

Линейные фильтрационные волны в слоисто-неоднородном пласте

Александр Иванович Филиппов, Оксана Валентиновна Ахметова,
Марина Анатольевна Зеленова 

Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак,
Россия

Контакт для переписки: marina_ag@inbox.ru 

Аннотация. Получены решения задачи о фильтрационно-волновом поле давления в слоисто-неоднородной среде с заданным на левой границе импульсом давления. Постановка задачи содержит двумерное волновое уравнение в центральном слое, волновое уравнение, учитывающее преобладание вертикального движения в окружающей среде, условия симметрии в центре пласта, равенства давлений и потоков на границах раздела сред, отсутствие возмущений фильтрационно-волнового поля в начальный момент времени и на бесконечном удалении от источника возмущения.

В статье найдены точное решение задачи, полученное с использованием интегральных преобразований Лапласа — Карсона и синус-преобразования Фурье, асимптотическое решение и точное решение для частного случая однородной среды. Показано, что при устремлении формального параметра к нулю точное решение совпадает с главным асимптотическим приближением. Устремление толщины центрального слоя в бесконечность сводит решение для слоисто-неоднородной среды к выражению, описывающему поля давления в однородной среде. Построены пространственно-временные зависимости, описывающие динамику импульса давления в слоисто-неоднородной и однородной средах. Исследованы общие свойства и особенности линейных фильтрационных волн в слоисто-неоднородном и однородном пластах.

Ключевые слова: фильтрационно-волновое поле давления, слоисто-неоднородная среда, импульс давления, точное решение, асимптотическое решение, интегральное преобразование, численное обращение

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-22-00132, <https://rscf.ru/project/22-22-00132/>).

Цитирование: Филиппов А. И., Ахметова О. В., Зеленова М. А. 2023. Линейные фильтрационные волны в слоисто-неоднородном пласте // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 4 (36). С. 59–75. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-4-59-75>

Поступила 11.10.2023; одобрена 12.12.2023; принята 15.12.2023

Linear filtration waves in a layered heterogeneous formation

Alexander I. Filippov, Oksana V. Akhmetova, Marina A. Zelenova 

Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russia
Corresponding author: marina_ag@inbox.ru 

Abstract. Solutions to the problem of a filtration-wave pressure field in a layered inhomogeneous medium with a pressure pulse specified on the left boundary are obtained. The problem statement contains a two-dimensional wave equation in the central layer, a wave equation that takes into account the predominance of vertical motion in the environment, symmetry conditions in the center of the formation, equality of pressures and flows at the interfaces, the absence of disturbances of the filtration wave field at the initial moment of time and at an infinite distance from the source of disturbance.

The article found an exact solution to the problem obtained using the Laplace–Carson and the Fourier transform of sine, an asymptotic solution and an exact solution for the special case of a homogeneous medium. It is shown that when the formal parameter tends to zero, the exact solution coincides with the main asymptotic approximation. The tendency of the thickness of the central layer to infinity reduces the solution for a layered inhomogeneous medium to an expression describing the pressure fields in a homogeneous medium.

Spatiotemporal dependencies describing the dynamics of the pressure pulse in layered inhomogeneous and homogeneous media were constructed, and the general properties and features of linear filtration waves in layered inhomogeneous and homogeneous layers were studied.

Keywords: filtration-wave pressure field, layered inhomogeneous medium, pressure impulse, exact solution, asymptotic solution, integral transformation, numerical inversion

Acknowledgements: the research was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-22-00132, <https://rscf.ru/en/project/22-22-00132/>).

Citation: Filippov, A. I., Akhmetova, O. V., & Zelenova, M. A. (2023). Linear filtration waves in a layered heterogeneous formation. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(4), 59–75. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-4-59-75>

Received October 11, 2023; Reviewed December 12, 2023; Accepted December 15, 2023

Введение

Развитие технологий добычи нефти и газа, а также повышение эффективности разработки залежей требуют совершенствования теории фильтрации [Черных, 2008; Кузнецова, 2012; Татосов, Варавва, 2016; Филиппов и др., 2019] волновых процессов в коллекторах нефти и газа [Бажалук и др., 2012; Гатауллин, Кадыров, 2020; Алфаяд, Валиев, 2021; Корженевский и др., 2021; Филиппов и др., 2022].

Одним из результативных методов интенсификации и увеличения нефтеотдачи пластов [Вольницкая, 2005; Шульев и др., 2006; Кононенко и др., 2012; Шипулин, 2013; Грачев, Стрекалов, 2016] и восстановления приемистости нагнетательных скважин [Кармазенко и др., 2005; Мингулов, 2014] является импульсно-волновое воздействие с целью декольматации призабойной зоны.

Наиболее близкой по рассматриваемой тематике к проблеме исследований, представленных в данной статье, является работа [Овчинников, 2021], посвященная особенностям и проблемам интерпретации результатов исследований свойств флюидонасыщенных пластов методом фильтрационных волн давления. Выполненные в этой монографии обобщения иллюстрируют достигнутые к настоящему времени результаты, полученные либо на основе уравнения пьезопроводности, либо с использованием релаксационной теории, предложенной ранее Ю. М. Молоковичем. В данной статье развитие теории волновых процессов осуществлено с использованием нового перспективного подхода на основе модифицированного уравнения движения, учитывающего инерционные силы Даламбера и преобладание диссипативных процессов [Филиппов, Ахметова, 2022; Филиппов и др., 2023].

