

этот полином в явной форме, В. К. Гавурин использовал степени оператора T . При этом необходимо специально вычислять коэффициенты полинома, которые зависят от максимальной используемой степени. По этой причине увеличение степени полинома на единицу приводит к полному повторному расчету. Для итерационного процесса увеличение степени эквивалентно очередной итерации и проблемы повторного счета не возникает.

Итерационные процессы, минимизирующие невязку, используют полиномы наименее уклоняющиеся от нуля. Такие процессы разработаны В. И. Лебедевым (изложение и библиография см. [9]). Эти процессы имеют одинаковый с методом ПНП знаменатель геометрической прогрессии, однако они не стационарны и при плохой сходимости дают худшую оценку (см. [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутрунов В. Н. Полином наилучшего равномерного приближения в итерационном методе решения систем линейных алгебраических уравнений// Сиб.мат. журнал. 1992. Т 33. № 1. С. 62-68.
2. Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. М., 1977. 311с.
3. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. М., 1966. 632 с.
4. Кутрунов В. Н., Мальцев Л. Е. Приближенное решение операторных уравнений с помощью полинома наилучшего приближения// Проблемы прикладной механики и строительных конструкций: Межвуз. сб. Тюмень, 1978. С. 147-159.
5. Кутрунов В. Н. Применение спектра сингулярных интегральных операторов теории упругости в итерационных процессах. М., 1988. 52 с. Деп в ВИНТИ 25.11.88, № 8348-В88.
6. Кутрунов В. Н., Куриленко Е. Ю. Влияние коэффициента Пуассона на сходимость итерационных процессов решения сингулярных интегральных уравнений теории упругости// Исследования по механике строительных конструкций и материалов: Межвуз. темат. сб. Л., 1988. С. 76-82.
7. Кутрунов В. Н., Медведев А. М. Решение интегральных уравнений теории упругости итерационным методом ПНП. М., 1989. 13 с. Деп. В ВИНТИ 26.07.89, № 5040-В89.
8. Гавурин В. К. Применение полиномов наилучшего приближения к улучшению сходимости итеративных процессов// Успехи мат. наук. 1950.Т.5. № 3. С. 156-160.
9. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983. 384 с.

*Сергей Александрович БАРДАСОВ —
доцент кафедры статистики
и информационных технологий
Международного института финансов,
управления и бизнеса ТюмГУ,
кандидат физико-математических наук*

УДК 519. 21(075. 8)

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ δ -ФУНКЦИИ ДИРАКА «ОБЫЧНОЙ» ФУНКЦИЕЙ ДЛЯ ПЕРЕХОДА ОТ ДИСКРЕТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ К НЕПРЕРЫВНОМУ

АННОТАЦИЯ. Построена функция плотности распределения дискретной случайной величины как средняя арифметическая из функций П. Дирака. Затем функция заменяется ее представлением через «обычную» функцию, которая зависит как от случайной величины, так и от параметра. Таким образом, дискретное распределение заменяется непрерывным. Подбирая величину параметра, получаем линию, аналогичную полигону распределения и плотности вероятности непрерывной случайной величины.

The frequency density function of discrete variate as arithmetic average of Dirac functions is constructed. Then the function is replaced with its performance through «usual» function, which depends both on variate, and parameter. Thus discrete distribution is replaced the continuous. Selecting value of parameter, we receive a line similar to polygon of distribution and frequency density function of continuous variate.

Пусть имеется n ранжированных в порядке возрастания значений x_1, x_2, \dots, x_n некоторого признака. Обычно для дискретных величин функция плотности распределения не определяется. Более того, принято считать, что данная функция существует только для непрерывных случайных величин [1]. Однако плотность распределения дискретной величины можно определить с помощью дельта-функции П. Дирака. Например, в уравнениях математической физики [2] полагают, что если в точках x_1, x_2, \dots, x_n сосредоточены массы, то плотность, создаваемая материальными точками, равна

$$\sum_{i=1}^n m_i \delta(x - x_i),$$

где $\delta(x - x_i)$ — дельта-функция. «Наивное определение» дельта-функции дают следующие равенства:

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq x_i, \\ \infty & \text{при } x = x_i, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_i) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_i) dx = f(x_i),$$

где $f(x)$ — непрерывная функция.

