ЛИТЕРАТУРА

1. Ноден П., Китте К. Алгебраическая алгоритмика. М., 1999. 720 с.
2. *Hans Riesel* Prime Numbers and Computer Methods for Factorization. Stuttgart-Boston, 1985. 452 p.
3. *Munro I.* The Computational Complexity of Algebraic and Numeric Problems // American Elsevier. New-York. 1986. № 7. P. 28-40.
4. Инютин С. А. Компьютерная модулярная алгебра квадратичного диапазона и область ее приложения // Вестник Тюменского госуниверситета. Тюмень. 2001. № 2. С. 141-148.
5. Инютин С. А. Арифметико-логические основы вычислительных систем. Сургут, 2001.117 с.
6. Инютин С. А. Модулярные вычисления в сверхбольших компьютерных диапазонах // Электроника. 2001. № 6. С. 54-61.

Владимир Николаевич КУТРУНОВ —
декан факультета математики
и компьютерных наук, доктор физико-
математических наук, профессор;
Елена Борисовна ОРЛОВА —
старший преподаватель кафедры
математического моделирования

УДК 519.6

ЭКСПЕРИМЕНТЫ С ИТЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ ОПЕРАТОРНОГО ПОЛИНОМА НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

АННОТАЦИЯ. В работе сопоставлены несколько вариантов нового итерационного двухточечного стационарного метода, построенного на основе алгебраического полинома наилучшего равномерного приближения (метод ПНП), пригодного для решения линейных операторных уравнений .

Several variants of new iteration two-point stationary method built on the base of the algebraic multinomial of the best uniform approximation (the method MBA) suitable to solve linear operator equations are matched.

Решаемое линейное операторное уравнение имеет вид:

$$(\mathbf{aI} - \mathbf{T})\mathbf{X} = \mathbf{B}, \tag{1}$$

где **a** — некоторое число; **X**, **B** — искомый и заданный элементы банахова пространства **E**; **I** — тождественный, а **T** — линейный ограниченный операторы с действительным спектром. Особенности метода ПНП проще показать на примере решения простейшего алгебраического уравнения

$$(\mathbf{a} - \mathbf{t})\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{2}$$

здесь **a**, **t**, **b**, **x** — действительные числа. Если в (2) запретить операцию деления на число t, тогда точное решение, использующее деление

$$\mathbf{x} = (\mathbf{a} - \mathbf{t})^{-1}\mathbf{b}, \tag{3}$$

не может быть получено. Это соответствует отсутствию явно найденного обратного оператора $(\mathbf{aI} - \mathbf{T})^{-1}$ в операторном уравнении (1). Необходимо построить метод решения уравнения (2) без использования операции деления, затем перенести эту технику на операторное уравнение (1). Простейший путь опирается на использование полиномиальных аппроксимаций функции $(a-t)^{-1}$. Пусть такая последовательность полиномов $P_i(t), i = 0, 1...$ задана. Полиномиальная аппроксимация

$$(a-t)^{-1} \approx P_i(t) \tag{4}$$

позволяет получить последовательность приближенных решений, в которых используются только операции умножения, сложения и вычитания:

$$x \approx x_i = P_i(t)b \quad, i = 0,\ 1... \tag{5}$$

Если для любого **i** удастся установить связь $x_i = f(x_{i-1}, x_{i-2}...x_0, b)$, то множество пригодных для аппроксимации последовательностей полиномов $\{P_i(t)\}$ приводит к множеству итерационных процессов решения уравнения (2). За аппроксимирующие последовательности полиномов выберем отрезки ряда Тейлора и полиномы наилучшего равномерного приближения. Аппроксимации с помощью отрезков ряда Тейлора (разложение в точке $t_0 = 0$) приводят к последовательности:

$$(a-t)^{-1} \approx P_i(t) = \frac{1}{a}\sum_{j=0}^{i}\left(\frac{t}{a}\right)^j, i = 0,1... \tag{6}$$

Точное теоретическое значение погрешности вычисляется

$$\pi_i = \left|(a-t)^{-1} - P_i(t)\right| = \left|\frac{\left(\frac{t}{a}\right)^{i+1}}{a-t}\right|. \tag{7}$$

