоскости в круге $1 \geq |z|$, $|a|>1$. На этой основе в статье предложен метод решения операторных уравнений, спектры операторов которых расположены на комплексной плоскости в круге произвольного радиуса с центром в произвольной точке z_0.