

$$(\forall n)(W_n \subseteq \bar{B} \Rightarrow h(n) \in \bar{B} \cap \overline{W_n}).$$

Значит,  $B \in C$ , что противоречит выбору множества  $B$ .  $\square$

Лемма 2.3. Если  $X, Y \in PC$ , то  $X \cup Y \in R \cup C \cup S \cup PS \cup PC$ .

Доказательство.

Пусть  $A \in PC$  и  $B \in S$ . Тогда

$$X = A \oplus N, Y = N \oplus A \Rightarrow X \in PC \wedge Y \in PC \wedge X \cup Y = N \oplus N \in R;$$

$$X = (A \oplus N) \oplus B, Y = (N \oplus A) \oplus B \Rightarrow$$

$$X \in PC \wedge Y \in PC \wedge X \cup Y = (N \oplus N) \oplus B \in S;$$

$$X = ((A \oplus N) \oplus \emptyset) \oplus B, Y = ((N \oplus A) \oplus \emptyset) \oplus B \Rightarrow$$

$$X \in PC \wedge Y \in PC \wedge X \cup Y = ((N \oplus N) \oplus \emptyset) \oplus B \in PS;$$

$$X = Y = A \Rightarrow X \in PC \wedge Y \in PC \wedge X \cup Y = A \in PC.$$

Осталось показать, что объединение двух псевдокреативных множеств может быть некоторым креативным множеством  $K$ . Разобьем  $K$  по Фридбергу-Ейтсу на два  $T$ -несравнимых РПМ  $X$  и  $Y$ . Тогда  $X \cup Y = K$ , но  $X, Y \notin C$ , т. к. креативные множества среди РПМ имеют наибольшую  $T$ -степень. По лемме 2.2.  $X, Y \in PC$ .  $\square$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Post E. L. Recursively enumerable sets and their decision problems // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. V. 50. P. 284-316.
2. Успенский В. А. Несколько значений о перечислимых множествах // Z. Math. Logik und Grundl. Math. 1957. V. 3. P. 157-170.
3. Дегтев А. Н., Кладова Е. В. Об операциях над рекурсивно-перечислимыми множествами // Вестник ТГУ. 1998. № 2. С. 3—7.
4. Дегтев А. Н. Перечислимые множества и сводимости // Тюмень: Изд-во ТГУ, 1988. 94 с.

*Владимир Николаевич КУТРУНОВ —  
заведующий кафедрой математического  
моделирования математического  
факультета, доктор физико-  
математических наук, профессор,  
Михаил Владимирович ДМИТРИЕВСКИЙ —  
студент 5 курса*

УДК 512.64+519.6

### **Метод операторного полинома наилучшего равномерного приближения решения матричных уравнений**

**АННОТАЦИЯ.** В 1959 году С. Я. Альпером разработан полином наилучшего равномерного приближения функции  $1/(a-z)$  на комплексной плоскости в круге  $1 \geq |z|$ ,  $|a| > 1$ . На этой основе в статье предложен метод решения операторных уравнений, спектры операторов которых расположены на комплексной плоскости в круге произвольного радиуса с центром в произвольной точке  $z_0$ .



In 1959 S. Ya Alper worked out the polynomial of the best steady approach of function  $1/(a-z)$  on a complex flat surface in a circle. On this basis the new method of solving matrix equations is offered in the article.

В работе [1] был разработан итерационный процесс решения систем линейных алгебраических уравнений  $(aI - A)x = f$ , использующий полином наилучшего равномерного приближения функции  $1/(a-x)$  на интервале  $x \in [m, M]$ , где  $m, M$  — границы спектра оператора  $A$  на действительной оси.

В тех случаях, когда точное решение уравнения может быть разложено по собственным функциям оператора  $A$ , итерационный процесс обеспечивает сходимость приближенного решения к точному равномерно по коэффициентам этого разложения. Любой другой итерационный процесс дает неравномерную и худшую для некоторых коэффициентов скорость сходимости. Ограничением метода служило предположение о действительности спектра матричного оператора. Предполагалось, что матричный оператор симметричен.

Чтобы разработать метод, учитывающий комплексность спектра оператора  $A$ , необходим полином наилучшего равномерного приближения к функции  $1/(a-z)$  на некоторой комплексной области, содержащей спектр оператора  $A$ . Проще всего реализовать задачу в предположении, что спектр расположен на круге  $|z| \leq 1, a > 1$ .

