

В рассматриваемом случае минимум частоты и критической нагрузки реализуется при  $\nu \approx \pi$ ; кроме того,  $m_1^2 \geq \pi^2$ .

Введем  $\Phi'_2 = \frac{8\nu(m_1^2 + \nu^2)}{(1 - e^{-2\nu})} \Phi_2$ . В формуле (8) это слагаемое получено от

учета общего решения однородного бигармонического уравнения, соответствующего уравнению (3), поэтому отбрасывание его равносильно невыполнению граничных условий для тангенциальных перемещений. Величина отношения  $\frac{\Phi'_2}{\Phi_1}$  с ростом числа волн в окружном направлении  $n_1$

увеличивается. Например, при  $t = 1$  для  $n_1 = 5$  это отношение равно 0,006, для  $n_1 = 10$  оно составляет 0,5.

Таким образом, при определении низших частот собственных колебаний тонких конических оболочек, удовлетворяющих ограничению  $t = \ln \frac{r_1}{r_0} \leq 1$ , отбрасывание общего решения однородного бигармонического уравнения можно считать оправданным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины. М.: Изд-во МГУ, 1969. 695 с.

**Анатолий Афанасьевич ПОЗДНЯКОВ** —  
заведующий лабораторией моделирования  
повышения нефтеотдачи СИБНИИ НП,  
кандидат физико-математических наук

УДК 532.5.031

### **СТАЦИОНАРНОЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ПРИМЫКАЮЩИМИ К НЕМУ РАДИАЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ**

**АННОТАЦИЯ.** Построено и исследовано аналитическое решение задачи об установившемся потенциальном течении в плоскости с вырезом, конфигурация которого представляет собой круг с примыкающими к нему одним или двумя радиальными разрезами. Установлен практический критерий сравнения эффективности отверстия и разрезов как источников (стоков).

*The analytical solution is obtained and investigated for the problem of a steady-state potential flow in a plane with a cut, which configuration represents an orifice with one or two contiguous radial cuts. The practical criterion is established for the comparison of effectivity of the hole and the cuts as sources (sinks).*

1. Рассматриваемая задача возникла в связи с необходимостью надежного определения параметров фильтрационного течения в окрестности добывающих и нагнетательных скважин. В реальной обстановке структура



призабойной зоны осложнена наличием естественных или искусственных (например, возникающих в результате гидроразрыва) трещин с вертикально ориентированной плоскостью. Существующие расчетные методики опираются на предельные решения: либо только для скважины [1], либо только для магистральной трещины [2]. Промежуточные ситуации, где требуется учет совместной работы скважины и распространяющейся от нее трещины как источников (стоков), пока не промоделированы.

В представленной работе предложены полные решения для двух достаточно общих вариантов конфигурации общей полости скважины и трещины, позволяющие всесторонне исследовать совместное действие указанных источников (стоков) во всем диапазоне отношения их размеров.

2. Рассмотрим фильтрационное течение в пласте, вскрытом скважиной, от которой радиально распространяется вертикальная трещина с одним или двумя симметричными крыльями. Поперечное сечение и геометрические характеристики рассматриваемой области представлены на рис. 1.

Соответствующая плоская задача определения параметров стационарного течения в однородной изотропной среде сводится к решению уравнения Лапласа для заданной области, которое может быть найдено в форме комплексного потенциала.

Дальнейшее рассмотрение проведем в безразмерных переменных, считая  $r_0$  характерным размером и обозначая  $\lambda = L/r_0$ .

Требуется построить гармоническую функцию  $\Phi(z)$  в плоскости комплексного переменного  $z$  для внешности контура, составленного из единичной окружности и берегов двух симметричных радиальных разрезов длиной  $\lambda-1$  каждый (рис. 1а). Решение задачи сводится к построению конформного отображения этой области на каноническую область, представляющую внешность единичной окружности в плоскости нового комплексного переменного  $\zeta$ .