Ниже решена задача о фильтрационно-волновом поле давления в трехслойной проницаемой анизотропной пористой среде при заданном импульсе давления на входе в центральный слой. Получено точное решение в пространстве интегральных преобразований Лапласа — Карсона по времени и синус-преобразования Фурье по горизонтальной координате. Найдено асимптотическое решение методом формального параметра в главном приближении с использованием интегрального преобразования Лапласа — Карсона. Построено точное решение задачи о фильтрационно-волновом поле давления в однородной изотропной пористой среде при импульсе давления прямоугольной формы на входе в пласт. Показано, что асимптотическое решение и выражения, описывающие динамику давления в однородном пласте, являются частными случаями точного решения.

Методы

Постановка задачи

На рис. 1 представлена геометрия течения в прямоугольной системе координат, ось z которой ориентирована перпендикулярно границам слоя. Неоднородная среда представлена тремя областями с плоскими границами раздела $z = \pm h$, перпендикулярными вертикальной оси. Покрывающий и подстилающий пласты считаются слабопроницаемыми в горизонтальном направлении, средняя область толщины $2h$ ($-h < z < h$) является хорошо проницаемой в горизонтальном и вертикальном направлениях.

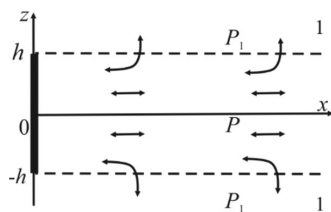


Рис. 1. Геометрия задачи: x, z — оси системы координат; h — полутолщина центрального проницаемого слоя; P — давление в центральном проницаемом слое; P_1 — давление в покрывающем и подстилающем пластах; 1 — вмещающая среда

Fig. 1. Geometry of the problem: x, z — axes of the coordinate system; h — half-thickness of the central permeable layer; P — pressure in the central permeable layer; P_1 — pressure in the overlying and underlying layers; 1 — hosting medium

Для простоты течение полагается плоским (в осях z, x). Окружающие породы являются сильно анизотропными, и несмотря на то, что в реальных условиях горизонтальная проницаемость преобладает над вертикальной, вертикальная составляющая градиента давления часто много больше горизонтальной, что позволяет пренебречь второй производной по координате x в уравнении для окружающей среды. Далее положим, что свойства вмещающих пластов идентичны. В соответствии с этим в постановке задачи использовано условие симметрии $(\partial P / \partial z)|_{z=0} = 0$.

Математическая постановка задачи для фильтрационно-волнового поля давления в таких предположениях включает волновое уравнение [Филиппов, Ахметова, 2022], учитывающее преобладание вертикального движения в окружающей среде:

$$\frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} + \frac{1}{\chi_1} \frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

волновое уравнение в центральном пласте:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{1}{\chi} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

условие симметрии в центре пласта:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (3)$$

В начальный момент времени и на бесконечном удалении от источника возмущения давления отсутствуют, а скорость изменения давления равна нулю:

$$\begin{aligned} P|_{t=0} = 0, \quad P_1|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial P_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \\ P_1|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad P|_{x \rightarrow \infty} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

На границе раздела сред $z = h$ заданы равенства давлений и потоков:

$$P|_{z=h} = P_1|_{z=h}, \quad k \frac{\partial P}{\partial z}\Big|_{z=h} = k_1 \frac{\partial P_1}{\partial z}\Big|_{z=h}. \quad (5)$$

На левой границе создается импульс давления длительностью T :

$$P|_{x=0} = P_0 \cdot (\Phi(t) - \Phi(t - T)). \quad (6)$$

Здесь t — время; P, P_1 — давление; x, z — координата; c, c_1 — скорость фильтрационных волн ($c = (\beta\rho)^{-1/2} = \sqrt{\frac{m}{(m\beta_l + (1-m)\beta_s)\rho}}$, где β — вытесняющая способность пористой среды, ρ — плотность насыщающего флюида, m — пористость, β_l — сжимаемость флюида, β_s — сжимаемость скелета [Филиппов и др., 2023]); χ, χ_1 — пьезопроводность; k, k_1 — проницаемость; P_0 — амплитуда импульса давления.

Введем нормированное время:

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad (7)$$

с использованием которого постановка (1)–(6) примет вид:

$$\frac{T^2}{c_1^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial \tau^2} + \frac{T}{\chi_1} \frac{\partial P_1}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{T^2}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} + \frac{T}{\chi} \frac{\partial P}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} P|_{\tau=0} = 0, \quad P_1|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial P_1}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0, \\ P|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad P_1|_{z \rightarrow \infty} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$P|_{z=h} = P_1|_{z=h}, \quad k \frac{\partial P}{\partial z}\Big|_{z=h} = k_1 \frac{\partial P_1}{\partial z}\Big|_{z=h}, \quad (12)$$

$$P|_{x=0} = P_0 \cdot (\Phi(\tau) - \Phi(\tau - 1)). \quad (13)$$

Точное решение задачи

Постановка (8)–(13) допускает точное решение с использованием интегральных преобразований. Применяя интегральное преобразование Лапласа — Карсона по времени τ : $\tilde{f}(s) = p \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau$, а также синус-преобразование Фурье по координате x : $f^u(p) = \int_0^{+\infty} \sin(sx) f(x) dx$, получим задачу вида:

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}_1^u}{\partial z^2} - \left(\frac{T^2 p^2}{c_1^2} + \frac{Tp}{\chi_1} \right) \tilde{P}_1^u = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}^u}{\partial z^2} - \left(s^2 + \frac{T^2 p^2}{c^2} + \frac{Tp}{\chi} \right) \tilde{P}^u = -sP_0(1 - \exp(p)), \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{P}^u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (16)$$

$$\tilde{P}^u|_{z=h} = \tilde{P}_1^u|_{z=h}, \quad k \left. \frac{\partial \tilde{P}^u}{\partial z} \right|_{z=h} = k_1 \left. \frac{\partial \tilde{P}_1^u}{\partial z} \right|_{z=h}, \quad (17)$$

$$\tilde{P}_1^u|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (18)$$

Решение уравнения (14) с учетом условия (18) запишется как

$$\tilde{P}_1^u = C_2 \exp \left(-z \sqrt{\frac{T^2 p^2}{c_1^2} + \frac{Tp}{\chi_1}} \right). \quad (19)$$

Выражение для определения \tilde{P}^u получено из уравнения (15) с учетом (16):

$$\tilde{P}^u = 2C_3 \operatorname{ch} \left(z \sqrt{s^2 + \frac{T^2 p^2}{c^2} + \frac{Tp}{\chi}} \right) + \frac{sP_0(1 - \exp(p))}{s^2 + \frac{T^2 p^2}{c^2} + \frac{Tp}{\chi}}. \quad (20)$$

Постоянные интегрирования C_2 и C_3 определяются из условий (17) и представляются в виде:

$$C_2 = \frac{sP_0(1 - \exp(p))}{\varphi^2} \left[\frac{\operatorname{ch}(\varphi h)}{\left[\operatorname{ch}(\varphi h) + \frac{k}{k_1} \frac{\varphi}{\varphi_1} \operatorname{sh}(\varphi h) \right]} + 1 \right] \exp(\varphi_1 h), \quad (21)$$

$$C_3 = - \frac{sP_0(1 - \exp(p))}{2\varphi^2 \left[\operatorname{ch}(\varphi h) + \frac{k}{k_1} \frac{\varphi}{\varphi_1} \operatorname{sh}(\varphi h) \right]}, \quad (22)$$

где
$$\varphi = \sqrt{s^2 + \frac{T^2 p^2}{c^2} + \frac{Tp}{\chi}}, \quad (23)$$

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{T^2 p^2}{c_1^2} + \frac{Tp}{\chi_1}}. \quad (24)$$

Точное решение для поля давления в изображениях с учетом постоянных интегрирования представляется как

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1^u = \frac{sP_0(1 - \exp(p))}{\varphi^2} & \left[\frac{\operatorname{ch}(\varphi h)}{\left[\operatorname{ch}(\varphi h) + \frac{k}{k_1} \frac{\varphi}{\varphi_1} \operatorname{sh}(\varphi h) \right]} + 1 \right] \times \\ & \times \exp(-\varphi_1(z - h)), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\tilde{P}^u = \frac{sP_0(1 - \exp(p))}{\varphi^2} \left[1 - \frac{sP_0(1 - \exp(p)) \operatorname{ch}(\varphi z)}{\varphi^2 \left[\operatorname{ch}(\varphi h) + \frac{k}{k_1} \frac{\varphi}{\varphi_1} \operatorname{sh}(\varphi h) \right]} \right]. \quad (26)$$

Построение пространственно-временных зависимостей с помощью (25), (26) представляет существенные трудности. Ниже построено приближенное аналитическое асимптотическое решение, которое более удобно для практических расчетов.

Асимптотическое решение в главном приближении

В (14)–(18) введем параметр асимптотического разложения формальной заменой k на k/ε , физический смысл которой представлен в работе [Филиппов, Ахметова, 2015]. Параметризованная задача примет вид:

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}_1^u}{\partial z^2} - \left(\frac{T^2 p^2}{c_1^2} + \frac{Tp}{\chi_1} \right) \tilde{P}_1^u = 0, \quad (27)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \tilde{P}^u}{\partial z^2} - \left(s^2 + \frac{T^2 p^2}{c^2} + \frac{Tp}{\chi} \right) \tilde{P}^u = -sP_0(1 - \exp(p)), \quad (28)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{P}^u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (29)$$

$$\tilde{P}^u|_{z=h} = \tilde{P}_1^u|_{z=h}, \quad \left. \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{P}^u}{\partial z} \right|_{z=h} = k_1 \left. \frac{\partial \tilde{P}_1^u}{\partial z} \right|_{z=h}, \quad (30)$$

$$\tilde{P}_1^u|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (31)$$

Решение (27)–(31) отыскивается в виде асимптотических формул:

$$\tilde{P}_1^u = \tilde{P}_1^{u(0)} + \varepsilon \tilde{P}_1^{u(1)} + \dots + \varepsilon^n \tilde{P}_1^{u(n)} + \theta_1^{(n)}, \quad (32)$$

$$\tilde{P}^u = \tilde{P}^{u(0)} + \varepsilon \tilde{P}^{u(1)} + \dots + \varepsilon^n \tilde{P}^{u(n)} + \theta^{(n)}. \quad (33)$$

Подставляя (32) и (33) в (27)–(31), получим:

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}_1^{u(0)}}{\partial z^2} - \left(\frac{T^2 p^2}{c_1^2} + \frac{T p}{\chi_1} \right) \tilde{P}_1^{u(0)} = 0, \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}^{u(0)}}{\partial z^2} = 0, \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}^{u(1)}}{\partial z^2} - \left(s^2 + \frac{T^2 p^2}{c^2} + \frac{T p}{\chi} \right) \tilde{P}^{u(0)} = -s P_0 (1 - \exp(p)), \quad (36)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{P}^{u(1)}}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (37)$$

$$\tilde{P}^{u(0)} \Big|_{z=h} = \tilde{P}_1^{u(0)} \Big|_{z=h}, \quad k \left. \frac{\partial \tilde{P}^{u(1)}}{\partial z} \right|_{z=h} = k_1 \left. \frac{\partial \tilde{P}_1^{u(0)}}{\partial z} \right|_{z=h},$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{P}^{u(0)}}{\partial z} \right|_{z=h} = 0, \quad (38)$$

$$\tilde{P}_1^{u(0)} \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (39)$$

Решение уравнения (34) с учетом (39) запишется как

$$\tilde{P}_1^{u(0)} = C_2 \exp \left(-z \sqrt{\frac{T^2 p^2}{c_1^2} + \frac{T p}{\chi_1}} \right). \quad (40)$$

Постоянная интегрирования C_2 определяется из условия равенства давлений (38):

$$C_2 = \tilde{P}^{u(0)} \exp \left(h \sqrt{\frac{T^2 p^2}{c_1^2} + \frac{T p}{\chi_1}} \right). \quad (41)$$

В (41) учтено, что $\tilde{P}^{u(0)}$ не зависит от z . Этот факт следует из (35) и (38). Расцепленное уравнение [Филиппов и др., 2018] для определения изменения давления в центральном слое запишется так:

$$\left(s^2 + \frac{T^2 p^2}{c^2} + \frac{Tp}{\chi} \right) \tilde{P}^{u(0)} - sP_0(1 - \exp(p)) = \frac{k_1}{kh} \frac{\partial \tilde{P}_1^{u(0)}}{\partial z} \Big|_{z=h}. \quad (42)$$

Решение системы (40), (42) имеет вид:

$$\tilde{P}^{u(0)} = \frac{sP_0(1 - \exp(p))}{\left[s^2 + \frac{T^2 p^2}{c^2} + \frac{Tp}{\chi} + \frac{k_1}{kh} \sqrt{\frac{T^2 p^2}{c_1^2} + \frac{Tp}{\chi_1}} \right]}, \quad (43)$$

$$\tilde{P}_1^{u(0)} = \frac{sP_0(1 - \exp(p)) \exp\left(- (z - h) \sqrt{\frac{T^2 p^2}{c_1^2} + \frac{Tp}{\chi_1}}\right)}{\left[s^2 + \frac{T^2 p^2}{c^2} + \frac{Tp}{\chi} + \frac{k_1}{kh} \sqrt{\frac{T^2 p^2}{c_1^2} + \frac{Tp}{\chi_1}} \right]}. \quad (44)$$

Убедимся, что построенное в главном приближении решение (43), (44) задачи (27)–(31) совпадает с пределом точного решения параметризованной задачи при $\epsilon \rightarrow 0$. Точное решение параметризованной задачи (27)–(31) отыскивается аналогично (25), (26) и имеет вид:

$$\tilde{P}^u = \frac{sP_0(1 - \exp(p))}{\varphi^2} \left[1 - \frac{\text{ch}(\sqrt{\epsilon}\varphi z)}{\text{ch}(\sqrt{\epsilon}\varphi h) + \frac{k}{\epsilon k_1} \frac{\sqrt{\epsilon}\varphi}{\varphi_1} \text{sh}(\sqrt{\epsilon}\varphi h)} \right], \quad (45)$$

$$\tilde{P}_1^u = \frac{sP_0(1 - \exp(p))}{\varphi^2} \left[\frac{\text{ch}(\sqrt{\epsilon}\varphi h)}{\text{ch}(\sqrt{\epsilon}\varphi h) + \frac{k}{\epsilon k_1} \frac{\sqrt{\epsilon}\varphi}{\varphi_1} \text{sh}(\sqrt{\epsilon}\varphi h)} + 1 \right] \times \quad (46)$$

$$\times \exp(-\varphi_1(z - h)).$$

Нетрудно убедиться, что, устремив формальный параметр в решениях (45) и (46) к нулю: $\tilde{P}_1^u|_{\epsilon \rightarrow 0} = \tilde{P}_1^{u(0)}$, $\tilde{P}^u|_{\epsilon \rightarrow 0} = \tilde{P}^{u(0)}$, получим выражения, совпадающие с асимптотическими решениями в главном приближении (43), (44).