Полином наилучшего равномерного приближения к функции  $1/(a-z), |z| \leq 1, |a| > 1$  построен в 1959 году С. Я. Альпером [2]. Он имеет вид:

$$P_n(z) = \frac{1}{a-z} - \gamma_n \frac{(1-\bar{a}z)z^n}{a-z}, \quad \gamma_n = \frac{1}{a^n(1-|a|^2)}; \quad n = 0, 1, \dots$$

Отсюда легко вычисляется погрешность аппроксимации:  $\varepsilon(z) = 1/(a-z) - P_n(z)$ . Модуль этой погрешности на окружности  $|z| = 1$  равен  $\gamma_n$ , и эта величина оказывается наименьшей по сравнению с погрешностями, доставляемыми любыми другими аппроксимирующими полиномами [2].

Неявная форма записи полинома не позволяет заменить в нем величину  $z$  на оператор  $A$  и применять его непосредственно к решению операторного уравнения. По этой причине получим его итерационную форму. Непосредственно проверяется, что полиномы  $P_n(z)$  и  $P_{n-1}(z)$  связаны соотношением:

$$P_n = \frac{1}{a} (1 + zP_{n-1}), \quad P_0 = \frac{\bar{a}}{|a|^2 - 1}; \quad |z| \leq 1, |a| > 1; \quad n = 1, 2, \dots$$

Параллельный перенос системы координат позволяет обобщить этот результат на круговую область радиуса  $M$  с центром в точке  $z_0$ . В этом случае полином наилучшего равномерного приближения для любого  $n$  получается из итерационного процесса:

$$P_0 = \frac{\bar{a} - \bar{z}_0}{|a - z_0|^2 - M^2}, \quad P_n = \frac{1}{a - z_0} [1 + (z - z_0)P_{n-1}], \quad n = 1, 2, \dots$$

$$|z - z_0| \leq M, |a - z_0| > M.$$

Форма записи С. Я. Альпера приводит к погрешности аппроксимации в виде:

$$\frac{1}{a-z} - P_n(z) = \frac{M^2 - (\bar{a} - \bar{z}_0)(z - z_0)}{(a-z)(M^2 - |a - z_0|^2)} \left( \frac{z - z_0}{a - z_0} \right)^n.$$

Анализ погрешности показывает, что полином  $P_n(z)$  сходится к функции  $1/(a-z)$  для всех  $z$ , удовлетворяющих неравенству  $(z - z_0)/(a - z_0) < 1$ , т. е. в круге радиуса  $|a - z_0|$  с центром в точке  $z_0$ . Наилучшая равномерная сходимость обеспечивается в круге  $|z - z_0| \leq M < |a - z_0|$ .

Легко проверить, что на окружности  $|z - z_0| = M$  модуль погрешности  $|1/(a-z) - P_n(z)|$  оказывается одинаковым и наименьшим среди модулей, получаемых для других полиномов  $P_n(z)$  [2].

Как видно из анализа итерационного процесса, равномерная сходимость на круге  $|z - z_0| = M$  обеспечивается исключительно выбором начального приближения, что не очевидно из неявной записи полинома наилучшего приближения в форме С. Я. Альпера. Если развернуть итерационные процессы в явной форме, то устанавливается другой неочевидный результат: полином С. Я. Альпера или полученный выше смещенный полином только последним слагаемым отличаются от отрезка ряда Тейлора функции  $1/(a-z)$  в точках  $z=0$  и  $z=z_0$  соответственно, и это последнее слагаемое обеспечивает равномерную сходимость.

Рассмотрим теперь решение матричного уравнения  $(aI - A)x = f$ . Пусть спектр оператора  $A$  расположен в круге  $|z - z_0| \leq M$  и  $|a - z_0| > M$ . Предполагаем, что уравнение имеет единственное решение, которое приближенно находится по формуле  $X_n = P_n(A)f$ , или, учитывая итерационный процесс для  $P_n(z)$ , получим:

$$X_n = \frac{1}{a - z_0} [f + (A - z_0 I)P_{n-1}f],$$

т. е. окончательно

$$X_n = \frac{1}{a - z_0} [f + (A - z_0 I)X_{n-1}], \quad n = 1, 2, \dots \text{ и } X_0 = \frac{\bar{a} - \bar{z}_0}{|a - z_0|^2 - M^2} f. \quad (1)$$

Погрешность приближенного решения можно оценить:

$$\|X - X_n\| \leq \|(aI - A)^{-1} - P_n(A)\| \|f\|$$

Так как алгебраический полином  $P_n(z)$  сходится к функции  $1/(a-z)$  на спектре оператора, то, как известно (например [3]), операторный полином  $P_n(A)$  будет сходиться к операторной функции  $(aI - A)^{-1}$ .

