Виктор Иванович КРУГЛИКОВ — заведующий кафедрой математического анализа и теории функций математического факультета, доктор физико-математических наук, профессор,
Елена Ивановна ШУТОВА — ассистент кафедры математического анализа и теории функций математического факультета

УДК 378:37

МОДЕЛИРОВАНИЕ УРОВНЯ ЗНАНИЙ УЧЕБНОГО КОЛЛЕКТИВА

АННОТАЦИЯ: В данной статье проведено строгое обоснование некорректности оценочных функций среднего балла успеваемости, качества. В связи с этим предложена новая характеристика уровня знаний учебного коллектива.

In the given article you can find the substantiation of the inefficiency of the grading method of students' knowledge by estimating the average grade point. Therefore, the new characteristics of the knowledge level of the students is suggested.

Ниже, ставя задачу о количественном описании уровня знаний (студенческого) учебного коллектива (группы, потока, курса, факультета и т. п.) и показывая некорректность общепринятых здесь характеристик среднего балла, процентов успеваемости и качества, мы предлагаем некий новый вариант решения данной задачи, опирающийся на интегральное сравнение поведения двух кривых (фактической и эталонной), отражающих учебные успехи коллектива.

1. В рамках нашей образовательной системы обучение проводится коллективно (в группе, на потоке и т. д.). А потому, наряду с необходимостью оценивать уровень знаний отдельно взятого обучаемого внутри коллектива (например, посредством количественных отметок «2», «3», «4», «5» или их качественных аналогов «неудовлетворительно», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично»), нередко возникает еще и необходимость сравнения различных учебных коллективов по той или иной из характеристик, призванных отражать достижения в учебе данного коллектива.

В настоящее время административные органы (начиная, например, от факультетских и кончая министерскими) при характеристике уровня знаний учебного коллектива продолжают рекомендовать традиционные оценочные функции среднего балла, успеваемости, качества.

Применение этих оценочных функций для сравнения коллективов по уровню знаний требует большой осторожности. Поясним сказанное примером из пяти учебных групп, ограничившись для простоты расчетов числом обучаемых в каждой из них в количестве 10 человек.

Каждая из этих групп имеет свои недостатки или достоинства при анализе совокупных показателей в оценке ее коллективного уровня знаний, так что на прямой вопрос о том, какую же из этих пяти групп считать наилучшей, вряд ли возможен однозначный (без каких-либо оговорок) ответ, поскольку в данной ситуации придется решать, что является более важным: успеваемость при пренебрежении качеством, либо качество при пренебрежении успеваемостью, либо, наконец, в «разумных» дозах необходимо учитывать и то и другое?

Группа	Оценки на экзамене										Успеваемость	Качество	Средний балл
«А»	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	100%	0%	3,0
«Б»	5	3	3	3	3	3	3	3	3	2	90%	10%	3,1
«В»	5	4	3	3	3	3	3	3	2	2	80%	20%	3,1
«Г»	5	5	4	3	3	3	3	2	2	2	70%	30%	3,2
«Д»	5	5	5	4	3	3	2	2	2	2	60%	40%	3,3

2. На первый взгляд, преодоление описанных сомнений при выборе наилучшего по уровню знаний учебного коллектива (с использованием для этого оценочных функций среднего балла, успеваемости и качества) особого затруднения представлять не должно в силу следующих соображений.

Если упомянутые оценочные функции исследовать на экстремум, то получаемое их минимальное значение следовало бы принять за отметку для коллектива в качестве «2», максимальное значение — в качестве «5», а промежуточные значения между максимальным и минимальным, разградуировав их каким-либо образом, можно было бы принять за оценки для коллектива в качестве «3» и «4».

В следующем пункте статьи проводится аналитическое описание поставленной задачи. Ее решение окажется неожиданным для ряда пользователей, не задумывавшихся о математической природе оценочных функций среднего балла, качества, успеваемости. А именно: мы покажем, что их экстремальные значения могут быть определены корректно лишь для тех учебных коллективов, число обучаемых в которых либо равно нулю, либо оно бесконечно. Оба этих случая, к сожалению, выглядят абсурдными в реальной ситуации.

3. Для формализации описанной в предыдущем пункте экстремальной задачи обозначим через x_2, x_3, x_4, x_5 число обучаемых из заданного коллектива, уровень знаний которых оценен соответственно отметками «2», «3», «4», «5».