Дельта-функцию можно связать с функцией Хевисайда

$$\int_{-\infty}^x \delta(t - x_i) dt = \theta(x - x_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > x_i \\ 0, & \text{если } x \leq x_i \end{cases}.$$

Дельта-функцию можно представить как предел по параметру «обычной» функции, например:

$$\delta(x - x_i) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2\alpha} \left(1 + \frac{(x - x_i)^2}{\alpha^2} \right)^{-\frac{3}{2}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi_{\alpha}(x - x_i).$$

Функцию плотности распределения дискретной величины определим как

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \delta(x - x_i)}{n}. \quad (1)$$

Тогда функция вероятности дискретного распределения примет вид:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^x \delta(t - x_i) dt = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta(x - x_i). \quad (2)$$

Таким образом, получили обычную ступенчатую функцию вероятности дискретного распределения $F(x)$. Дельта-функция используется при математическом описании идеализированных ситуаций, когда физическая величина сосредоточена в точке, поэтому ее применение в (1) и (2) очевидно.

В прикладной статистике широко используется метод группировки. Структурную группировку по количественному признаку называют вариационным рядом распределения. Построение такого ряда — это замена дискретного распределения непрерывным. В данной работе рассмотрен другой метод перехода от дискретного распределения к непрерывному. С этой целью заменим плотность дискретного распределения (1) непрерывной плотностью распределения. Для этого дельта-функцию заменим каким-либо ее представлением, например функцией

$$\varphi_{\alpha}(x - x_i) = \frac{1}{2\alpha} \left(1 + \frac{(x - x_i)^2}{\alpha^2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Плотность распределения примет вид:

$$f_{\alpha}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{\alpha}(x - x_i)}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\alpha n} \left(1 + \frac{(x - x_i)^2}{\alpha^2} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (3)$$

Подбирая параметр α , получим различные графики функции, которые аналогичны полигону распределения (или гистограмме), получаемому при построении вариационных рядов, или функции плотности распределения непрерывной случайной величины. Отметим, что число групп изменяется дискретно, а α непрерывно.

Рассмотрим пример. Пусть имеются значения некоторого признака x (табл. 1).

Таблица 1

Значения признака x

1,0	2,0	2,0	2,7	2,8	3,0	3,0	3,1
3,1	3,1	3,3	3,3	3,5	3,5	3,9	4,0
4,5	4,7	4,9	5,6	6,5	6,6	7,0	7,0

Для иллюстрации взято небольшое число значений, но это не имеет принципиального значения, так как все вычисления на компьютере производятся очень быстро и при значительно большем числе значений.

Рассмотрим традиционный подход. Например, разобьем изучаемую совокупность на пять групп с равной длиной интервала. Результаты группировки приведены на рисунках 1 и 2.



Рис. 1. Гистограмма распределения признака

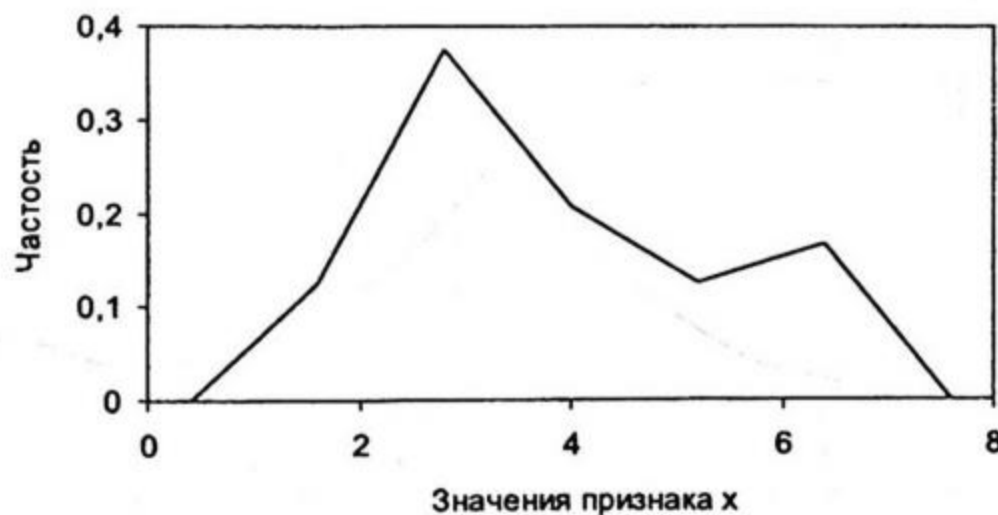
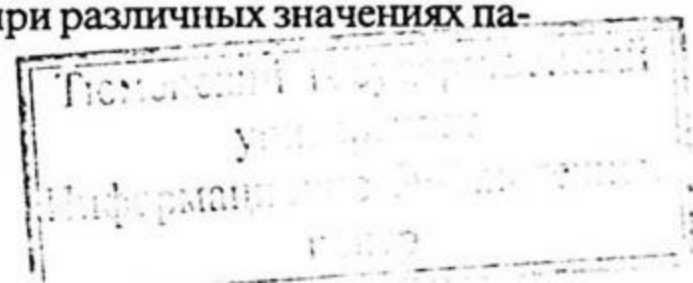