Из (7) следует условие сходимости: числа **t** должны находиться на круге радиуса $|a|$, т.е. $|t| < |a|$. Используя (6), последовательность приближенных решений x_i (5) можно записать в виде итерационного процесса

$$x_i = \frac{b}{a} + \frac{t}{a}x_{i-1}; \quad x_0 = \frac{b}{a}; \quad i = 1,2... \tag{8}$$

Теоретическая погрешность решения имеет вид

$$\varepsilon_i = |x - x_i| = \pi_i\ |b|. \tag{9}$$

Если погрешность ε задана, то из (9) и (7) определяется необходимое теоретическое число итераций. Знание точного решения уравнения (2) позволяет на каждом шаге выяснять и фактическую погрешность. Из формул (7)–(9) видно, что для $t = 0$ число итераций равно единице и возрастает с возрастанием $|t|$, т.е. сходимость для различных **t** неравномерна. При **t** больше, либо равном числу **a**, итерационный процесс расходится, в то же время уравнение (2) имеет решение для всех чисел **t**, не равных числу **a**. Пусть $a = 10$, $b = 24$, $\varepsilon = 10^{-6}$. Теоретическое и фактическое количество итераций дает таблица 1.

Таблица 1

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9,9	10
$i_{теор}$	1	6	9	12	16	22	30	44	73	161	1919	
$i_{факт}$	1	6	9	12	16	22	30	44	73	161	1919	

Если в итерационном процессе (8) выполнить замены $1 \leftrightarrow I$; $t \leftrightarrow T$; $x_i \leftrightarrow X_i$; $b \leftrightarrow B$, то получится известный метод простой итерации, пригодный для решения операторного уравнения (1). Метод активно применяется, например, для решения интегральных уравнений теории упругости [2]. Пусть оператор **T** — симметричная матрица порядка **n**, $\{t_k\}$ и $\{e_k\}$ — соответствующие собственные числа и собственные ортонормированные вектора, $k = 1, 2,...n$. Разложим приближенное решение X_i и вектор **B** по базису $\{e_k\}$

$$X_i = \sum_{k=0}^{n} x_{ik}e_k; \qquad B = \sum_{k=0}^{n} b_k e_k. \tag{10}$$

Подстановка векторов в итерационный процесс и приравнивание коэффициентов при одинаковых e_k приводит к формулам:

$$x_{ik} = \frac{b_k}{a} + \frac{t_k}{a} x_{i-1,k}; \tag{11}$$

Из (11) следует, что коэффициенты x_{ik} приближенного решения X_i сходятся к точным значениям в соответствии с методом простой итерации (8). Скорость сходимости зависит от соответствующих собственных чисел t_k. Представление о характере неравномерной сходимости коэффициентов можно получить из таблицы 1, если считать, что значения t являются собственными числами оператора T. Одновременная сходимость всех коэффициентов определяется условием $\{|t_k|\} < |a|$. Если спектр $\{t_k\}$ или его часть не попадают внутрь интервала [-a, a], то итерационный процесс расходится. В общем случае расположения спектра оператора T на интервале [m, M] действительной оси и $a \notin [m,M]$ ряд Тейлора позволяет построить сходящийся итерационный процесс. Разложение следует выполнить в средней точке интервала $t_0 = (m + M)/2$. Среди всех процессов, построенных на основе ряда Тейлора (семейство методов простой итерации), последний будет сходиться наилучшим образом, но по-прежнему неравномерно.

Полином, равномерно сходящийся к функции $(a-t)^{-1}$ на интервале [-1,1] построен еще П. Л. Чебышевым, описан в ряде монографий и учебников, например [3 с.308]. Он записан в неявной форме, содержит над числом t операции деления и радикалы и по этой причине не пригоден для целей данной работы. Итерационная форма данного полинома предложена в работе [1].

