*Василий Александрович БАРИНОВ — доцент кафедры прикладной математики и математической физики математического факультета, кандидат физико-математических наук*

УДК 532.5+517.95

# ПЛОСКОЕ УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

*АННОТАЦИЯ. Получено аналитическое решение полной нелинейной системы уравнений плоского установившегося движения идеальной жидкости. Найдено решение для чисто вихревого движения, которое является точным решением исходной системы кинематических уравнений. Показано, что из полученных выражений следуют известные результаты.*

*Analytical solution of full non-linear equation system of flat steady movement of ideal liquid is established. The solution for purely turbulent movement is also obtained. The results of the data obtained are represented.*

В гидродинамике плоскопараллельного движения жидкости хорошо развита теория потенциальных течений (когда скорость жидкости представима как градиент скалярного потенциала), т. к. в этом случае можно ввести комплексный потенциал и использовать методы ТФКП [1]. Вихревые движения исследуют, как правило, отдельно от потенциальных. Общее же течение определяют как сумму потенциального и вихревого, что в общем, необоснованно, в силу нелинейности исходных уравнений. Целью данной работы является определение точного аналитического решения полной нелинейной системы кинематических уравнений плоского установившегося движения идеальной жидкости.

**1. Постановка задачи.** Установившееся движение идеальной, несжимаемой жидкости, происходящее под действием потенциальных сил, описывается уравнениями неразрывности и Гельмгольца [2]:

$$\operatorname{div} \mathbf{V}=0; \ \operatorname{rot} (\mathbf{V}\times\operatorname{rot} \mathbf{V}) = (\operatorname{rot} \mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} - (\mathbf{V}\nabla)\operatorname{rot} \mathbf{V}=0, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{V}$ — вектор скорости, $\nabla$ — оператор «набла». Если потенциал внешних сил задан, то давление жидкости определяется по найденному полю скоростей.

Рассмотрим плоскопараллельное движение жидкости в декартовой системе координат XY. Тогда $\mathbf{V} = (u(x,y);\ v(x,y);\ 0)$, а векторные уравнения (1.1) можно записать в координатной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1.2}$$

$$u\frac{\partial \Omega}{\partial x} + v\frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \quad \Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1.3}$$

Здесь $\Omega$ — вихрь поля скоростей. Из системы (1.2), (1.3) подстановкой первого уравнения во второе можно получить разрешающее уравнение:

$$u\Delta v - v\Delta u = 0, \tag{1.4}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа. Левая часть этого уравнения является подынтегральным выражением второй формулы Грина [3]. Уравнение (1. 4) можно представить в виде системы двух уравнений для функций $u$ и $v$:

$$\Delta u - f(x,y)u = 0, \quad \Delta v - f(x,y)v = 0. \tag{1.5}$$

Здесь $f(x,y)$ — новая неизвестная функция, при $f(x,y) = const$ уравнения (1.5) переходят в уравнения Гельмгольца, при $f(x,y) = 0$ в уравнения Лапласа.

Таким образом, для плоскопараллельного движения жидкости получили две замкнутые системы кинематических уравнений: первая — уравнения (1.2), (1.4); вторая — уравнения (1.2), (1.5). Целью данной работы является определение решений системы уравнений (1.2), (1.4) без предположений только потенциального ($\mathbf{V} = \nabla\varphi$) или только вихревого ($\mathbf{V} = \ = \mathrm{rot}\ \mathbf{A}$) движения.

**2. Условие потенциальности движения.** При решении плоских задач гидродинамики часто предполагают движение жидкости потенциальным, т. е. $\mathbf{V} = \nabla\varphi \Leftrightarrow \Omega = 0$. Предположение потенциальности обусловливает гармоничность каждой из компонент скорости, т. е. $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$ [1]. Покажем, что гармоничность одной из компонент скорости $u$ или $v$ является не только необходимым, но и достаточным условием потенциальности поля скоростей.