Рис. 2. Полигон распределения признака

Затем построим графики плотности распределения при различных значениях параметра α .



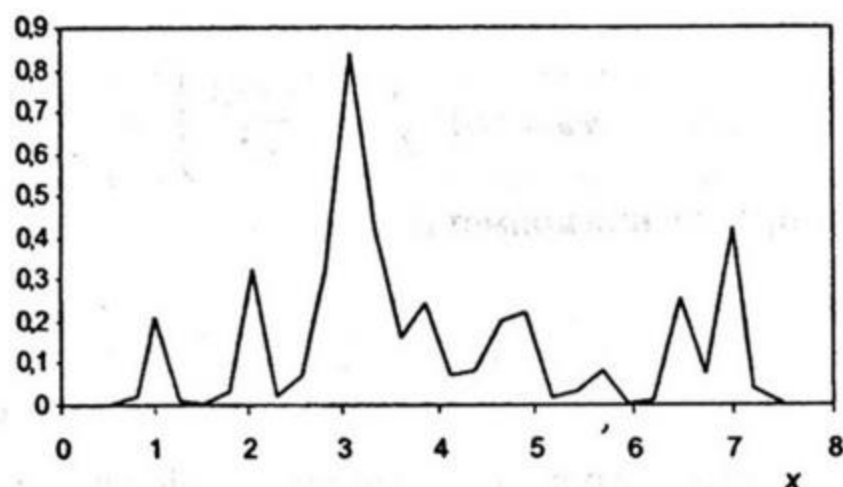


Рис. 3. График плотности распределения при $f_{\alpha}(x)$ при $\alpha = 0,1$

Из рис. 3 очевидно, что значение α мало и график плотности распределения подвержен значительным колебаниям, не произошло усреднения влияния отдельных значений признака. Из рис. 4 видно, что колебания несколько сгладились. На рис. 5 характер распределения выступает уже достаточно отчетливо, но имеются некоторые неровности. На рис. 6 и 7 характер функции плотности распределения очевиден.