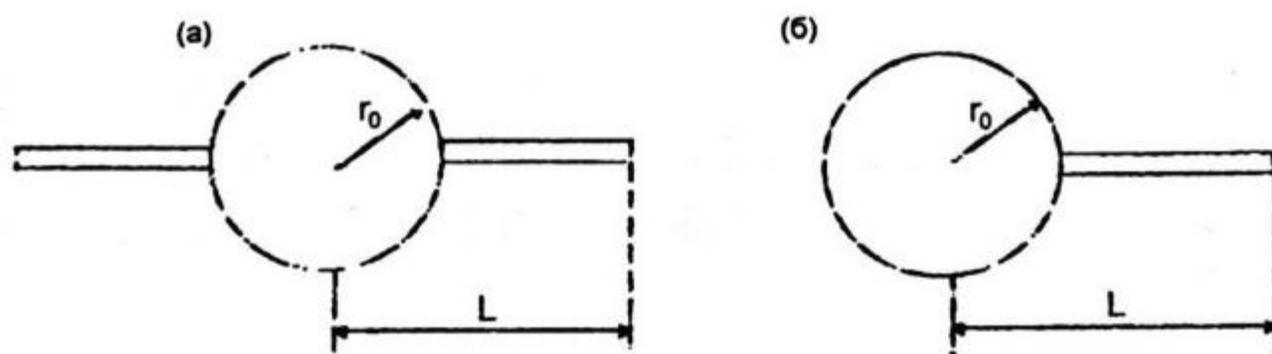


Рис. 1. Поперечное сечение скважины с трещиной

Общее решение задачи о построении конформного отображения внешности единичного круга с  $n$  ( $n$ -целое) исключенными отрезками на внешность единичного круга приведено в [3]. Для рассматриваемого здесь случая  $n = 2$  оно сводится к композиции следующих отображений:

1) функция Жуковского

$$w = \frac{1}{2d} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad (1)$$

где

$$d = \frac{1}{2} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \quad (2)$$

отображает область на плоскости  $z$  в плоскость  $w$  с разрезом по действительной оси от  $-1$  до  $+1$ ;

2) функция

$$\zeta = w + \sqrt{w^2 - 1} \quad (3)$$

отображает плоскость  $w$  с разрезом на внешность единичной окружности в плоскости  $\zeta$ .

Таким образом, конформное отображение исходной области на каноническую осуществляется функцией

$$\zeta = (z + z^{-1}) / 2d + \sqrt{(z + z^{-1})^2 / 4d^2 - 1}. \quad (4)$$

Искомое решение  $\Phi$  записывается с помощью фундаментального решения уравнения Лапласа

$$W = U + iV = \ln \zeta(z). \quad (5)$$

Для определенности будем называть  $U = \text{Re}W$  потенциалом течения,  $V = \text{Im}W$  — функцией тока. В плоскости  $\zeta = \rho \exp(i\vartheta)$  образы изопотенциалей  $U = \text{const}$  есть окружности  $\rho = \text{const}$ , а линий тока  $V = \text{const}$  — лучи  $\vartheta = \text{const}$ .

Построим изопотенциали ( $\rho = \text{const}$ ) на плоскости  $z$ . Из (4) следует

$$z + 1/z = d(\zeta + 1/\zeta). \quad (6)$$

Полагая  $z = r \exp(i\varphi)$  и разделяя действительные и мнимые части, получим систему уравнений

$$(r + 1/r) \cos \varphi = d(\rho + 1/\rho) \cos \vartheta \quad (7)$$

$$(r - 1/r) \sin \varphi = d(\rho - 1/\rho) \sin \vartheta,$$

связывающих параметры кривых в плоскостях  $\zeta$  и  $z$ .

Обозначив

$$\rho_{\pm} = \rho \pm 1/\rho,$$

получим из (6) уравнение изопотенциалей в переменных  $(x, y)$ :

$$\left( \frac{1 + r^{-2}}{\rho_+} \right)^2 x^2 + \left( \frac{1 - r^{-2}}{\rho_-} \right)^2 y^2 = d^2,$$

которое при больших  $r^2 = x^2 + y^2$  описывает кривую, мало отличающуюся от эллипса с полуосями

$$a' = d(\rho_+ / 2 + \sqrt{\rho_+^2 / 4 - 1}), \quad b' = d(\rho_- / 2 + \sqrt{\rho_-^2 / 4 - 1}).$$

Более удобно, однако, искать уравнения кривых в полярных координатах  $(r, \varphi)$ .

Введем обозначения

$$D = (r^2 + r^{-2}) / 2 \quad (8)$$

$$\varepsilon = ((\rho^2 + \rho^{-2}) / 2)^{-1}, \quad H = d^2(\rho^2 - \rho^{-2}) / 4 + 1. \quad (9)$$

Из (11) следует

$$r^2 = D + \sqrt{D^2 - 1}. \quad (10)$$

Складывая возведенные в квадрат уравнения (7), найдем



$$D = \frac{\varepsilon H - \cos 2\varphi}{1 - \varepsilon \cos 2\varphi} \quad (11)$$

Выражения (9-11) при  $\rho = \text{const}$  задают изопотенциали в плоскости  $z$  в полярных координатах.