Обратное синус-преобразование Фурье $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin(sx) f^u(s) ds$ позволяет представить выражения (43), (44) в пространстве изображений Лапласа — Карсона как

$$\tilde{P}^{(0)} = P_0(1 - \exp(-p)) \exp\left(-x \sqrt{\frac{T^2 p^2}{c^2} + \frac{Tp}{\chi} + \frac{k_1}{kh} \sqrt{\frac{T^2 p^2}{c_1^2} + \frac{Tp}{\chi_1}}\right), \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_1^{(0)} = P_0(1 - \exp(-p)) \exp\left(-\sqrt{\frac{T^2 p^2}{c^2} + \frac{Tp}{\chi} + \frac{k_1}{kh} x \sqrt{\frac{T^2 p^2}{c_1^2} + \frac{Tp}{\chi_1}}}\right) \times \\ \times \exp\left(-(z - h) \sqrt{\frac{T^2 p^2}{c_1^2} + \frac{Tp}{\chi_1}}\right). \end{aligned} \quad (48)$$

Приближенное асимптотическое решение (47), осредненное по толщине центрального слоя, позволяет исследовать распространение фильтрационных волн в слое с учетом потерь в окружающую среду. Для этого можно использовать алгоритмы численного обращения Штефеста [Stehfest, 1970], ден Изигера [Iseger, 2006] и др.

Линейные фильтрационные волны в однородном пласте

Постановка задачи о динамике импульса давления в однородной среде имеет вид:

$$\frac{T^2}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} + \frac{T}{\chi} \frac{\partial P}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0, \quad (49)$$

$$P|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0, \quad (50)$$

$$P|_{x=0} = P_0 \cdot (\Phi(\tau) - \Phi(\tau - 1)). \quad (51)$$

Постановка в пространстве изображений Лапласа — Карсона:

$$\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial x^2} - \left(\frac{T^2 p^2}{c^2} + \frac{Tp}{\chi}\right) \bar{P} = 0, \quad (52)$$

$$\bar{P}|_{x=0} = P_0 \cdot (1 - \exp(-p)). \quad (53)$$

Решение задачи в пространстве Лапласа — Карсона запишется в виде:

$$\bar{P} = P_0 \cdot (1 - \exp(-p)) \exp\left(-x \sqrt{\frac{T^2 p^2}{c^2} + \frac{Tp}{\chi}}\right). \quad (54)$$

Нетрудно убедиться, что решение (54) следует также из точного (26) и приближенного асимптотического решения (46) при устремлении полутолщины слоя в бесконечность $h \rightarrow 0$.

Результаты

Далее описаны результаты вычислительных экспериментов по определению влияния фильтрационных свойств пласта на динамику импульса давления. Для удобства анализа рис. 2–4 значение давления нормировано на его максимальное значение P/P_0 .

Моделирование распространения импульса давления на рис. 2–3 осуществлено на модели пласта со следующими параметрами: пористость $m = m_1 = 0,2$, проницаемость $k = k_1 = 10^{-14} \text{ м}^2$, сжимаемость $\beta_s = \beta_{s1} = 2 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$. Полутолщина проницаемого слоя $h = 1 \text{ м}$. В качестве насыщающего флюида рассматривается нефть с вязкостью $\mu = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$, плотностью $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$ и сжимаемостью $\beta_l = 4 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$.

На рис. 2 представлены зависимости нормированного давления от координаты при различных значениях безразмерного времени, построенные по формуле (54) для слоя неограниченной толщины. Из рис. 2 видно, что прямоугольный импульс давления на входе $x = 0$, при удалении от источника возмущения существенно изменяет форму. При этом происходит сглаживание фронтов, импульс растягивается в области волновой зоны от $x = 0$ до $x = cT\tau$, и максимальные значения давления уменьшаются с увеличением времени.

Заметим, что передний фронт импульса, соответствующий скачку давления при $\tau = 0$, не отмечается на кривых, поскольку удаляется на расстояние $x > 0,1 \text{ м}$. Максимальные значения давления с увеличением времени, как следует из рис. 2, достигаются при больших значениях x . При этом скорость движения максимума возмущения значительно меньше скорости фильтрационной волны.

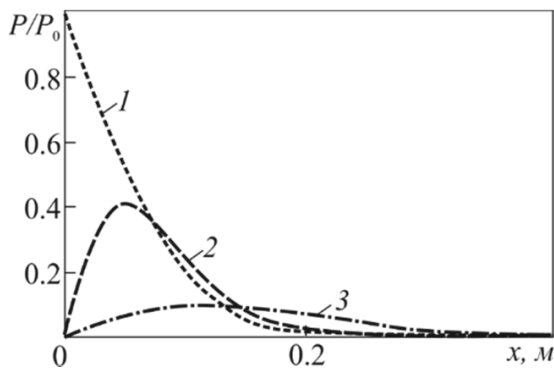


Рис. 2. Зависимость нормированного давления от координаты при различных значениях безразмерного времени: кривая 1 — $\tau = 1$; кривая 2 — $\tau = 1,2$; кривая 3 — $\tau = 3$

Fig. 2. Dependence of normalized pressure on coordinates for different values of dimensionless time: curve 1 — $\tau = 1$; curve 2 — $\tau = 1,2$; curve 3 — $\tau = 3$

На рис. 3 изображены зависимости нормированного давления от безразмерного времени на различных расстояниях от источника возмущения, построенные по формуле (52) для слоя неограниченной толщины. Из рис. 3 видно, что прямоугольный импульс давления, создаваемый на входе $x = 0$, при удалении от источника возмущения также трансформируются в протяженный до бесконечности сигнал, время вступления которого, определяемое как $\tau_{\text{вступ}} = x/(cT)$, мало. Заметим, что расчетные кривые 2 и 3 в удаленных от источника точках существенно отличаются от прямоугольного импульса на входе (кривая 1).