Оценочные функции уровня знаний учебного коллектива запишутся в виде:

средний балл

$$u(x_2,x_3,x_4,x_5)=\frac{2x_2+3x_3+4x_4+5x_5}{x_2+x_3+x_4+x_5},$$

качество

$$v(x_2,x_3,x_4,x_5)=\frac{x_4+x_5}{x_2+x_3+x_4+x_5},$$

успеваемость

$$w(x_2,x_3,x_4,x_5)=\frac{x_3+x_4+x_5}{x_2+x_3+x_4+x_5},$$

где в последних двух функциях, чтобы избежать ненужных нагромождений, опущен традиционный множитель 100 (приводящий каждую из этих функций к соответствующему проценту от общего числа обучаемых в коллективе).

Теперь формализованная постановка одной из типичных здесь экстремальных задач запишется так.

Требуется найти экстремальные значения, например, функции успеваемости

$$w(x_2,x_3,x_4,x_5)=\frac{x_3+x_4+x_5}{x_2+x_3+x_4+x_5}$$

при условии, когда число обучаемых

$$x_2+x_3+x_4+x_5=N\ ,$$

а качество

$$\frac{x_4+x_5}{x_2+x_3+x_4+x_5}\geq q\ ,$$

где N=1,2, ... — любое натуральное число, а q — любое число между 0 и 1.

Такая задача приводит нас к стандартной задаче оптимального управления с ограничениями в виде равенств и неравенств.

Дополнительно к данной постановке заметим, что решение задачи о безусловных экстремумах для каждой из оценочных функций приводит к тому, что либо все обучаемые имеют отметки «5» (при максимуме функции), либо все они учатся только на «2» (при минимуме функции). Разумеется, такие экстремальные характеристики не реальны в практическом учебном процессе. Если же все-таки допустить (теоретическую) возможность таких ситуаций, то необходимая далее разградуировка промежуточных (между экстремальными) значений приведет нас к одной из задач на условный экстремум, типичная формулировка которой уже приведена выше.

4. Поиск решений описанных выше задач оптимального управления особых математических трудностей не представляет, и, например, для приведенной в п. 3 задачи ее условные экстремумы находятся так.

Определяя функцию Лагранжа в виде

$$\Psi(x_2,x_3,x_4,x_5)=\frac{x_3+x_4+x_5}{x_2+x_3+x_4+x_5}+\lambda\left(\frac{x_4+x_5}{x_2+x_3+x_4+x_5}-q\right)+$$
$$+\mu(x_2+x_3+x_4+x_5-N)\ ,$$

для нахождения точек (x_2,x_3,x_4,x_5), в которых возможен условный экстремум, составляем систему соотношений:

$$\begin{cases}
\Psi'_{x_2}=-\dfrac{x_3+x_4+x_5}{(x_2+x_3+x_4+x_5)^2}+\lambda\left(-\dfrac{x_4+x_5}{(x_2+x_3+x_4+x_5)^2}\right)+\mu=0\ ,\\
\Psi'_{x_3}=\dfrac{x_2}{(x_2+x_3+x_4+x_5)^2}+\lambda\left(-\dfrac{x_4+x_5}{(x_2+x_3+x_4+x_5)^2}\right)+\mu=0\ ,\\
\Psi'_{x_4}=\dfrac{x_2}{(x_2+x_3+x_4+x_5)^2}+\lambda\,\dfrac{x_2+x_3}{(x_2+x_3+x_4+x_5)^2}+\mu=0\ ,\\
\Psi'_{x_5}=\dfrac{x_2}{(x_2+x_3+x_4+x_5)^2}+\lambda\,\dfrac{x_2+x_3}{(x_2+x_3+x_4+x_5)^2}+\mu=0\ ,\\
x_2+x_3+x_4+x_5=N\ ,\\
\dfrac{x_4+x_5}{x_2+x_3+x_4+x_5}\geq q.
\end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе и используя пятое равенство, приходим к соотношению $1/N=0$, из которого вытекает, что $N=\infty$.

Таким образом, аналитический поиск экстремальных решений оценочных функций среднего балла, качества и успеваемости приводит к заключению о его корректности лишь в случае бесконечного множества обучаемых. К этому абсурдному, с точки зрения практического учебного процесса, выводу следует добавить такой же абсурдный вывод и для случая N=0, т. е. когда вообще никто не обучается (тогда возможны самые парадоксальные выводы, в частности, и сделанный здесь).

Убедившись в некорректности использования оценочных функций среднего балла, успеваемости и качества для количественной характеристики уровня знаний учебного коллектива и желая все-таки иметь некую такую характеристику, далее приводим ее в виде интегрального сравнения двух специальных кривых, описываемых в следующих двух пунктах.