Приведем еще одно, удобное для исследования, представление функции  $\Gamma(\varphi)$ :

$$\Gamma^2 = \frac{1}{\varepsilon} \left[ 1 + \frac{1 - \varepsilon^2}{\mu} \left( 1 + \sqrt{\frac{(1 + \mu)^2 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}} \right) \right],$$

где

$$\mu = \frac{1}{\Lambda} (1 - \varepsilon \cos 2\varphi), \quad \Lambda = d^2 - 1 = (\lambda - 1/\lambda)^2 / 4.$$

Пример картины изопотенциалей для  $\lambda = 5$  приведен на рис. 2.

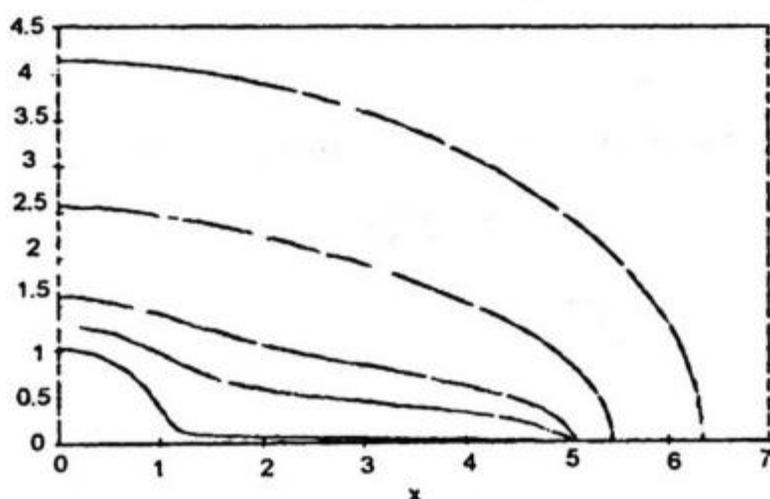


Рис. 2. Изопотенциали ( $\rho = 1,01, 1,1, 1,2, 1,5, 2,0$ ) в области с симметричной трещиной длины  $\lambda = 5$

Изопотенциаль  $\rho = 1$ , соответствующая границе  $\Gamma = 1$ , на рисунке не показана. Рис. 2. демонстрирует быструю трансформацию линий уровня потенциала  $U$  в эллипсы при удалении от контура выреза.

В ряде практических задач оказывается необходимым по положению изопотенциали в плоскости  $z$  определить значение параметра  $\rho$ , отвечающего образу изопотенциали в канонической области плоскости  $\zeta$ .

Пусть известны координаты некоторой точки изопотенциали  $(\Gamma, \varphi)$ . Исключая в (7) параметр  $\vartheta$  и вводя обозначения

$$\sigma = \varepsilon^{-1} = (\rho^2 + \rho^{-2})/2, \quad C = \cos \varphi,$$

найдем

$$\sigma = \frac{D + C}{2d^2} + \sqrt{\left(\frac{D + C}{2d^2}\right)^2 - \frac{DC + 1}{d^2} + 1}$$

$$\rho^2 = \sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}.$$

По этим формулам легко определить параметр  $\rho$  изопотенциали, к которой принадлежит заданная точка плоскости  $z$ .

Построим линии тока ( $\vartheta = \text{const}$ ) на плоскости  $z$ . Вычитая возведенные в квадрат уравнения (7) и обозначая

$$\Gamma = d^2 \sin^2 2\vartheta - 1, \quad (12)$$

получим

$$D = \frac{\Gamma + \cos 2\vartheta \cos 2\varphi}{\cos 2\varphi - \cos 2\vartheta}. \quad (13)$$

Выражения (12,13,10) задают линии тока в плоскости  $z$  в полярных координатах  $r, \varphi$ .