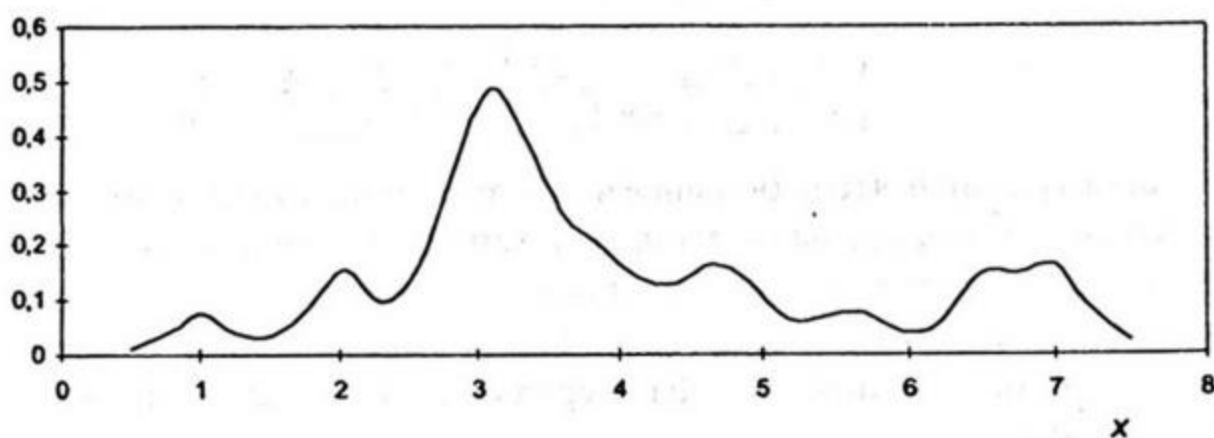


Рис. 4. График плотности распределения $f_{\alpha}(x)$ при $\alpha = 0,3$

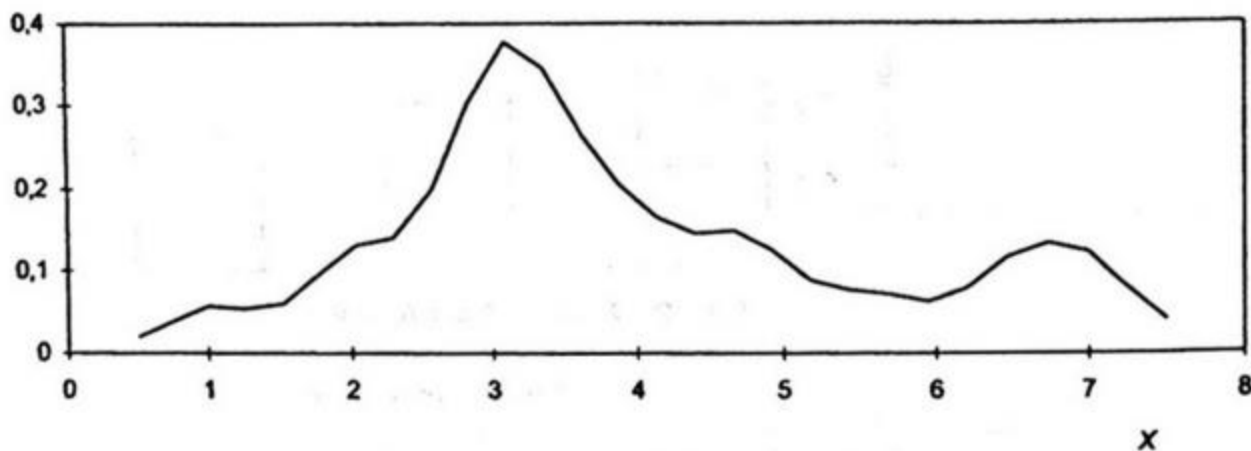


Рис. 5. График плотности распределения $f_{\alpha}(x)$ при $\alpha = 0,5$

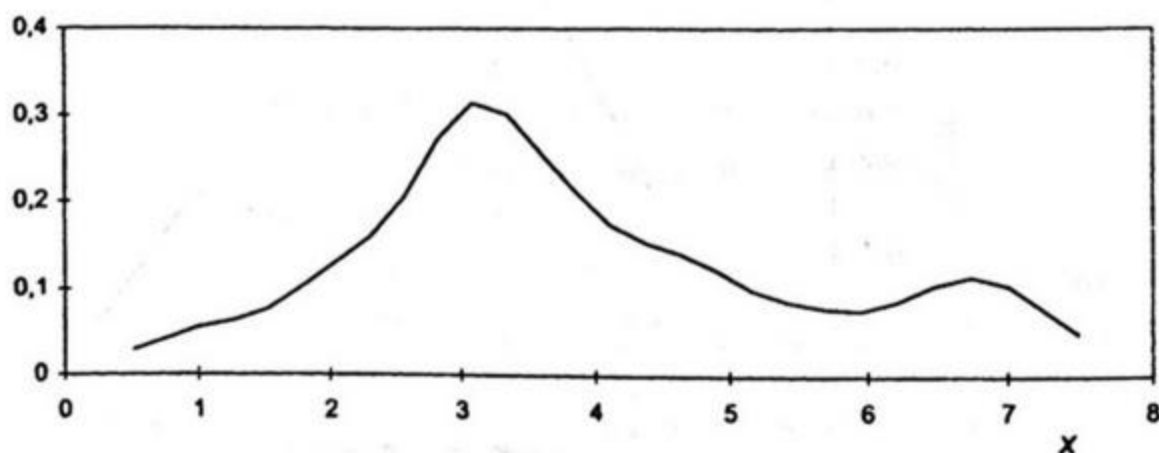


Рис. 6. График плотности распределения $f_{\alpha}(x)$ при $\alpha = 0,7$

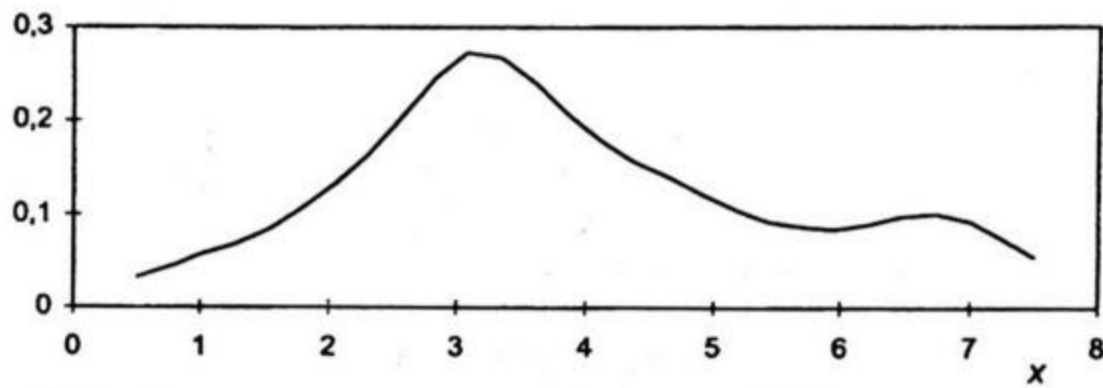


Рис. 7. График плотности распределения $f_{\alpha}(x)$ при $\alpha = 0,9$

Параметр α можно оценить, используя функцию вероятности распределения, которая при замене $\delta(x - x_i)$ на $\varphi_{\alpha}(x - x_i)$ примет вид:

$$\begin{aligned} F_{\alpha}(x) &= \int_{-\infty}^x f_{\alpha}(t) dt = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^x \varphi_{\alpha}(t - x_i) dt = \\ &= \frac{1}{2\cos\alpha} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^x \left(1 + \frac{(t - x_i)^2}{\alpha^2} \right)^{-\frac{3}{2}} dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Параметр α будем оценивать исходя из условия, чтобы выражение

$$F_{\alpha}(x) \Big|_{x_{\min}}^{x_{\max}} = \frac{1}{2\cos\alpha} \sum_{i=1}^n \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left(1 + \frac{(x - x_i)^2}{\alpha^2} \right)^{-\frac{3}{2}} dx$$

не слишком сильно отличалось от 1. То есть практически все распределение $f_{\alpha}(x)$ должно быть заключено в промежутке $[x_{\min}, x_{\max}]$, где x_{\min}, x_{\max} — минимальное и максимальное значения изучаемого признака.

Интегрируя (6), получим выражение

$$F_{\alpha}(x) \Big|_{x_{\min}}^{x_{\max}} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{(x_{\max} - x_i)}{\sqrt{\alpha^2 + (x_{\max} - x_i)^2}} + \frac{(x_i - x_{\min})}{\sqrt{\alpha^2 + (x_{\min} - x_i)^2}} \right].$$