Если разложить обратный оператор  $(aI - A)^{-1}$  в степенной ряд по степеням  $(A - z_0 I)$ , то можно показать, что

$$(aI - A)^{-1} - P_n(A) = \left( \frac{A - z_0 I}{a - z_0} \right)^n \left[ (aI - A)^{-1} - \frac{\bar{a} - \bar{z}_0}{|a - z_0|^2 - M^2} I \right].$$



Для оценки этой разности по норме предположим, что  $A$  — простая матрица размерности  $n$  и  $\mu_1 \dots \mu_n$  — ее собственные числа, тогда у матрицы  $(aI - A)^{-1}$  имеется  $n$  различных собственных чисел  $1/(a - \mu_i)$ . Следовательно, матрица  $(aI - A)^{-1}$  — простая. Пусть  $U = \text{diag}\{(aI - A)^{-1}\}$ , тогда существует неособенная матрица  $S$ , такая, что  $(aI - A)^{-1} = SUS^{-1}$ . Так как  $SS^{-1} = I$ , то можно записать:

$$\frac{\bar{a} - \bar{z}_0}{(a - z_0)^2 - M^2} I = S \frac{\bar{a} - \bar{z}_0}{|(a - z_0)|^2 - M^2} IS^{-1}.$$

После подстановки найдем:

$$\begin{aligned} \|(aI - A)^{-1} - P_n(A)\| &\leq \left\| \frac{A - z_0 I}{a - z_0} \right\|^n \left\| S \left( U - \frac{\bar{a} - \bar{z}_0}{|(a - z_0)|^2 - M^2} I \right) S^{-1} \right\| \leq \\ &\leq \left\| \frac{A - z_0 I}{a - z_0} \right\|^n \max_{\mu_i} \left| \frac{1}{a - \mu_i} - \frac{\bar{a} - \bar{z}_0}{|(a - z_0)|^2 - M^2} \right|. \end{aligned}$$

Из оценки следует, что решение  $X_n$  сходится к точному решению, как геометрическая прогрессия с знаменателем  $\|(A - z_0 I)/(a - z_0)\|$ . Если разложить приближенное решение в ряд по собственным функциям оператора  $A$ , то поведение коэффициентов разложения в итерационном процессе различно.

Пусть некоторые собственные числа расположены на окружности  $|z - z_0| = M$  с центром в точке  $z_0$ , тогда коэффициенты разложения, соответствующие этим числам, будут сходиться к точным значениям равномерно.

Коэффициенты, соответствующие собственным числам, находящимся в круге  $|z - z_0| < M$ , сходятся к точным значениям быстрее, а на окружности  $|z - z_0| > M$  медленнее, чем соответствующие собственным числам на окружности  $|z - z_0| = M$ . Эта сходимость будет неравномерной.

Анализ полученной численной схемы приводит еще и к следующему выводу: итерационный процесс решения систем алгебраических уравнений оказывается известным методом простой итерации, но применение полинома наилучшего равномерного приближения привело к появлению в нем двух параметров:  $z_0$  — центр спектра оператора  $A$ , и  $M$  — максимальное удаление точек спектра от центра. Если удастся с некоторой точностью указать эти два параметра, то задание начального приближения по соответствующей формуле обеспечивает наиболее эффективную работу итерационного процесса. Эти утверждения проверены численно на тестовом примере. В уравнении  $(aI - A)x = f$  число  $a$  было задано равным 10, матрица  $A$  конструировалась с помощью преобразования подобия по формуле  $A = B^{-1}SB$ , где  $B$  — квадратная матрица двадцать первого порядка, заполненная случайными числами. У диагональной матрицы  $S$  на главной диагонали задавались собственные числа матрицы  $A$  по формуле  $s_{jj} = 5 + 5i + M \cdot \exp(i^*)$ , где  $i$  мнимая единица и аргумент менялся от 0 до  $2\pi$  с шагом  $\pi/10$ . Следовательно, матрица  $A$  комплексная, ее спектр располо-