Необходимость доказывается стандартно, например [2]: если $\Omega = 0$, то второе равенство (1.3) обращается во второе условие Коши-Римана для функций $u$ и $v$, откуда следует их гармоничность. При доказательстве достаточности нельзя использовать комплексную скорость $u + iv$, так как для введения комплексной скорости необходима потенциальность движения. Пусть $\Delta u = 0$, тогда из (1.4) следует $\Delta v = 0$, т. е. обе компоненты — гармонические функции. Подставляя поочередно в каждое уравнение Лапласа уравнение (1.2), получаем $\partial\Omega/\partial x = \partial\Omega/\partial y = 0.$ Откуда $\Omega = \Omega_0 = const$ (в частности, $\Omega_0 = 0$), т. е. движение происходит с постоянным вихрем, что соответствует дополнительному линейному течению. Такое движение будет потенциальным. Действительно, если ввести новые компоненты $u_1 = a_1 y + b_1 + u;\ v_1 = a_2 x + b_2 + v$ (где $a_i = const$, $b_i = const$ и $a_1 - a_2 = \Omega_0$), то для них (1.3) будет вторым условием Коши-Римана, а (1.2) — первым.

Отметим, что поле скоростей всегда будет потенциальным для линейной исходной задачи. При линеаризации в уравнениях Эйлера член $\mathbf{V}\times\mathrm{rot}\ \mathbf{V}$ оказывается более высокого порядка малости, поэтому полагают $\mathbf{V}\times\mathrm{rot}\ \mathbf{V} = \mathbf{0}$, а так как $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$, то $\mathrm{rot}\ \mathbf{V} = \mathbf{0}$. Но этот вывод не распространяется на случай движения в поле не потенциальных внешних сил, например, движение электропроводной жидкости во внешнем магнитном поле. В магнитной гидродинамике условия потенциальности движения жидкости обсуждались в работе [4].

**3. Решение задачи.** Будем искать нетривиальное решение системы уравнений (1.2), (1.4) в виде:

$$u(x,y) = X_1(x)Y_1(y); \quad v(x,y) = X_2(x)Y_2(y). \tag{3.1}$$

Тогда из уравнений (1.2), (1.4) соответственно получаем:

$$\frac{X_1'}{X_2}+\frac{Y_2'}{Y_1}=0,$$

$$\frac{X_2''}{X_2}+\frac{Y_2''}{Y_2}-\frac{X_1''}{X_1}-\frac{Y_1''}{Y_1}=0.$$

Здесь и далее штрихами обозначены полные производные по соответствующим переменным. Вводя постоянные разделения $a$ и $b$, получаем системы обыкновенных уравнений соответственно для $x$-ых и $y$-ых составляющих:

$$\begin{cases} X_1' = -aX_2, \\ \dfrac{X_2''}{X_2}-\dfrac{X_1''}{X_1}=b. \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} Y_2' = aY_1, \\ \dfrac{Y_1''}{Y_1}-\dfrac{Y_2''}{Y_2}=b. \end{cases} \tag{3.3}$$

Методом исключения эти системы сводятся к двум нелинейным уравнениям третьего порядка:

$$\frac{X_1'''}{X_1'}-\frac{X_1''}{X_1}=b; \quad \frac{Y_2'''}{Y_2'}-\frac{Y_2''}{Y_2}=b. \tag{3.4}$$

Отсюда следует, что $x$-ая составляющая функции $u$ и $y$-ая функции $v$ удовлетворяют одному и тому же уравнению. Поэтому достаточно найти решение первого уравнения. Если выделить в левой части первого уравнения (3.4) производную частного $X_1''/X_1$, то получим уравнение, допускающее понижение порядка $(X_1''/X_1 - b\ln X_1)'=0$. Откуда

$$\frac{X_1''}{X_1}=C_1+b\ln X_1, \tag{3.5}$$

где $C_1$ — постоянная интегрирования. Уравнение (3.5) не содержит явно переменную, поэтому, принимая $X_1'$ за новую искомую функцию, его можно свести к уравнению первого порядка:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dX_1}(X_1')^2 = X_1(C_1+b\ln X_1),$$

которое легко интегрируется

$$(X_1')^2 = X_1^2\left(C_1+b(\ln X_1-\frac{1}{2})\right)+C_2\,. \tag{3.6}$$

Здесь $C_2$ — постоянная интегрирования. Интеграл уравнения (3.6) можно записать в виде:

$$x+C_3=\mp\int\frac{dX_1}{\left[C_2+\left(C_1-b\left(\frac{1}{2}-\ln X_1\right)\right)X_1^2\right]^{1/2}}. \tag{3.7}$$

