ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.; Л.: Физматгиз, 1960. 444 с.

2. Кочин Н. Е., Кибель Е. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика: В 2 ч. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 1. 584 с.

3. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 384 с.

4. Баринов В. А., Тактаров Н. Г. Математическое моделирование магнитогидродинамических поверхностных волн. Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 1991. 96 с.

Леонид Геннадьевич АГЕНОСОВ — доцент кафедры математического анализа и теории функций математического факультета, кандидат физико-математических наук,
Владислав Владимирович МАЧУЛИС — доцент кафедры математического моделирования математического факультета

УДК 517.91

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СОСТАВЛЯЮЩИХ ЧАСТОТНОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

АННОТАЦИЯ. В статье дана аналитическая оценка соотношения между общим и частным решениями одного дифференциального уравнения теории тонких оболочек.

In the article is given analytical evaluation of correlation between general and private decide-neil of one differential equation of theory of fine shells.

При решении задач теории тонких оболочек методом П. Ф. Папковича [1] в уравнение изгиба подставляется общее решение уравнения совместности деформаций, которое представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка в частных производных. Сохранение при этой процедуре общего решения соответствующего однородного уравнения приводит к достаточно громоздкому аналитическому выражению конечного результата. В данной работе сделана попытка аналитической оценки влияния на конечный результат слагаемых, соответствующих общему решению однородного уравнения совместности деформаций в задаче о свободных колебаниях тонких конических оболочек.

Исходная система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$r\nabla^2\nabla^2\psi + \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = 0, \tag{1}$$

$$\nabla^2\nabla^2 W + \frac{ctg^2\gamma}{r^4}\left(2\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi_1^2} + Wctg^2\gamma\right) - \frac{Ehctg^2\gamma}{Dr}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} -$$
$$\frac{1}{D}\left[T_{10}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + T_{20}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi_1^2} + \frac{ctg^2\gamma}{r^2}W\right)\right] - \frac{\gamma_1 h}{Dg}\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\cdot \quad (2)$$
$$\cdot\left(ctg^2\gamma\int d\varphi_1\int Wd\varphi_1 - W\right) = 0.$$

Здесь и далее приняты следующие обозначения:

r — расстояние вдоль образующей конуса от его вершины до текущей точки на срединной поверхности оболочки;

r_1, r_0 — указанные расстояния до большего и меньшего оснований конуса соответственно;

φ — угол между текущей аксиальной плоскостью и плоскостью отсчета;

E, σ, h, γ_1 — модуль упругости, коэффициент Пуассона, толщина оболочки, удельный вес ее материала;

2γ — полный угол при вершине конуса;

T_{10}, T_{20} — усилия в срединной поверхности, определяемые по безмоментной теории;

ω — круговая частота собственных колебаний;

m — число полуволн вдоль образующей конуса;

n — число волн в окружном направлении;

g — ускорение силы тяжести;

t_1 — время; $t = ln\frac{r_1}{r_0}$; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$; $\varphi_1 = \varphi\sin\gamma$; $n_1 = \frac{n}{\sin\gamma}$;

ν — параметр, по которому производится минимизация частоты колебаний;

$$\Omega^2 = \frac{\gamma_1 h r_1^4}{Dg}\left(1 + \frac{ctg^2\gamma}{n_1^2}\right)\omega^2.$$

Отметим только дополнительно, что уравнение изгиба (2) получено с учетом окружной силы инерции, перерезывающих усилий в первых двух уравнениях равновесия и тангенциальных перемещений в выражениях для кривизны.

Введем подстановки

$$z = ln\frac{r}{r_1},\ W = e^{\nu z}W_1\cos n_1\varphi_1\cdot\cos\omega t_1,\ \psi = r_1 e^z F\cos n_1\varphi_1\cdot\cos\omega t_1.$$

После применения указанных подстановок уравнение совместности деформаций (1) примет вид:

$$F^{(4)} - 2(n_1^2+1)F'' + (n_1^2-1)^2 F + e^{\nu z}\left[W_1'' + (2\nu-1)W_1' + (\nu^2-\nu)W_1\right] = 0. \quad (3)$$

В случае жесткой заделки торцов усеченной конической оболочки имеем следующие граничные условия при z = 0 и z = −t:

$$W_1 = 0,\ W_1' + \nu W_1 = 0, \quad (4)$$

$$F''' - \left[(2+\delta)n_1^2 + (2-\delta)\right]F' + 2\delta_1(n_1^2-1)F = 0,$$
$$F'' + 2\delta_1 F' + \delta(n_1^2-1)F = 0. \quad (5)$$

Решение краевой задачи ищем, задаваясь формой волнообразования вдоль образующей конуса, в виде:

$$W_1 = C\sin^2 m_1 z,\ \ \mathrm{m}_1 = \frac{m\pi}{t}. \tag{6}$$

При этом граничные условия (4) выполняются, если m — целое число. Общее решение неоднородного относительно функции F дифференциального уравнения (3) запишется в виде:

$$F = \sum_{i=1}^{4} A_i e^{q_i z} - Ce^{\nu z}\left(B_1 + B_2\cos 2m_1 z + m_1 B_3 \sin 2m_1 z\right), \tag{7}$$