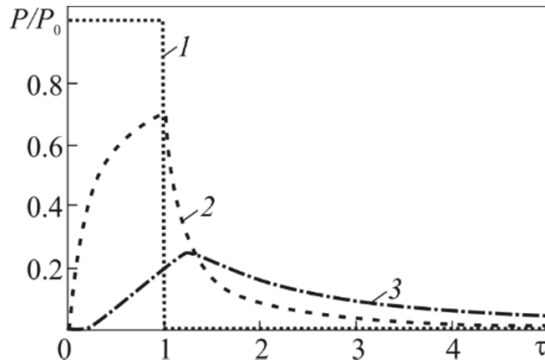


Рис. 3. Зависимость нормированного давления от безразмерного времени на различных расстояниях от источника возмущения: кривая 1 — $x = 0$ м; кривая 2 — $x = 0,03$ м; кривая 3 — $x = 0,1$ м

Fig. 3. Dependence of normalized pressure on dimensionless time at various distances from the source of disturbance: curve 1 — $x = 0$ m; curve 2 — $x = 0.03$ m; curve 3 — $x = 0.1$ m

Рис. 4 иллюстрирует влияние утечек из слоя конечной толщины в окружающую среду на эволюцию прямоугольного импульса давления фильтрационной волны. Здесь представлены временные зависимости нормированного давления при удалении от источника $x = 0,02$ м (рис. 4а) и $x = 1$ м (рис. 4б) для разных проницаемостей окружающей среды k_1 . Кривые построены совместным использованием численного обращения Штеффеста [Stehfest, 1970] и ден Изигера [Iseger, 2006] формулы (45). Из сопоставления кривых на рис. 4а и 4б следует, что увеличение проницаемости окружающей среды приводит к уменьшению значений давления, что соответствует увеличению волновых потерь фильтрационных волн в окружающую среду. При удалении от источника колебаний относительный вклад потерь возрастает (ср. рис. 4а и 4б).

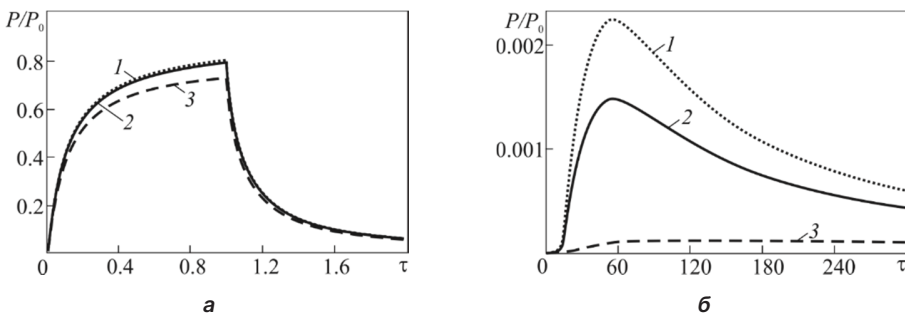


Рис. 4. Зависимость нормированного давления от безразмерного времени при $x = 0,02$ м (а) и $x = 1$ м (б) для разных проницаемостей окружающей среды: кривая 1 — $k_1 = 10^{-16}$ м²; кривая 2 — $k_1 = 10^{-14}$ м²; кривая 3 — $k_1 = 10^{-12}$ м²

Fig. 4. Dependence of normalized pressure on dimensionless time at $x = 0.02$ m (a) and $x = 1$ m (б) for different permeabilities of the environment: curve 1 — $k_1 = 10^{-16}$ m²; curve 2 — $k_1 = 10^{-14}$ m²; curve 3 — $k_1 = 10^{-12}$ m²

Заключение

Итак, развитая теория фильтрационно-волновых процессов в слое с окружающей средой позволяет исследовать пространственно-временную эволюцию прямоугольного импульса фильтрационной волны.

На основе вычислительных экспериментов показано, что прямоугольный импульс давления, создаваемый на входе $x = 0$, при удалении от источника возмущения трансформируется в протяженный до бесконечности сигнал, время вступления которого, определяемое как $\tau_{\text{вступ}} = x/(cT)$, мало. Заметим, что расчетные кривые в удаленных от источника точках существенно отличаются от прямоугольного импульса на входе. При этом максимальные значения давления с увеличением времени достигаются при больших значениях x , а скорость движения максимума возмущения значительно меньше скорости фильтрационной волны.

Установлено, что увеличение проницаемости окружающей среды приводит к уменьшению значений давления, что соответствует увеличению волновых потерь фильтрационных волн в окружающую слой среду. При удалении от источника колебаний относительный вклад потерь возрастает.