Теорема 1 [1]

Полином наилучшего равномерного приближения $P_i(t)$ функции $1/(a-t)$, $t \in [m, M]$ удовлетворяет итерационному процессу

$$P_0 = 4(g+h)/[(M-m)(g-h)^2],$$

$$P_1(t) = 8(1/2 + y/(g-h)) \;/\; [(M-m)(g-h)],$$

$$P_i(t) = 4h/(M-m) + 2hyP_{i-1} - h^2 P_{i-2}, \; i = 2,3,.., \tag{12}$$

$$d = (2a - M - m)/(M-m), \; y = (2t - M - m)/(M-m),$$

$$h = d - \text{sign}(d)\sqrt{(d^2-1)}, \; g * h = 1.$$

Погрешность $\pi_i(t)$ удовлетворяет процессу

$$\pi_0(t) = 1/(a-t) - P_0, \; \pi_1(t) = 1/(a-t) - P_1,$$
$$\pi_i(t) = 2hy\,\pi_{i-1} - h^2\pi_{i-2}, \; i = 2, 3... \tag{13}$$

$$\max_{t\in[m,M]} |\pi_i(t)| = (M-m)|h|^i \;/\; (2(a-M)(a-m)) \tag{14}$$

Как и в методе простой итерации, знание полинома $P_i(t)$ позволяет построить итерационный процесс (метод ПНП). В соответствии с (5) и (9) умножение равенств (12), (13) и (14) на величину b дает:

$$x_i = 4hb/(M-m) + 2hy\;x_{i-1} - h^2\;x_{i-2}, \quad i = 2, 3,... \tag{15}$$

$$\varepsilon_i(t) = 2hy\;\varepsilon_{i-1} - h^2\varepsilon_{i-2}, \quad i = 2, 3,... \tag{16}$$

Если начальные приближения x_0, x_1 назначены с использованием (12) и $t \in [m, M]$, то

$$\max|\varepsilon_i(t)| = \max_{t\in[m,M]} |\pi_i(t)|\ |b|, \qquad (17)$$

т. е. метод обеспечивает скорость сходимости, эквивалентную скорости сходимости геометрической прогрессии со знаменателем **h**. Если $t \in [m, M]$, то теоретически необходимое число итераций при заданной погрешности ε может быть найдено из формулы (17), а в случае $t \notin [m, M]$ — из (16).

Пусть снова решается простейшее уравнение (2): $(10-t)x = 24$. Пусть $\varepsilon = 10^{-6}$; $m = 0$; $M = 5$. Метод ПНП приводит к следующему теоретическому и фактическому числу итераций для различных **t**:

Таблица 2

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9,9	10
$i_{теор}$	8	8	8	8	8	8	19	30	51	144	1196	
$i_{факт}$	8	8	8	8	7	8	17	28	49	110	1353	

Видно, что для $t \in [m, M]$ сходимость равномерная . Как и в случае метода простой итерации (табл.1), сходимость ухудшается при стремлении **t** к числу **a**, но метод ПНП сходится быстрее метода простой итерации. Для **t = a** сходимость отсутствует, т.к. уравнение (2) не имеет решения.

Метод ПНП (15) становится пригодным для решения операторных уравнений (1), если в нем выполнить замены $1 \leftrightarrow I$; $t \leftrightarrow T$; $x_i \leftrightarrow X_i$; $b \leftrightarrow B$ и в оценках погрешности вместо модулей ввести нормы в соответствующих пространствах.

Легко показать, что если **T** — матричный оператор и имеют место разложения (10), то метод ПНП (15) обеспечивает сходимость коэффициентов x_{ik} приближенного решения X_i, зависящую от собственных чисел t_k. Пусть числа t из таблицы 2 являются этими собственными числами, тогда таблица иллюстрирует равномерную сходимость коэффициентов, соответствующих собственным числам $t_k \in [m, M]$ и неравномерную для $t_k \notin [m, M]$. Точный смысл этим утверждениям дают теоремы 2 и 3.