где A_i — произвольные постоянные общего решения однородного уравнения, B_i — произвольные постоянные частного решения неоднородного уравнения; при этом обозначено

$$q_{1,2} = \pm(n_1 + 1),\ q_{3,4} = \pm(n_1 - 1).$$

Подставляя (7) в (3), найдем коэффициенты B_i:

$$B_1 = \frac{\nu(\nu-1)}{2\left[n_1^2 - (\nu+1)^2\right]\left[n_1^2 - (\nu-1)^2\right]},$$

$$B_2 = \frac{\left[\left(4m_1^2 - \nu^2 + \nu\right)\lambda_2^4 + 16\nu(2\nu-1)m_1^2\lambda_1^2\right]}{2\left(\lambda_2^8 + 64\nu^2 m_1^2\lambda_1^4\right)},$$

$$B_3 = \frac{\left[(2\nu-1)\lambda_2^4 - 4\nu\lambda_1^2\left(4m_1^2 - \nu^2 + \nu\right)\right]}{\lambda_2^8 + 64\nu^2 m_1^2\lambda_1^4}.$$

Подчиняя функцию F граничным условиям (5), получим для определения постоянных A_i систему четырех уравнений. Учет в дальнейших выкладках общего решения однородного бигармонического уравнения сильно усложняет решение задачи, поэтому в большинстве случаев ограничиваются частным интегралом в форме правой части без надлежащей оценки допускаемой при этом погрешности.

Рассмотрим класс усеченных конических оболочек, удовлетворяющих условию

$$t = \ln\frac{r_1}{r_0} \le 1.$$

Подставляя в уравнение изгиба (2) выражения (6) и (7), после интегрирования по методу Бубнова-Галеркина получим характеристическое уравнение для определения частот колебаний и величины критической нагрузки

$$\begin{aligned} 3\Omega^2 = {} & (M + 3K)\theta + \eta_1^2\left(4m_1^2 + \nu^2\right)\left[\Phi_1 - \frac{8\nu\left(m_1^2 + \nu^2\right)}{\left(1 - e^{-2\nu t}\right)}\Phi_2\right] - \\ & - T_0'\left(4m_1^2 + \nu^2 - \nu + 1\right) - \sigma_0'\left[3\left(n_1^2 - ctg^2\gamma\right) + 2m_1^2 + \frac{\nu^2 + \nu + 1}{2}\right], \end{aligned} \tag{8}$$

где обозначено

$$\Phi_1 = \frac{1}{m_1^2}\left[\left(\nu^2 + \nu\right)B_1 + \left(2m_1^2 + \nu^2 + \nu\right)B_2 + m_1^2(\nu - 1)B_3\right],$$

$$\Phi_2 = \frac{\dfrac{1}{m_1^2}\sum\limits_{i=1}^{4} A_i' q_i (q_1 + 1)\left[1 - e^{-(q_i + \nu)t}\right]}{(q_i + \nu)\left[4m_1^2 + (q_i + \nu)^2\right]}, \qquad \mathrm{A}_i' = \frac{1}{C}A_i.$$

В рассматриваемом случае минимум частоты и критической нагрузки реализуется при $\nu \approx \pi$; кроме того, $m_1^2 \geq \pi^2$.

Введем $\Phi_2' = \dfrac{8\nu\left(m_1^2 + \nu^2\right)}{\left(1 - e^{-2\nu t}\right)}\Phi_2$. В формуле (8) это слагаемое получено от учета общего решения однородного бигармонического уравнения, соответствующего уравнению (3), поэтому отбрасывание его равносильно невыполнению граничных условий для тангенциальных перемещений. Величина отношения $\dfrac{\Phi_2'}{\Phi_1}$ с ростом числа волн в окружном направлении n_1 увеличивается. Например, при $t = 1$ для $n_1 = 5$ это отношение равно 0,006, для $n_1 = 10$ оно составляет 0,5.

Таким образом, при определении низших частот собственных колебаний тонких конических оболочек, удовлетворяющих ограничению $t = \ln\dfrac{r_1}{r_0} \leq 1$, отбрасывание общего решения однородного бигармонического уравнения можно считать оправданным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины. М.: Изд-во МГУ, 1969. 695 с.

Анатолий Афанасьевич ПОЗДНЯКОВ — заведующий лабораторией моделирования повышения нефтеотдачи СИБНИИНП, кандидат физико-математических наук

УДК 532.5.031

СТАЦИОНАРНОЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ПРИМЫКАЮЩИМИ К НЕМУ РАДИАЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

АННОТАЦИЯ. Построено и исследовано аналитическое решение задачи об установившемся потенциальном течении в плоскости с вырезом, конфигурация которого представляет собой круг с примыкающими к нему одним или двумя радиальными разрезами. Установлен практичный критерий сравнения эффективностей отверстия и разрезов как источников(стоков).

The analitical solution is obtained and investigated for the problem of a steady-state potential flow in a plane with a cut, which configuration represents an orifice with one or two contiguous radial cuts. The practical criterion is established for the comparison of effectivity of the hole and the cuts as sourses (sinks).

1. Рассматриваемая задача возникла в связи с необходимостью надежного определения параметров фильтрационного течения в окрестности добывающих и нагнетательных скважин. В реальной обстановке структура