Из первого уравнения системы (3.2) и выражения (3.6) находим $X_2$:

$$X_2 = \pm\frac{1}{a}\left[C_2 + \left(C_1 - b\left(\frac{1}{2} - \ln X_1\right)\right)X_1^2\right]^{1/2}. \qquad (3.8)$$

Как было показано выше, $Y_2$ удовлетворяет такому же уравнению, что и $X_1$. Поэтому, с учетом первого уравнения системы (3.3), для $Y_1$ и $Y_2$ получаем выражения:

$$y + D_3 = \mp\int\frac{dY_2}{\left[D_2 + \left(D_1 - b\left(\frac{1}{2} - \ln Y_2\right)\right)Y_2^2\right]^{1/2}}, \qquad (3.9)$$

$$Y_1 = \mp\frac{1}{a}\left[D_2 + \left(D_1 - b\left(\frac{1}{2} - \ln Y_2\right)\right)Y_2^2\right]^{1/2}. \qquad (3.10)$$

Здесь $D_1$, $D_2$, $D_3$ — новые постоянные интегрирования, $(C_3, D_3)$ — начальные координаты жидкой частицы. Используя формулы (3.8), (3.10), можно выписать выражение для квадрата величины скорости, т. к. $V^2 = u^2 + v^2 = X_1^2Y_1^2 + X_2^2Y_2^2$, то

$$V^2 = \frac{1}{a^2}\left[\left(D_2X_1^2 + C_2Y_2^2\right) + \left(C_1 + D_1\right)X_1^2Y_2^2 - b\left(1 - \ln\left(X_1^2Y_2^2\right)\right)X_1^2Y_2^2\right]. \qquad (3.11)$$

Из вида полученных выражений (3.7) – (3.11) можно указать размерности входящих в них постоянных:

$$[b] = [C_1] = [D_1] = \frac{1}{L^2}; \quad [C_2] = [D_2] = \frac{1}{LT}; \quad \left[\frac{1}{a}\right] = [C_3] = [D_3] = L, \qquad (3.12)$$

где $L$ — длина, $T$ — время. Кроме того, $C_2$ и $D_2$ должны удовлетворять неравенствам $C_2 \geq 0$, $D_2 \geq 0$.

Конкретный вид констант, входящих в полученные выражения, определяется из граничных и дополнительных условий конкретных краевых задач. Однако анализ найденного решения в частных случаях позволяет получить некоторые общие свойства этих неизвестных постоянных и уменьшить их число. Полученное решение справедливо для общих движений жидкости, которые содержат в себе и потенциальные и вихревые движения, поэтому целесообразно проанализировать эти случаи отдельно.

**4. Потенциальное и вихревое движение. Анализ полученного решения.** Если движение потенциальное, то уравнение (1.4) вырождается в два уравнения Лапласа для функций $u$ и $v$. При решении этих уравнений методом разделения переменных получаются уравнения типа (3.5), если в них положить $b=0$, причем $D_1 = -C_1$. Решениями этих уравнений будут либо тригонометрические функции (если за собственное число взять $-\sqrt{|C_1|}$), либо гиперболические функции (если собственным числом будет $+\sqrt{|C_1|}$). Такие собственные функции можно получить непосредственно из формул (3.7) – (3.10). Полагая в них $b=0$, $C_3 = D_3 = 0$ (для простоты выражений) $D_1 = -C_1 > 0$ (движение периодическое по переменной x), получаем

$$x = \mp\frac{1}{\sqrt{|C_1|}}\int\frac{dX_1}{\sqrt{C^2 - X_1^2}}, \quad y = \mp\frac{1}{\sqrt{|C_1|}}\int\frac{dY_2}{\sqrt{D^2 - Y_1^2}},$$

$$X_2 = \pm\frac{\sqrt{|C_1|}}{a}\sqrt{C^2 - X_1^2}, \quad Y_1 = \mp\frac{\sqrt{|C_1|}}{a}\sqrt{D^2 + Y_2^2},$$