Теорема 2 [1]

Пусть S(T) — спектр оператора **T** и $S(T) \in [m, M]$, $a \notin [m, M]$. Тогда приближенное решение уравнения (1) получается из итерационного процесса

$$X_0 = 4(g+h)B / [(M-m)(g-h)^2],$$

$$X_1(t) = 8(0{,}5I + Y/(g-h))\ B / [(M-m)(g-h)],$$

$$X_i(t) = 4hB/(M-m) + 2hY\ X_{i-1} - h^2 X_{i-2},\ i = 2,\ 3, \ldots, \qquad (18)$$

$$Y = (2T - (m+M)\ I)/(M-m)$$

с оценкой погрешности по норме

$$\|\varepsilon\| = \|X - X_i\| \le (M-m)|h^i|\ \|B\| / (2(a-M)(a-m)). \qquad (19)$$

Проблема практического применения теоремы 2 заключается в определении оценок границ m, M спектра оператора T.

В конкретных случаях эта проблема решается по-разному. Часто удается легко оценить одну из границ спектра. В этом случае может быть применена

Теорема 3 [1]

Пусть спектр S(T) расположен на действительной оси слева (справа) от точки **a**, и известна оценка наиболее удаленной от **a** границы спектра **m (M)**. Тогда за другую границу можно взять любую точку из интервала **(m, a)** (соответственно — **a, M**. Итерационный процесс (18) сходится с оценкой погрешности

$$\|\varepsilon_i\| \le |h^{i-1}|\left[|h| \max_{x\in S(t)} |U_{i-2}(y)|\ \|\varepsilon_0\| + \max_{x\in S(t)} |U_{i-1}(y)|\ \|\varepsilon_1\|\right]. \qquad (20)$$

где $U_i(y)$ — полиномы Чебышева второго рода.

Оценка (20) справедлива для любых начальных приближений x_0, x_1, что позволяет начать итерации с любыми хорошо угаданными приближениями. Так как в теореме 3 одна из границ [m, M] задается почти произвольно, то может нарушиться вложение $S(t) \in [m, M]$. По этой причине только для части коэффициентов X_{ik} будет обеспечена равномерная сходимость. Для коэффициентов, соответствующих собственным числам $t_k \notin [m, M]$, сходимость монотонно ухудшается с приближением чисел t_k к числу **a** (табл. 2). Поэтому скорость сходимости приближенного решения в условиях теоремы 3 определяется собственным числом, ближайшим к числу **a**, но в любом случае она лучше, чем в методе простой итерации. Если в итерационной формуле (18) выполнить предельный переход $m, M \to 0$, то она перейдет в формулу метода простой итерации, а формула погрешности (20) — в формулу погрешности метода простой итерации.

Ухудшение сходимости метода ПНП из-за неточного выбора одной из границ спектра можно исправить с помощью адаптивного варианта метода ПНП, автоматически уточняющего эту границу. Для иллюстрации рассмотрим еще раз решение простейшего уравнения (2). Пусть x_i — приближенное решение. Очевидно, что погрешность $\varepsilon_i = x - x_i$ и невязка $\delta_i = b - (a - t)x_i$ связаны соотношением

$$(a - t)\varepsilon_i = \delta_i. \tag{21}$$

Все оценки метода ПНП получены из итерационного процесса (16) для погрешности ε_i. Умножая (16) на величину (a-t) и учитывая (21), получим аналогичный итерационный процесс для невязки δ_i. Оценки такого типа вычисляемы, так как невязки δ_i определяются по известному приближенному решению x_i. Рассмотрим функцию $\psi(y)$

$$\psi_i(y) = |h|^{i-1}\left[|h|\;|U_{i-2}(y)|\;|\delta_0| + |U_{i-1}(y)|\;|\delta_1|\right]. \tag{22}$$

здесь $U_i(y)$ — многочлены Чебышева второго рода, аргумент **y** зависит от **t**. Функция $\psi(y)$ удобна для теоретического анализа, но ее практическое вычисление проще проводить иначе:

$$\psi_i(y) = h^2|B_{i-2}|\;|\delta_0| + |B_{i-1}|\;|\delta_1| \tag{23}$$

$$B_0 = 1;\; B_1 = 2yh;\; B_i = 2yh\; B_{i-1} - h^2 B_{i-2},\; i=2, 3...$$

В этих и других формулах в случае решения уравнения (1) модули погрешностей $|\delta_0|$ и $|\delta_1|$ заменяются на нормы $\|\delta_0\|$ и $\|\delta_1\|$ в соответствующих пространствах. Если при решении простейшего алгебраического уравнения (2) числа **m, M** выбраны так, что $t \notin [m, M]$, но $t \in [m, a]$ или $[a, M]$, то это можно обнаружить с помощью анализа невязки δ_i.