Положим $F_{\alpha}(x) \Big|_{x_{\min}}^{x_{\max}} = 0,9$, тогда $\alpha = 0,56$. Если $F_{\alpha}(x) \Big|_{x_{\min}}^{x_{\max}} = 0,86$, то $\alpha \approx 0,93$. В диск-

ретном случае $\alpha = 0$ и $F_{\alpha}(x) \Big|_{x_{\min}}^{x_{\max}} = 1$.

Рассчитаем моду Mo и медиану Me по результатам группировки и используя распределение (3). В первом случае $Mo = 2,92$, $Me = 3,4$. В альтернативном варианте мода соответствует максимуму функции. При различных значениях α получим следующие результаты:

$$\alpha = 0,1, \quad Mo = 3,09;$$

$$\alpha = 0,3, \quad Mo = 3,10;$$

$$\alpha = 0,5, \quad Mo = 3,13;$$

$$\alpha = 0,7, \quad Mo = 3,16;$$

$$\alpha = 0,9, \quad Mo = 3,18.$$

По-видимому, Mo , рассчитанная с использованием функции $f_{\alpha}(x)$, которая учитывает все отдельные исходные данные, является более точной. С ростом α на моду усиливается влияние более удаленных от нее исходных данных, что, в соответствии с характером распределения, приводит к росту оценочных значений моды.

Для оценки медианы необходимо найти такое значение Me , при котором

$$\frac{1}{2cn} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{Me} \left(1 + \frac{(x-x_i)^2}{\alpha^2} \right)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{2}.$$

После интегрирования получим уравнение

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{(Me-x_i)}{\sqrt{\alpha^2 + (Me-x_i)^2}} \right] = 0. \quad (5)$$

При различных значениях получим следующие результаты:

$$\alpha = 0,1, \quad Me = 3,41;$$

$$\alpha = 0,3, \quad Me = 3,47;$$

$$\alpha = 0,5, \quad Me = 3,53;$$

$$\alpha = 0,7, \quad Me = 3,58;$$

$$\alpha = 0,9, \quad Me = 3,63.$$

В данном примере медиана, рассчитанная по дискретным данным, равна $Me = 3,4$. Согласно формуле (5), при уменьшении α медиана всегда будет приближаться к дискретному случаю. С ростом α медиана также растет, что связано с характером рассматриваемого распределения.