Другое удобное представление линий тока дается формулами

$$r^2 = \cos 2\vartheta + \frac{\sin 2\vartheta}{\omega} \left[ \sin 2\vartheta + \sqrt{1 - (\cos 2\vartheta - \omega)^2} \right], \quad (14)$$

где

$$\omega = (\cos 2\varphi - \cos 2\vartheta) / \Lambda. \quad (15)$$

Условием применимости формул (12-15) служит требование

$$\cos \vartheta \leq \cos \varphi \leq \min(1, d \cos \vartheta). \quad (16)$$

В силу симметрии картины течения в (16) и далее ограничиваемся рассмотрением только первого квадранта плоскости  $z$ .

В дальней от выреза зоне ( $r \gg \lambda$ ) из (14) следует  $\omega \rightarrow 0$ , что при произвольных  $\Delta$  может выполняться только при  $\varphi \rightarrow \vartheta$ . Таким образом, линия тока в плоскости  $z$  имеет своей асимптотой радиус с направлением  $\vartheta$ , совпадающим с направлением образа этой линии в плоскости  $\zeta$ .

Для линий тока, начинающихся на контуре единичной окружности, т. е. при  $r = 1$  и  $\varphi = \varphi^0$ , из (7) следует:

$$\cos \varphi^0 = d \cos \vartheta. \quad (17)$$

Отсюда следует ограничение (для первого квадранта плоскости  $z$ ):  $\vartheta \geq \vartheta^*$ , где

$$\vartheta^* = \arccos(1/d) \quad (18)$$

критический угол. Таким образом, только линии тока с асимптотами, составляющими с осью  $x$  угол, больший критического  $\vartheta^*$ , могут начинаться на единичной окружности. Например, для  $\lambda = 5$   $\vartheta^* = 67,38^\circ$ . Линии тока с  $\vartheta \in [0, \vartheta^*]$  начинаются на разрезе (см. рис. 3) и имеют начальную координату

$$x^0 = d \cos \vartheta + \sqrt{d^2 \cos^2 \vartheta - 1}.$$

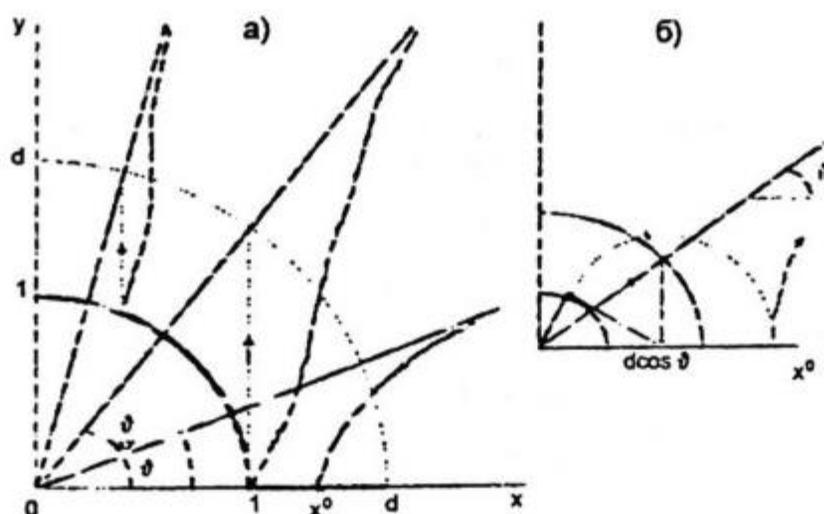


Рис. 3. Построение линий тока

Из (17) явно получается способ геометрического построения критического угла  $\vartheta^*$  и начальных точек линий тока. Необходимые действия представлены на рис. 3а,б штриховыми линиями, там же показана качественная картина линий тока для разных  $\vartheta$ .



3. Решение задачи для области, показанной на рис. 1б, когда отсутствует один из разрезов, сводится к решению задачи из п. 2 с помощью следующей композиции конформных отображений:

1) функция Жуковского  $w' = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  отображает область на плоскости  $z$  в плоскость  $w'$  с разрезом по действительной оси от  $-1$  до  $+d$ , где  $d$  определено формулой (2);

2) линейная функция

$$w = \frac{2w' - (d - 1)}{d + 1} \quad (19)$$

отображает область на плоскости  $w'$  в плоскость  $w$  с разрезом по действительной оси от  $-1$  до  $+1$ ;

3) функция (3) отображает плоскость  $w$  с разрезом на внешность единичной окружности в плоскости  $\zeta$ .