Теорема 4 [1]

Пусть к решению уравнения (2) применен метод ПНП. Если для некоторого **i** нарушается неравенство

$$|\delta_i| < |h|^{i-1}\left[|h|\;(i-1)\;|\delta_0| + i\;|\delta_1|\right], \tag{24}$$

тогда $t \notin [m, M]$.

В случае решения операторного уравнения (1) теорема представляет критерий для проверки условия $S(T) \notin [m, M]$ (весь или часть спектра $S(T)$ расположены вне интервала [m, M]). В неравенстве (24) надо выполнить замену $|\delta_i| \leftrightarrow \|\delta_i\|$. Пусть установлено, что $t \notin [m, M]$, тогда адаптивный вариант метода ПНП позволяет найти и изменить ближайшую к числу **a** границу интервала [m, M] так, чтобы интервал оказался как можно ближе к числу **t**. Рассматриваются две ситуации:

а) $m<M<a$, $t \in [M, a]$; б) $a<m<M$, $t \in [a, m]$, где в первом случае уточняется граница **M**, а во втором — **m**. За новую границу надо взять корень **t** уравнения

$$|\delta_i| = \psi(y). \tag{25}$$

В указанных интервалах [M, a] или [a, m] этот корень единственный.

Пусть $a = 10$, $b = 24$, $m = 0$, $M = 5$, $\varepsilon = 10^{-6}$. Теоретически необходимое число итераций во всех случаях вычислялось из равенства $\varepsilon = \psi_i(y)$, это более грубое условие, чем (19) (случай $t \in [m, M]$), поэтому теоретическое число итераций больше, чем в таблице 2. Для $t>M$ границу M можно уточнять.

Таблица 3

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9,9	10
$i_{теор}$	11	10	9	9	9	11	-	-	-	-	-	
$i_{факт}$	8	8	8	8	7	8	13	19	24	34	210	
M	5	5	5	5	5	5	6,58	7,93	8,65	9,24	9,95	

Из таблицы 3 видно, что для $t \in [0, M]$ граница M не уточняется. В этом случае не нарушается условие (24). Фактическое число итераций такое же, как в таблице 2, а теоретическое число больше, так как для его определения было использовано более грубое условие. В случае $t>M$ для некоторого i оказывается нарушенным условие (24). Новая граница M находится из уравнения (25) как единственный корень $x \in [M, a]$. Итерационный процесс продолжается с новыми границами и начальными приближениями, полученными на предыдущих итерациях к моменту нарушения условия (24). Теоретическое число итераций вычислить не удается, но их фактическое число значительно меньше, чем в методе ПНП и тем более в методе простой итерации. Точные условия применения адаптивного метода ПНП дает теорема 5. Пусть l, L — точные границы спектра оператора T.

Теорема 5 [1]

Пусть для решения уравнения (1) по методу ПНП с выбором чисел по теореме 3 выполнено i итераций, и пусть нарушено неравенство (24). Тогда а) если $l<L<a$, то существует единственное решение x уравнения (25), подчиняющееся неравенству

$$M < x \leq L < a \tag{26}$$

б) если $a < l < L$, то существует единственное решение уравнения (25), подчиняющееся неравенству

$$a < l \leq x < m \tag{27}$$

Найденный по теореме 5 корень x оказывается лучшим приближением к точной границе l (или L), чем число m (или M), что и приводит к ускорению сходимости. Итак, метод ПНП обеспечивает следующие три возможности:

- Равномерную сходимость приближенного решения, если $S(T) \in [m, M]$. Сходимость становится наилучшей, а оценка (19) не улучшаемой, если $m = l$, $M=L$ — точные границы спектра.
- Сходимость лучшую, чем в методе простой итерации, даже если информация о спектре не точна. Например, если соотношение между числами a, m, M таково, что спектр $S(T)$ входит в эллипс, проходящий через точку a и имеющий своими фокусами точки m, M действительной оси. Метод простой итерации — частный случай метода ПНП для $m=M=0$. В этом случае эллипс сходимости становится кругом сходимости $r<|a|$.
- Возможность приближаться к оптимальной скорости сходимости за счет автоматического уточнения границы спектра, ближайшей к числу a. Именно эта граница существенно влияет на сходимость всех итерационных процессов.