где $C^2 = C_2/|C_1|$, $D^2 = D_2/|C_1|$. Отсюда, для верхнего знака перед интегралами, находим

$$u = \frac{\sqrt{C^2 D^2}}{a\sqrt{|C_1|}}cos\left(\sqrt{|C_1|}x\right)ch\left(\sqrt{|C_1|}y\right), \quad v = \frac{\sqrt{C^2 D^2}}{a\sqrt{|C_1|}}sin\left(\sqrt{|C_1|}x\right)ch\left(\sqrt{|C_1|}y\right),$$

$$\varphi = \frac{\sqrt{C^2 D^2}}{a|C_1|}sin\left(\sqrt{|C_1|}x\right)ch\left(\sqrt{|C_1|}y\right). \qquad (4.1)$$

Последнее выражение, если $\sqrt{|C_1|} = kn$ (k — волновое число, $n \in Z$), совпадает с потенциалом волнового движения жидкости при распространении по свободной поверхности прогрессивных волн [2]. Для нижнего знака перед интегралами получается решение $\varphi = -(\sqrt{C^2 D^2}/a|C_1|)cos\left(\sqrt{|C_1|}x\right)ch\left(\sqrt{|C_1|}y\right)$ Из этого частного случая следует, что члены с множителем $b$ в выражениях (3.7) — (3.11) обусловлены вихревым движением жидкости, а постоянные $C_1$, $D_1$, $C_2$, $D_2$ характеризуют потенциальное движение, причем $D_1 = -C_1$.

Для того, чтобы получить выражения для вихревого движения жидкости, положим в (3.7) — (3.10) $C_1 = D_1 = 0$, $C_2 = D_2 = 0$, а также $C_3 = D_3 = 0$. Тогда для $b<0$ эти формулы примут вид:

$$x = \mp\frac{1}{\sqrt{|b|}}\int\frac{dX_1}{X_1\sqrt{\frac{1}{2} - lnX_1}}, \quad y = \mp\frac{1}{\sqrt{|b|}}\int\frac{dY_2}{Y_1\sqrt{\frac{1}{2} - lnY_1}},$$

$$X_2 = \pm\frac{\sqrt{|b|}}{a}X_1\sqrt{\frac{1}{2} - lnX_1}, \quad Y_1 = \mp\frac{\sqrt{|b|}}{a}Y_2\sqrt{\frac{1}{2} - lnY_2},$$

Откуда

$$u = \mp\frac{|b|}{2a}y\,exp\left(1 - \frac{|b|}{4}\left(x^2 + y^2\right)\right); \; v = \pm\frac{|b|}{2a}x\,exp\left(1 - \frac{|b|}{4}\left(x^2 + y^2\right)\right). \qquad (4.2)$$

Функции (4.2) полностью удовлетворяют нелинейной системе (1.2), (1.4). Запишем эти выражения в полярной системе координат $(r, \varphi)$:

$$u = \mp\frac{2r\sin\varphi}{ar_0^2}exp\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right); \; v = \pm\frac{2r\cos\varphi}{ar_0^2}exp\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) \qquad (4.2a)$$

$$|V| = \frac{2r}{ar_0^2}exp\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right),$$

где $r_0^{-2} = \frac{|b|}{4}$. Функции (4.2а) описывают возрастающее (при $r<r_0$)и затухающее (при $r>r_0$) в радиальном направлении вихревое движение. При $r=r_0$ вихрь становится постоянным, и общее движение в этом случае можно считать потенциальным. Потенциальные движения с постоянным вихрем составляют суть трохоидальных волн Герстнера [2]. Решение (4.2), (4.2а), в силу затухания (при $r>r_0$), будет устойчивым. Если же в общих интегралах (3.7) — (3.10) положить $b>0$, то вихревое решение примет вид:

$$|V|=\frac{2r}{ar_0^2}exp\left(1+\frac{r^2}{r_0^2}\right).$$

Оно непрерывно возрастает в радиальном направлении, а следовательно, будет неустойчивым. Поэтому для того, чтобы общее решение было устойчивым, в формулах (3.7)—(3.10) следует положить $b<0$. Безразмерность выражений (4.2), (4.2а) в конкретных задачах можно преодолеть обезразмериванием скорости в исходной системе (1.2), (1.4), тогда в (4.2), (4.2а) характерная скорость появится множителем. Отметим также, что сумма потенциального (4.1) и вихревого решения (4.2) не будет решением системы (1.2), (1.4), т. к, уравнение (1.4) нелинейное.