Таким образом, искомое конформное отображение исходной области на каноническую осуществляется функцией

$$\zeta = \frac{1}{d+1} \left[ (z + z^{-1}) - (d-1) + \sqrt{(z + z^{-1} + 2)(z + z^{-1} - 2d)} \right]. \quad (20)$$

Вводя параметр

$$\delta = \sqrt{\frac{d+1}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}), \quad (21)$$

представим (20) в виде

$$\zeta = \left[ \frac{z^{1/2} + z^{-1/2}}{2\delta} + \sqrt{\left( \frac{z^{1/2} + z^{-1/2}}{2\delta} \right)^2 - 1} \right]^2,$$

откуда получим уравнение

$$\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}} = \delta \left( \sqrt{\zeta} + \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right), \quad (22)$$

аналогичное (6). Поэтому сразу же можно выписать решения рассматриваемой задачи, сделав соответствующие замены в формулах п. 2:

$$\begin{aligned} \lambda &\rightarrow \lambda^{1/2}, & r &\rightarrow r^{1/2}, & \rho &\rightarrow \rho^{1/2}, \\ d &\rightarrow \delta, & \varphi &\rightarrow \varphi/2, & \vartheta &\rightarrow \vartheta/2. \end{aligned}$$

Уравнения изопотенциалей ( $\rho = \text{const}$ ), согласно (8–11), имеют вид:

$$r = D_1 + \sqrt{D_1^2 - 1} \quad (23)$$

$$e = \frac{2}{\rho + 1/\rho}, \quad h = \frac{d+1}{4}(\rho - 1/\rho)^2 \quad (24)$$

$$D_1 = \frac{eh - \cos \varphi}{1 - e \cos \varphi}, \quad r = D_1 + \sqrt{D_1^2 - 1}$$

или

$$\begin{aligned} v &= 2 \frac{1 - e \cos \varphi}{d - 1}, \\ r &= \frac{1}{e} \left[ 1 + \frac{1 - e^2}{v} \left( 1 + \sqrt{\frac{(1+v)^2 - e^2}{1 - e^2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнения линий тока ( $\vartheta = \text{const}$ ) в соответствии с (10,12,13) имеют вид (23) при

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{d+1}{2} \sin^2 \vartheta - 1, \\ D_1 &= \frac{\gamma + \cos \vartheta \cos \varphi}{\cos \varphi - \cos \vartheta} \end{aligned} \quad (26)$$

или, согласно (14,15),

$$\Omega = 2 \frac{\cos \varphi - \cos \vartheta}{d-1},$$

$$r = \cos \vartheta + \frac{\sin \theta}{\Omega} \left[ \sin \vartheta + \sqrt{1 - (\cos \vartheta - \Omega)^2} \right]. \quad (27)$$

Формулы (26,27) справедливы при

$$\cos \vartheta \leq \cos \varphi \leq \min(1, \delta^2 \cos \vartheta + (\delta^2 - 1)).$$

Значение критического угла определяется уравнением

$$\cos \vartheta^* = 2/\delta^2 - 1 = (3-d)/(d+1) \quad (28)$$

Пример построения картины течения для случая несимметричной трещины представлен на рис. 4.