Среднее значение \bar{x} равно

$$\bar{x} = \frac{1}{2cn} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(1 + \frac{(x-x_i)^2}{\alpha^2} \right)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

т. е. всегда совпадает с дискретным случаем. Среднее значение, рассчитанное по результатам группировки, практически всегда отличается от значения, рассчитанного по исходным данным.

Рассчитаем среднее линейное отклонение

$$\begin{aligned} \bar{d} &= \frac{1}{2cn} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\bar{x}} (\bar{x}-x) \left(1 + \frac{(x-x_i)^2}{\alpha^2} \right)^{\frac{3}{2}} dx + \\ &+ \frac{1}{2cn} \sum_{i=1}^n \int_{\bar{x}}^{+\infty} (x-\bar{x}) \left(1 + \frac{(x-x_i)^2}{\alpha^2} \right)^{\frac{3}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\bar{x})^2}{\sqrt{\alpha^2 + (x_i-\bar{x})^2}} + \frac{\alpha^2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + (x_i-\bar{x})^2}}. \end{aligned}$$

При различных значениях α получим следующие результаты:

$$\alpha = 0,1, \quad \bar{d} = 1,30;$$

$$\alpha = 0,3, \quad \bar{d} = 1,36;$$

$$\alpha = 0,5, \quad \bar{d} = 1,44;$$

$$\alpha = 0,7, \quad \bar{d} = 1,54;$$

$$\alpha = 0,9, \quad \bar{d} = 1,66.$$

Для исходных дискретных данных $\bar{d} = 1,29$. С ростом α среднее линейное отклонение растет, что объясняется асимметрией распределения. При уменьшении α среднее линейное отклонение приближается к значению, рассчитанному по исходным данным.

Отметим, что для оценки дисперсии необходимо выбрать другое представление δ -функции, так как соответствующий интеграл при $\alpha \neq 0$ в интервале $(-\infty, +\infty)$ расходится, или интегрировать на отрезке $[x_{\min}, x_{\max}]$, где находятся фактические данные. Итак, чтобы избежать расходимости интеграла, дисперсию можно оценить по формуле:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\alpha n} \sum_{i=1}^n \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x-x_i)^2 \left(1 + \frac{(x-x_i)^2}{\alpha^2}\right)^{-\frac{3}{2}} dx =$$

$$= \delta^2 + \frac{\alpha^2}{2n} \sum_{i=1}^n \left(\ln \frac{x_{\max}-x_i + \sqrt{\alpha^2 + (x_{\max}-x_i)^2}}{x_{\min}-x_i + \sqrt{\alpha^2 + (x_{\min}-x_i)^2}} - \frac{x_{\max}-x_i}{\sqrt{\alpha^2 + (x_{\max}-x_i)^2}} + \frac{x_{\min}-x_i}{\sqrt{\alpha^2 + (x_{\min}-x_i)^2}} \right),$$

где δ^2 — дисперсия в дискретном случае.

По-видимому, рассмотренный в данной статье метод позволяет лучше, чем обычная в таких случаях группировка, изучить характер распределения изучаемого признака. Особенно это справедливо, когда число объектов не превышает нескольких десятков. Количество групп изменяется дискретно, это сильно сказывается на виде распределения, так как количество объектов в группах мало.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., 1998.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., 1971.

*Игорь Николаевич ГЛУХИХ —
заведующий кафедрой информационных
систем факультета математики
и компьютерных наук, доктор
технических наук, доцент*

УДК 007: 681.3.06

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ПРОБЛЕМНОГО ОБУЧЕНИЯ: КОНЦЕПЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ И МОДЕЛИ ЗНАНИЙ

АННОТАЦИЯ. Сформулировано общее назначение интеллектуальных систем проблемного обучения. Определены основные виды знаний. Предложены модели знаний для адаптивного управления.

The general-purpose of Intelligent problem-oriented tutoring systems is formulated. The main types of knowledge are determined. The knowledge models for adaptive control in such systems are offered.