Метод ПНП возник и развивался как метод решения сингулярных интегральных уравнений теории упругости [4-7]. Он относится к классу итерационных процессов с чебышевским ускорением, отличаясь от них свойствами равномерной сходимости и стационарностью (независимостью итерационного процесса от параметров, связанных с номером итерации). Представление о чебышевских итерационных методах можно получить, например, по работе [7]. Наиболее близким к методу ПНП является метод улучшения сходимости итеративных процессов, разработанный В. К. Гавуриным [8]. Из-за отсутствия итерационной формы (12) полинома наилучшего приближения, чтобы сконструировать этот полином в явной форме, В. К. Гавурин использовал степени оператора Т. При этом необходимо специально вычислять коэффициенты полинома, которые зависят от максимальной используемой степени. По этой причине увеличение степени полинома на единицу приводит к полному повторному расчету. Для итерационного процесса увеличение степени эквивалентно очередной итерации и проблемы повторного счета не возникает.

Итерационные процессы, минимизирующие невязку, используют полиномы наименее уклоняющиеся от нуля. Такие процессы разработаны В. И.Лебедевым (изложение и библиография см. [9]). Эти процессы имеют одинаковый с методом ПНП знаменатель геометрической прогрессии, однако они не стационарны и при плохой сходимости дают худшую оценку (см. [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутрунов В. Н. Полином наилучшего равномерного приближения в итерационном методе решения систем линейных алгебраических уравнений// Сиб.мат. журнал. 1992. Т 33. № 1. С. 62-68.

2. Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. М., 1977. 311с.

3. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. М., 1966. 632 с.

4. Кутрунов В. Н., Мальцев Л. Е. Приближенное решение операторных уравнений с помощью полинома наилучшего приближения// Проблемы прикладной механики и строительных конструкций: Межвуз. сб. Тюмень, 1978. С. 147-159.

5. Кутрунов В. Н. Применение спектра сингулярных интегральных операторов теории упругости в итерационных процессах. М., 1988. 52 с. Деп в ВИНИТИ 25.11.88, № 8348-В88.

6. Кутрунов В. Н., Куриленко Е. Ю. Влияние коэффициента Пуассона на сходимость итерационных процессов решения сингулярных интегральных уравнений теории упругости// Исследования по механике строительных конструкций и материалов: Межвуз. темат. сб. Л., 1988. С. 76-82.

7. Кутрунов В. Н., Медведев А. М. Решение интегральных уравнений теории упругости итерационным методом ПНП. М., 1989. 13 с. Деп. В ВИНИТИ 26.07.89, № 5040-В89.

8. Гавурин В. К. Применение полиномов наилучшего приближения к улучшению сходимости итеративных процессов// Успехи мат. наук. 1950.Т.5. № 3. С. 156-160.

9. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983. 384 с.

Сергей Александрович БАРДАСОВ —
доцент кафедры статистики
и информационных технологий
Международного института финансов,
управления и бизнеса ТюмГУ,
кандидат физико-математических наук

УДК 519. 21(075. 8)

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ δ -ФУНКЦИИ ДИРАКА «ОБЫЧНОЙ» ФУНКЦИЕЙ ДЛЯ ПЕРЕХОДА ОТ ДИСКРЕТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ К НЕПРЕРЫВНОМУ

АННОТАЦИЯ. Построена функция плотности распределения дискретной случайной величины как средняя арифметическая из функций П. Дирака. Затем функция заменяется ее представлением через «обычную» функцию, которая зависит как от случайной величины, так и от параметра. Таким образом, дискретное распределение заменяется непрерывным. Подбирая величину параметра, получаем линию, аналогичную полигону распределения и плотности вероятности непрерывной случайной величины.