жен на комплексной плоскости на окружности радиуса  $M$  с центром в точке  $z_1=5+5i$ . Проводились следующие численные эксперименты:

1. В общем случае центр спектра не известен, поэтому в итерационном процессе брали  $z_0=0$ . Число  $M$  менялось от 0 до величины, при которой возникала расходимость. Изменению этого числа соответствует изменение радиуса окружности расположения спектра. Так как для  $z_0=0$  итерационный процесс превращается в метод простой итерации, то из общих соображений легко установить начало возникновения расходимости. Итерационный процесс расходится, когда хотя бы одно число спектра окажется вне круга сходимости метода простой итерации. В данном случае круг сходимости имеет радиус  $a=10$ .

2. Так как в тестовом примере центр спектра  $z_1$  известен, то это значение использовалось для повторного счета.

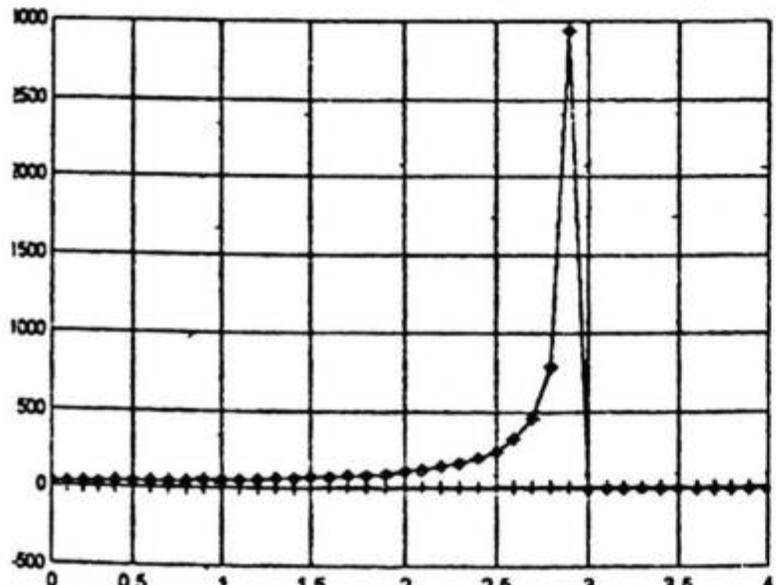


Рис. 1

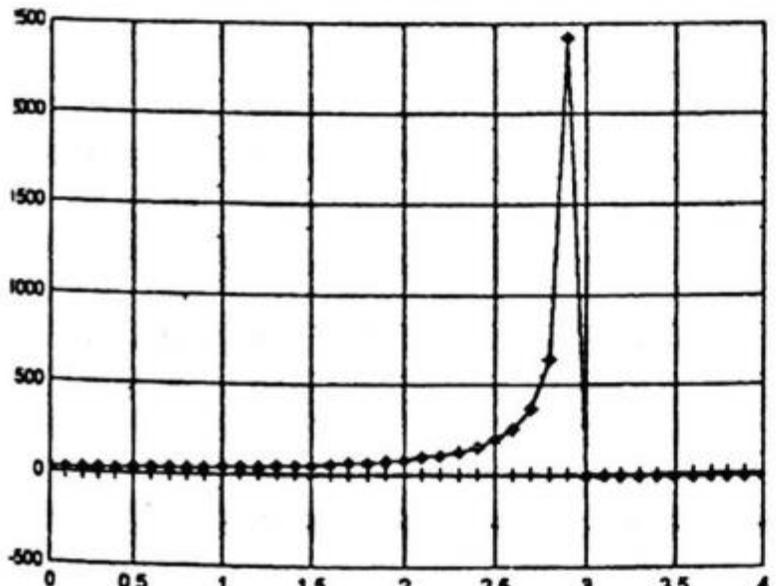


Рис. 2

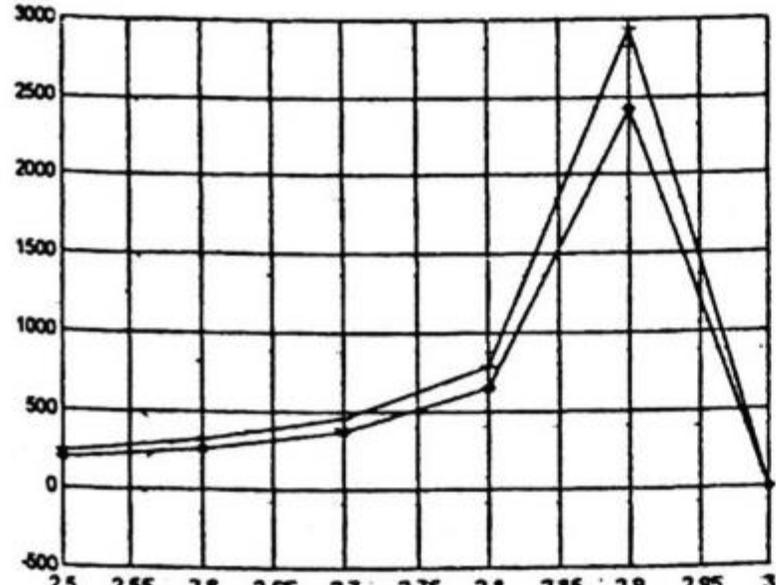


Рис. 3

На рис. 1 изображены два графика, показывающие изменение числа итераций (вертикальная ось) в зависимости от изменения радиуса окружности (горизонтальная ось), на которой располагается спектр оператора  $A$ . Верхний график соответствует итерационному процессу с параметром  $z_0=0$ , а нижний график с параметром  $z_1=5+5i$ . Как и следовало ожидать, во втором случае сходимость на несколько порядков лучше, чем в первом случае. Заметим также, что за начальное приближение выбиралась правая часть системы алгебраических уравнений.

Аналогичные эксперименты проводились для начального приближения

$$X_0 = \frac{\overline{a - z_0}}{|a - z_0|^2 - M^2} f.$$

Это начальное приближение соответствует выбору итерационного процесса, сходящегося равномерно на комплексном спектре оператора  $A$ . Рис 2 аналогичен рис. 1 и отличается выбором начального приближения. Из сравнения рис. 1 и рис. 2 видно, что выбор начального приближения, подсказанный полиномом С. Я. Альпера, оказывается существенным при плохой сходимости. В данном примере это соответствует расположению спектра на окружности радиуса, примерно равного 3. На рис. 3 изображены