5. Первая кривая, называемая *нормативной,* или *эталонной*, представляет собою некое «усредненное» видение большим по численности множеством преподавателей сравнительного распределения в учебном коллективе отметок «2», «3», «4» и «5» так, чтобы было возможным проведение учебного процесса в стабильной, спокойной обстановке, исключающей «взрывы» и «штурмовщину», чтобы у педагогов и обучаемых возникало желание как отдавать, так и получать знания, чтобы имелись в наличии самые разнообразные другие психолого-педагогические аспекты, обеспечивающие условия оптимально успешной работы коллектива учащихся.

Результаты такого «усредненного» видения (после обработки соответствующих анкет) можно изобразить на плоскости с координатами (x,v), где по оси ординат v откладывается уровень знаний v по предмету, теме, разделу и т. п., измеряемый по стобалльной шкале или в процентах к полному уровню, а по оси абсцисс x откладывается процент учащихся, имеющих уровень знаний меньший, чем величина v.

Уже упомянутая искомая *эталонная* (нормативная) *кривая* представляет собой следующую ступенчатую функцию:

$$v=\varphi(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0\le x<8 \\ 25 & \text{при} \quad 8\le x<20 \\ 35 & \text{при} \quad 20\le x<28 \\ 50 & \text{при} \quad 28\le x<60 \\ 70 & \text{при} \quad 60\le x\le 100. \end{cases}$$

6. В этой же системе координат будем определять и функцию $v=f(x)$, графиком которой отражается *фактический* уровень знаний учебного коллектива.

Построение функции $v=f(x)$ проводится следующим образом.

Сначала на оси абсцисс отмечаются точки

$$\alpha,\quad 2\alpha,\quad \dots\quad N\alpha,$$

где N — количество обучаемых в данном коллективе, а $\alpha={}^{100}\!/_{N}$ — количество процентов, приходящееся на одного учащегося.

Затем, располагая фактические уровни знаний учащихся (измеренные по стобалльной шкале или в процентах к полному уровню) последовательно, в порядке неубывания, полагаем значение $f(\alpha)$ равным минимальному уровню, $f(2\alpha)$ — следующему за ним уровню и так далее.

Наконец, на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ между соседними абсциссами $x_k=k\alpha$ и $x_{k+1}=(k+1)\alpha$, где k=0, 1, ... N-1 график функции *f*(x) определяем как линейный отрезок, соединяющий точки $(x_k, f(x_k))$ и $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$, при этом точку (0, f(0)), получаемую при k=0, считаем совпадающей с началом координат O=(0,0).

Таким образом, данная *фактическая кривая* $v = f(x)$ является кусочно-линейной функцией, имеющей в качестве своего графика некоторую ломаную.

7. Опираясь теперь на наличие двух кривых (эталонной и фактической) и выбрав тот или иной способ «отклонения» фактической кривой от эталонной, мы посредством величины U такого отклонения и будем характеризовать искомый уровень знаний данного учебного коллектива.

На наш взгляд, в качестве величины U вполне целесообразно выбрать разность

$$U = S - S_0$$

площадей S и S_0 криволинейных трапеций, порождаемых кривыми $f(x)$ и $\varphi(x)$, соответственно.

Поскольку, согласно геометрическому смыслу интеграла, выполнено

$$S = \int_0^{100} f(x)dx \quad \text{и} \quad S_0 = \int_0^{100} \varphi(x)dx,$$

то наша формула перепишется в виде

$$U = \int_0^{100} f(x)dx - \int_0^{100} \varphi(x)dx.$$

Дальнейший анализ и упрощение этой формулы связаны со свойствами функций f и φ.

Во-первых, в силу того, что φ — ступенчатая функция, легко подсчитать, что

$$\int_0^{100} \varphi(x)dx = 4980$$

Во-вторых, в силу кусочной линейности функции f, ее интеграл от 0 до 100 есть сумма площадей трапеций, которую легко подсчитать по аналогии с методом трапеций при приближенном вычислении интегралов, а именно:

$$\int_0^{100} f(x)dx = \frac{\alpha}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left[f(x_k) + f(x_{k+1})\right].$$

Окончательно предлагаемая нами формула для определения количественной оценки уровня знаний учебного коллектива примет вид:

$$U = \frac{\alpha}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left[f(x_k) + f(x_{k+1})\right] - 4980,$$

где N — число обучаемых, $\alpha = {}^{100}\!/_{N}$, $x_k = k\alpha$.

Границы изменения величины U определены неравенствами:

$$-4980 \le U \le 5020.$$

При сравнении двух учебных коллективов полагаем: более высоким уровнем знаний обладает тот, у которого величина U больше.

Для коллектива с удовлетворительным уровнем знаний $U \ge 0$, а если $U < 0$, то такой учебный коллектив имеет неудовлетворительный уровень знаний.