Полученные результаты имеют важное практическое значение для оценки возможных ударного воздействия на нефтегазовые пласты, осуществляемого с целью гидрогазоразрыва, например, с помощью порохового заряда.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- Алфаяд А. Г. Х., Валиев Д. З. 2021. Анализ методов волнового воздействия на призабойную зону пласта // Цифровая наука. № 3. С. 110–122.
- Бажалук Я. М., Карпаш О. М., Клымышин Я. Д., Гутак А. И., Худин Н. В. 2012. Увеличение отбора нефти путем воздействия на пласты пакетами упругих колебаний // Нефтегазовое дело. № 3. С. 185–198.
- Вольницкая Е. П. 2005. Увеличение флюидоотдачи с помощью импульсно-волновой технологии низкочастотного воздействия на пласт // Технологии нефти и газа. № 1 (36). С. 66–67.
- Гатаулин Р. Н., Кадыров А. И. 2020. Интенсификация добычи нефти методами волнового воздействия на продуктивные пласты // SOCAR Proceedings. № 2. С. 78–90. <https://doi.org/10.5510/OGP20200200434>
- Грачев С. И., Стрекалов А. В. 2016. Моделирование волновых процессов трещинопоровых коллекторов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 2. № 1. С. 52–62. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2016-2-1-52-62>
- Кармазенко В. В., Стельмах В. Г., Куневич В. Н., Верба Ю. В., Зазуляк О. М. 2005. Повышение эффективности воздействия на призабойную зону скважин // Каротажник. № 3–4 (130–131). С. 166–170.
- Кононенко П. И., Скачедуб А. А., Якимов А. С., Мацьгоров А. А., Слиденко В. М., Листовщик Л. К. 2012. Техногенные причины кольматации призабойной зоны пласта и возможные пути ее устранения // Нефть. Газ. Новации. № 7 (162). С. 44–51.

- Корженевский А. А., Корженевский А. Г., Корженевская Т. А. 2021. Импульсно-волновые технологии трещинорасчленения продуктивных пластов — реальная основа вывода нефтегазовых скважин на потенциальную продуктивность // Нефтепромысловое дело. № 3 (627). С. 13–18. [https://doi.org/10.33285/0207-2351-2021-3\(627\)-13-18](https://doi.org/10.33285/0207-2351-2021-3(627)-13-18)
- Кузнецова Е. И. 2012. Фильтрация жидкости в двухзонном трещиновато-пористом пласте // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. № 4. С. 80–86.
- Мингулов Ш. Г. 2014. Технология гидроимпульсного восстановления приемистости нагнетательных скважин // Нефтепромысловое дело. № 1. С. 39–42.
- Овчинников М. Н. 2021. Тонкие вопросы интерпретации результатов метода фильтрационных волн давления. Ижевск: Институт компьютерных исследований. 100 с.
- Татосов А. В., Варавва А. И. 2016. Очистка призабойной зоны скважины // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 2. № 3. С. 85–93. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2016-2-3-85-93>
- Филиппов А. И., Ахметова О. В. 2015. Представление фильтрационно-волновых полей в слоистой анизотропной среде в виде плоской волны (часть I) // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 1. № 1. С. 65–76.
- Филиппов А. И., Ахметова О. В., Ковальский А. А. 2018. Низкочастотное торможение фильтрационной волны в слоисто-неоднородных проницаемых пластах // Прикладная механика и техническая физика. Том 59. № 3 (349). С. 103–110. <https://doi.org/10.15372/PMTF20180311>
- Филиппов А. И., Ахметова О. В., Ковальский А. А., Губайдуллин М. Р. 2019. Поле давления при заданном отборе в слоисто-неоднородном анизотропном нефтяном пласте // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 5. № 1. С. 187–200. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2019-5-1-187-200>
- Филиппов А. И., Ахметова О. В. 2022. Фильтрационные волны // Инженерно-физический журнал. Том 95. № 4. С. 905–911.
- Филиппов А. И., Зеленова М. А., Ахметова О. В. 2022. Оценка характерных волновых параметров для оптимизации термогазодинамического воздействия на систему «скважина — пласт» // Экологические системы и приборы. № 11. С. 36–42. <https://doi.org/10.25791/esip.11.2022.1333>
- Филиппов А. И., Ахметова О. В., Зеленова М. А., Ковальский А. А., Кабиров И. Ф., Левина Т. М., Валитов Р. Р., Юсупов И. Т. 2023. Экспериментальное исследование фильтрационных волн // Известия вузов. Физика. Том 66. № 10 (791). С. 79–88. <https://doi.org/10.17223/00213411/66/10/9>
- Черных В. А. 2008. Новая математическая модель фильтрации нефти в неоднородном пласте // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. № 2. С. 26–30.
- Шипулин А. В. 2013. Применение импульсно-волновой технологии при разработке залежей вязких нефтей // Нефть. Газ. Новации. № 4 (171). С. 59–62.
- Шульев Ю. В., Бекетов С. Б., Димитриади Ю. К. 2006. Технология волнового воздействия на продуктивный пласт с целью интенсификации притока углеводородов // Горный информационно-аналитический бюллетень. № 6. С. 388–394.

- Iseger P. 2006. Numerical transform inversion using Gaussian quadrature // Probability in the Engineering and Informational Sciences. Vol. 20. Pp. 1–44.
- Stehfest H. 1970. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [D5] // Communications of the ACM. Vol. 13. No. 1. Pp. 47–49. <https://doi.org/10.1145/361953.361969>