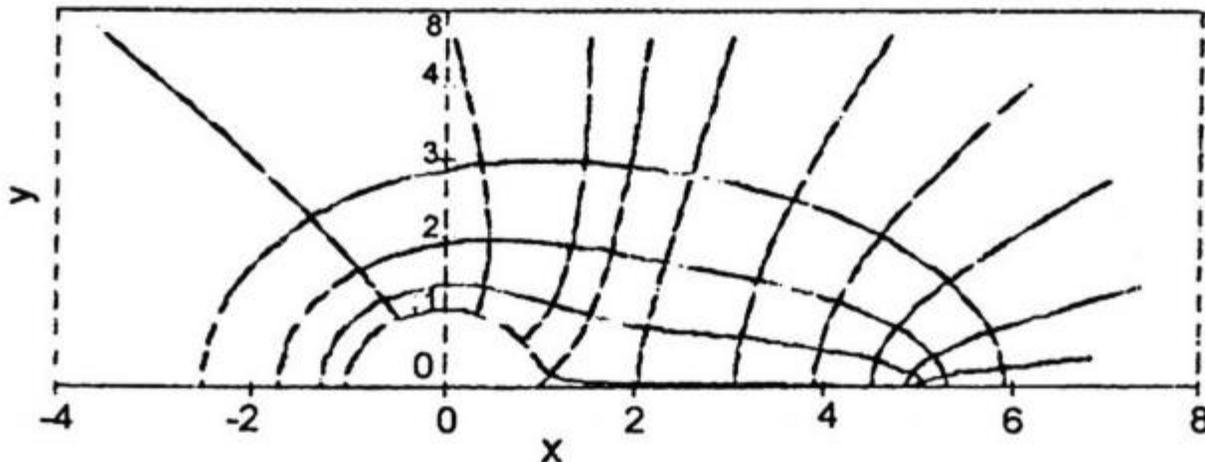


Рис. 4. Изопотенциалы ( $\rho = 1.01, 1.2, 1.5, 2.0$ ) и линии тока ( $\vartheta = 5^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 83^\circ 37', 90^\circ, 105^\circ, 135^\circ$ ) для области с несимметричной трещиной длины  $\lambda = 5$

При удалении от выреза изопотенциалы быстро становятся всюду выпуклыми, приобретая форму овоидов и затем — эллипсов. Линии тока достаточно быстро выходят на свои асимптоты  $\varphi = \vartheta$ . Значение  $\vartheta = 83.62^\circ$  соответствует критическому углу  $\vartheta^* = \arccos(1/9)$ .

4. Критические углы  $\vartheta^*$  из (18) и (28) имеют четкий физический смысл, легко устанавливаемый по рис. 3, 4. Они представляют собой характеристику размера области влияния разреза. Очевидно, что вся плоскость разделяется асимптотами линий тока на сектора. Каждое крыло трещины (разрез) влияет на потоки в секторе  $-\vartheta^* < \vartheta < \vartheta^*$ , потоки из остальной части плоскости выходят на контур отверстия. Таким образом, величина

$$J = \frac{n\vartheta_n}{\pi} = \frac{n}{\pi} \arccos \left[ (n-1) \frac{1}{d} + (2-n) \frac{3-d}{d+1} \right], \quad n = 1, 2 \quad (29)$$

дает отношение величины потока, проходящего через трещину  $Q_T$ , к полному потоку через поверхность выреза. Поэтому  $J$  можно назвать



коэффициентом влияния трещины. Если в вырезе (отверстие плюс разрез) действует источник (сток) поля интенсивности  $Q$ , то

$$J = Q_T / Q.$$

При отсутствии трещины ( $\lambda = 1$ )  $d = 1$ , следовательно, согласно (29),  $J = 0$ . При увеличении относительной длины разреза  $\lambda d \rightarrow \infty$  и  $J \rightarrow 1$ , т. е. область влияния трещины распространяется на всю плоскость.

Зависимость  $J$  от относительной длины трещины  $L = \lambda - 1$  представлена на рис. 5.