два графика, соответствующие параметру  $z_0=0$  и различным начальным приближениям. Нижний график соответствует выбору начального приближения в форме  $X_0 = \frac{\overline{a-z_0}}{|a-z_0|^2 - M^2} f$ , а верхний — в виде правой части системы алгебраических уравнений. Из графиков видно, что правильный выбор начального приближения оказывается существенным при плохой сходимости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кутрунов В. Н. Полином наилучшего равномерного приближения в итерационном методе решения систем линейных алгебраических уравнений // Сибирский математический журнал. 1992. Т. 33. № 1. С. 62-68.
2. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука. 1997. 511 с.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Гостехиздат. 1953. 491 с.

*Николай Пименович ДМИТРИЕВ —  
заведующий кафедрой естественно-  
научных дисциплин филиала Тюменского  
государственного университета  
в г. Нижневартовске, кандидат  
физико-математических наук*

УДК 517,53

### **Комплекснозначные сплайны сравнения и оценки норм производных**

*АННОТАЦИЯ. С помощью специально построенных сплайнов даются двусторонние оценки промежуточных производных комплекснозначных дифференцируемых функций с ограничениями на прямой в чебышевской норме.*

*By means of specially built splines are given double-sided evaluations of intermediate derivatives differentiated functions with restrictions on a line in Tshebishev's norm.*

В теории приближения функций при вычислении оценок норм промежуточных производных или их верхних и нижних граней при ограничении на функцию и ее старшую производную часто используют так называемые функции сравнения. В качестве таких функций хорошо известны функции Фавара:

$$f_r(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x - \pi r/2)}{(2k+1)^{r+1}}$$

$$f_{l,r}(x) = \frac{1}{l^r} f_r(lx) \quad (r = 0, 1, 2, \dots). \quad (1)$$

В современной литературе функции Фавара часто называют сплайнами Эйлера.

На рисунке 1 приведены графики этих сплайнов при  $r=0, 1, 2, 3$ .