Исходя из рассмотренных случаев, можно записать уточненные решения (3.7)—(3.10):

$$x-x_0=\mp\int\frac{dX_1}{\left[C_2\pm|C_1|X_1^2+|b|\left(\frac{1}{2}-lnX_1\right)X_1^2\right]^{1/2}}, \tag{4.3}$$

$$X_2=\pm\frac{1}{a}\left[C_2\mp|C_1|X_1^2+|b|\left(\frac{1}{2}-lnX_1\right)X_1^2\right]^{1/2}, \tag{4.4}$$

$$y-y_0=\mp\int\frac{dY_2}{\left[D_2\pm|C_1|Y_2^2+|b|\left(\frac{1}{2}-lnY_2\right)Y_2^2\right]^{1/2}}, \tag{4.5}$$

$$Y_1=\mp\frac{1}{a}\left[D_2\pm|C_1|Y_2^2+|b|\left(\frac{1}{2}-lnY_2\right)Y_2^2\right]^{1/2}, \tag{4.6}$$

где $x_0=-C_3$, $y_0=-D_3$. Не ограничивая сильно общности решений, в (4.3)—(4.6), можно положить $C_2=D_2$. Для конкретных краевых задач, когда имеются оценки величин $X_1$, $Y_1$, $X_2$, $Y_2$, можно использовать асимптотические разложения интегралов (4.3), (4.5).

**5. Заключение**. Таким образом, найдено точное решение (4.3)—(4.6) общей нелинейной системы уравнений плоского установившегося движения идеальной жидкости, из которого следуют, как частные случаи, известные решения. Полученное в работе вихревое решение (4.2),(4.2а) может быть использовано при исследовании турбулентных движений жидкости.

Использованный в работе метод не является классическим методом разделения переменных [3], т. к. исходное уравнение (1.4) и уравнения (3.4) являются нелинейными. Поэтому решения (3.1), (4.3)—(4.6) не будут собственными функциями задачи, а общее решение не представимо в виде бесконечного ряда по собственным функциям. Только в случае потенциального движения (когда (1.4) вырождается в два уравнения Лапласа) функции (3.1), (4.3)—(4.6) становятся собственными с собственными числами $\sqrt{|C_1|}$, а общее решение строится как ряд по собственным функциям. Примененным методом можно получить аналогичные результаты для осесимметричного движения жидкости.

Автор благодарит В. Н. Кутрунова, А. А. Позднякова, А. В. Татосова за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.; Л.: Физматгиз, 1960. 444 с.

2. Кочин Н. Е., Кибель Е. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика: В 2 ч. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 1. 584 с.

3. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 384 с.

4. Баринов В. А., Тактаров Н. Г. Математическое моделирование магнитогидродинамических поверхностных волн. Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 1991. 96 с.



*Леонид Геннадьевич АГЕНОСОВ — доцент кафедры математического анализа и теории функций математического факультета, кандидат физико-математических наук,*
*Владислав Владимирович МАЧУЛИС — доцент кафедры математического моделирования математического факультета*


УДК 517.91

# СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СОСТАВЛЯЮЩИХ ЧАСТОТНОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК


*АННОТАЦИЯ. В статье дана аналитическая оценка соотношения между общим и частным решениями одного дифференциального уравнения теории тонких оболочек.*

*In the article is given analytical evaluation of correlation between general and private decide-neil of one differential equation of theory of fine shells.*


При решении задач теории тонких оболочек методом П. Ф. Папковича [1] в уравнение изгиба подставляется общее решение уравнения совместности деформаций, которое представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка в частных производных. Сохранение при этой процедуре общего решения соответствующего однородного уравнения приводит к достаточно громоздкому аналитическому выражению конечного результата. В данной работе сделана попытка аналитической оценки влияния на конечный результат слагаемых, соответствующих общему решению однородного уравнения совместности деформаций в задаче о свободных колебаниях тонких конических оболочек.

Исходная система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$r\nabla^2\nabla^2\psi + \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = 0, \tag{1}$$