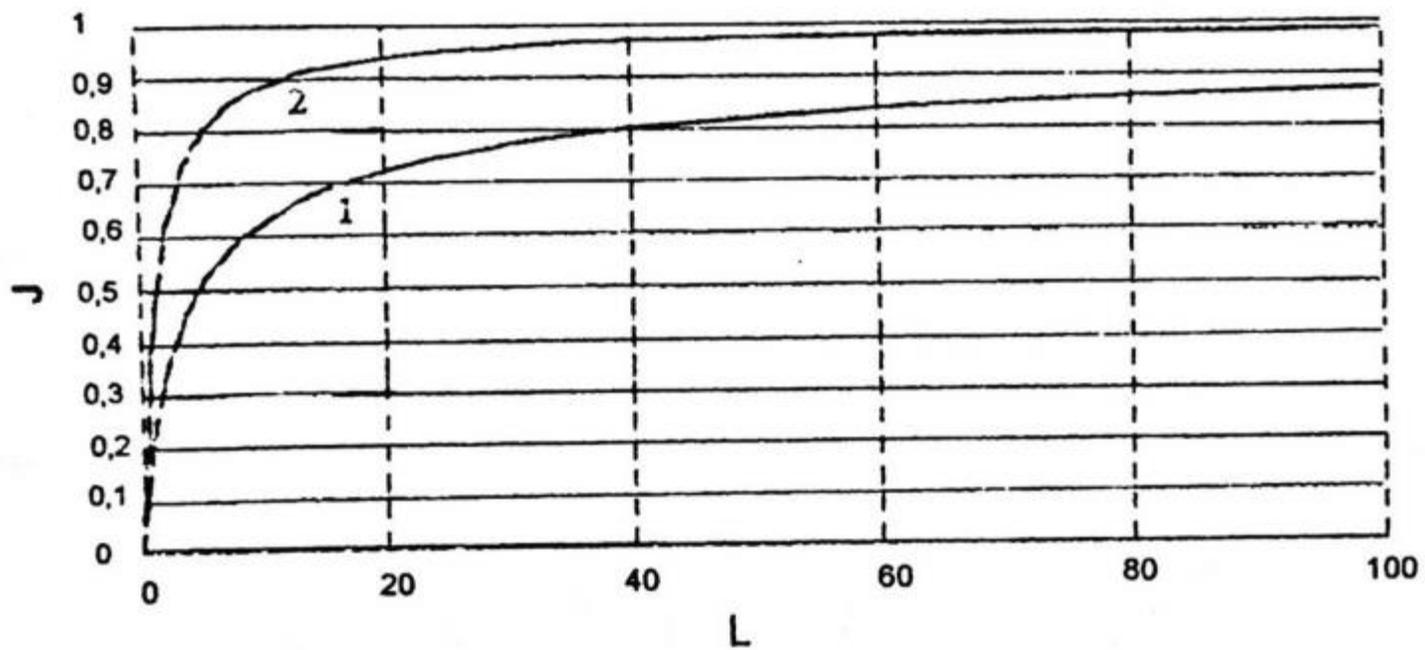


Рис. 5. Зависимость коэффициента влияния несимметричной ( $n = 1$ ) и симметричной ( $n = 2$ ) трещины от ее относительной длины

5. Для задач фильтрации связь между значением потенциала  $U = \ln \rho$  (см. (5)) и давлением  $p$  представляется в виде

$$p = p_0 + K \ln \rho,$$

где  $K = Q/2\pi\sigma$ ,

$p_0$  — давление в полости (на скважине),

$Q$  — объемный расход жидкости через данную изопотенциаль,

$\sigma = kh/\mu$  — коэффициент гидропроводности пласта,

$k$  — проницаемость пористой среды,

$\mu$  — динамическая вязкость пластового флюида,

$h$  — мощность пласта.

При известном значении  $p$  поток жидкости через скважину вычисляется по формуле

$$Q = 2\pi\sigma \frac{p - p_0}{\ln \rho}. \quad (30)$$

В прикладных задачах часто в качестве краевого условия задают давление  $p_K$  на достаточно удаленном от скважины контуре питания с радиусом

$$R_K \gg \lambda.$$

При этом условии, согласно асимптотическим оценкам, формулу (30) можно приближенно записать как

$$Q = 2\pi\sigma \frac{p_K - p_0}{\ln \frac{R_K}{d_n}}, \quad (31)$$

где

$$d_n = \begin{cases} (d+1)/2, & n=1 \\ d, & n=2, \end{cases}$$

индекс  $n$  показывает число крыльев трещины, а  $d$  вычисляется по (2).

Если в (31) задавать размерное значение радиуса  $R_K$ , то в знаменателе подлогарифмического выражения следует использовать величину

$$r^{ef} = r_0 d_n, \quad (32)$$

трактуемую как эффективный радиус скважины.

При отсутствии трещины ( $\lambda=1$ )  $r^{ef}=r_0$  ( $n=1,2$ ) и (31) переходит в известную формулу Дюпюи [1]. При размерах трещины, значительно превосходящих радиус скважины ( $\lambda \gg 1$ ),  $r^{ef} \approx L/2$  и (31) переходит в формулу Маскета [2] для задачи о разрезе длины  $2L$  на плоскости.

При  $\lambda \geq 6$  эффективный радиус (32) можно задавать приближенными значениями

$$r^{ef} = \begin{cases} L/4 + r_0/2, & n=1, \\ L/2, & n=2. \end{cases}$$

На основании аналитического и численного исследования полученных решений сделаны следующие выводы.

При небольшой длине трещины скважина заметно влияет на параметры течения, поэтому:

— при длине трещины до 6-7 радиусов ствола скважины необходимо использовать уточненную формулу (32) для эффективного радиуса;

— при длине симметричной трещины до  $\approx 50 r_0$ , а несимметричной — до  $\approx 200 r_0$  — необходимо учитывать перераспределение потоков между трещиной и скважиной.

Неучет этого обстоятельства для трещин небольшой протяженности приводит к неверной интерпретации данных обследования скважины после проведения микрогидроразрыва пласта, а также к неадекватности существующих численных моделей типа источников-стоков.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
2. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.: Гостоптехиздат, 1949. 628 с.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.