References

- Alfayyadh, A. G. H., & Valiev, D. Z. (2021). Analysis of methods of wave action on the bottom hole formation zone. *Digital Science*, (3), 110–122. [In Russian]
- Bazhaluk, Ya. M., Karpash, O. M., Klymyshyn, Ya. D., Gutak, A. I., & Hudin, N. V. (2012). Oil production increase due to formation stimulation with the help of mechanical oscillations train. *Oil and Gas Business*, (3), 185–198. [In Russian]
- Volniczkaya, E. P. (2005). Increasing fluid recovery using pulse-wave technology of low-frequency stimulation of the reservoir. *Oil and Gas Technologies*, 1(36), 66–67. [In Russian]
- Gataullin, R. N., & Kadyirov, A. I. (2020). Intensifying oil extraction by wave action methods on productive layers. *SOCAR Proceedings*, (2), 78–90. <https://doi.org/10.5510/OGP20200200434> [In Russian]
- Grachev, S. I., & Strekalov, A. V. (2016). Simulation of wave processes in fracture-porous collectors. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 2(1), 52–62. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2016-2-1-52-62> [In Russian]
- Karmazenko, V. V., Stelmakh, V. G., Kunevich, V. N., Verba, Yu. V., & Zazulyak, O. M. (2005). Anent enhancement of bottomhole zone stimulation technique efficiency. *Karotazhnik*, 3–4(130–131), 166–170. [In Russian]
- Kononenko, P. I., Skachedub, A. A., Yakimov, A. S., Matsygorov, A. A., Slidenko, V. M., & Livotovich, L. K. (2012). Technogenic reasons of BH clogging and possible way to eliminate it. *Neft. Gaz. Novacii*, (7), 44–51. [In Russian]
- Korzhenevsky, A. A., Korzhenevsky, A. G., & Korzhenevskaya, T. A. (2021). Pulse-wave technologies of net formations fracturing — The tangible ground to put the wells on a potential productivity. *Oilfield Engineering*, (3), 13–18. [https://doi.org/10.33285/0207-2351-2021-3\(627\)-13-18](https://doi.org/10.33285/0207-2351-2021-3(627)-13-18) [In Russian]
- Kuznetsova, E. I. (2012). Fluid filtration through two zones fractured porous formation. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, (4), 80–86. [In Russian]
- Mingulov, Sh. G. (2014). Technology of fluid pulse recovery of injection wells injectivity. *Oilfield Engineering*, (1), 39–42. [In Russian]
- Ovchinnikov, M. N. (2021). *Subtle issues of interpreting the results of the filtration pressure wave method*. Institute of Computer Research. [In Russian]
- Tatosov, A. V., & Varavva, A. I. (2016). Cleaning the bottom-hole zone of wells. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 2(3), 85–93. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2016-2-3-85-93> [In Russian]
- Filippov, A. I., & Akhmetova, O. V. (2015). Presenting filtration-wave fields in a layered anisotropic medium as a plane wave (part I). *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 1(1), 65–76. [In Russian]
- Filippov, A. I., Akhmetova, O. V., & Kovalskii, A. A. (2018). Low-frequency deceleration of a filtration wave in layered-inhomogeneous permeable formations. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 59(3), 474–481. <https://doi.org/10.1134/S0021894418030112>

- Filippov, A. I., Akhmetova, O. V., Kovalsky, A. A., & Gubaidullin, M. R. (2019). Pressure field for a given selection in a layered heterogeneous anisotropic oil reservoir. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 5(1), 187–200. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2019-5-1-187-200> [In Russian]
- Filippov, A. I., & Akhmetova, O. V. (2022). Filtration waves. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 95(4), 905–911. [In Russian]
- Filippov, A. I., Zelenova, M. A., & Akhmetova, O. V. (2022). Evaluation of characteristic wave parameters for optimization of thermogasodynamic effects on the boreholeformation system. *Ecological Systems and Devices*, (11), 36–42. [In Russian]
- Filippov, A. I., Akhmetova, O. V., Zelenova, M. A., Kovalsky, A. A., Kabirov, I. F., Levina, T. M., Valitov, R. R., & Yusupov, I. T. (2023). Experimental research of filtration waves. *Izvestiya vuzov. Fizika*, 66(10), 79–88. <https://doi.org/10.17223/00213411/66/10/9> [In Russian]
- Chernyh, V. A. (2008). New mathematical model of oil filtration in a heterogeneous reservoir. *Automation and Informatization of the Fuel and Energy Complex*, (2), 26–30. [In Russian]
- Shipulin, A. V. (2013). Application of pulse and wave procedure to develop the pools with viscous oil. *Neft. Gaz. Novacii*, (4), 59–62. [In Russian]
- Shulev, Yu. V., Beketov, S. B., & Dimitriadi, Yu. K. (2006). Technology of wave impact on the productive formation in order to intensify the influx of hydrocarbons. *Mining Informational and Analytical Bulletin*, (6), 388–394. [In Russian]
- Iseger, P. (2006). Numerical transform inversion using Gaussian quadrature. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 20, 1–44.
- Stehfest, H. (1970). Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [D5]. *Communications of the ACM*, 13(1), 47–49. <https://doi.org/10.1145/361953.361969>

Информация об авторах

Александр Иванович Филиппов, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак, Россия
filippovai1949@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0964-9805>

Оксана Валентиновна Ахметова, доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник, Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак, Россия
ahoksana@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8196-7533>

Марина Анатольевна Зеленова, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и теоретической физики, Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак, Россия
marina_ag@inbox.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1379-0358>

Information about the authors

Alexander I. Filippov, Dr. Sci. (Tech.), Professor, Chief Researcher, Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russia
filippovai1949@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0964-9805>

Oksana V. Akhmetova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Chief Researcher, Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russia
ahoksana@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8196-7533>

Marina A. Zelenova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of General and Theoretical Physics, Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russia
marina_ag@inbox.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1379-0358>