Компьютерное исследование приведенных формул показало, что:

— интервал $\tilde{W}$ последовательно сужается (т.е. повышается определенность в оценке УРТМ) при одинаково успешном выполнении заданий с примерно одинаковым уровнем субъективной трудности;

— увеличение трудности выполненного задания приводит к возрастанию доверия к УРТМ, т. е. перемещению W^{min} в сторону 1, скорость перемещения будет зависеть от того, насколько успешно выполняются задания.

С учетом сделанных наблюдений для принятия решения о достижении цели (успешном выполнении задания) в ИС ПО вместо сравнения Ро с пороговым значением было предложено следующее правило: $W^{min}_{t+1} \geq W^{min}_{t}$.

Заключение. Приведенные результаты позволяют реализовать алгоритм ситуационного управления в ИС ПО. Реализация ситуационного управления основывается на использовании аппарата гиперграфов для представления ситуаций на множестве целей модели ПО [2]. Общая идея алгоритма состоит в последовательном уточнении подмножества целей C_t на графе МПО, рекомендуемых для выбора на t-м шаге обучения. После локализации C_t выбор текущей цели $C^* \in C_t$ может быть сделан, например, по критерию максимального вклада в достижение корневой цели МПО.

ЛИТЕРАТУРА

1. Якунин В. А. Обучение как процесс управления. Л., 1988. 160 с.
2. Глухих И. Н. Методы, алгоритмы обработки и управления в экспертных системах проблемного обучения авиаспециалистов: Автореф. дис. ... канд. тех. наук. Киев, 1994. 16 с.
3. Олейник Г. М. Учебное пособие спецкурсу «Тест как инструмент измерения знаний и трудности заданий в современной технологии обучения». Донецк,1991. 66 с.
4. Шокин Ю. И. Интервальный анализ. Новосибирск, 1981.112 с.
5. Мелихов А. Н., Бернштейн Л. С., Коровин С. Я. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой. М., 1990. 271 с.

Алексей Викторович ТАТОСОВ — доцент кафедры математического моделирования, кандидат физико-математических наук;
Владимир Николаевич КУТРУНОВ — декан факультета математики и компьютерных наук, доктор физико-математических наук, профессор

УДК 621.648

РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В СЛОЖНОЙ СИСТЕМЕ МАГИСТРАЛЬНОГО ТРУБОПРОВОДА

АННОТАЦИЯ. Рассмотрена схема моделирования нестационарного движения газа в разветвленной магистральной сети, частично опирающаяся на методику расчета стационарных потоков.

The modeling scheme of nonstationary gas motion in branchy pipeline is considered.

Движение газа в магистральном трубопроводе представляет собой сложный процесс. Общепринятым упрощением в описании течения газа является квазиодномерное приближение, когда все параметры газового потока осредняются по его поперечному сечению. Такой подход используется в большинстве работ, например [1], при этом часть свойств неоднородного потока неизбежно утрачивается [2]. Квазиодномерность течения существенно нарушается в местах ветвления трубопровода и приводит к дополнительным местным потерям давления [3]. Дальнейшее существенное упрощение состоит в пренебрежении в уравнениях движения динамическим напором, содержащим квадрат скорости потока, что справедливо для достаточно протяженных труб [4]. Если параметры газа в каждом поперечном сечении трубопровода слабо зависят от времени, имеем квазистационарный режим течения. В этом случае уравнение энергии интегрируется независимо от уравнения движения и дает универсальный закон изменения температуры по длине трубы.

Для определения температурной зависимости в нестационарных процессах необходимо решать полную систему гидродинамических уравнений, и, скорее всего, пренебрежение динамическим напором здесь нежелательно. Но такой «точный» подход к расчету всей магистральной сети не может гарантировать правильность решения. Неточность связана не столько с техническими сложностями расчета, сколько с невозможностью полноценного задания закона теплообмена с окружающей средой.

Эти рассуждения заставляют отказаться от использования уравнения энергии и сознательно согласиться с некоторым приближенным способом описания движения газа. Один из таких способов состоит в задании поля температуры.

Температуру газа будем считать постоянной и равной некоторому среднему значению на каждом отдельно взятом участке трубопровода, заключенном между соседними узлами, но разной для различных участков. Таким образом, температура есть функция координат и слабо зависит от времени. Такое условие не изменит традиционную форму гидродинамической модели Чарного, в которой производная плотности газа по времени заменяется соответствующей производной от давления.

Основную роль в дальнейшем будут играть уравнения неразрывности и движения (импульса). В случае отсутствия отборов и подкачек уравнение неразрывности для трубы одного диаметра имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0. \tag{1}$$

Это уравнение связывает плотность газа с его скоростью и отражает закон сохранения массы. Второе уравнение в одномерном приближении может быть выведено из самых общих соображений. Выделим в некоторый момент времени небольшой объем газа между близко расположенными поперечными сечениями, находящимися на расстоянии Δx. Тогда уравнение движения выделенной массы газа будет иметь вид:

$$\rho \Delta V \frac{du}{dt}=-\Delta p S-f_{\tau}. \tag{2}$$

Здесь ΔV — объем газа, S — площадь поперечного сечения, Δp — перепад давления в сечениях, f_{τ} — сила трения о стенки канала. Так как давление является функцией координат и времени, то в данный момент $\Delta p=(\partial p/\partial x)\Delta x$. Сила трения газа о стенки очевидно пропорциональна площади боковой поверхности выделенного цилиндра $f_{\tau}=2\pi r\Delta x\tau$, где τ — коэффициент трения (пропорциональности). Разделив уравнение (2) на элементарный объем $\Delta V=S\Delta x=\pi r^2\Delta x$, получим

$$\rho\frac{du}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{2\tau}{r}.$$

Из последнего уравнения определим размерность τ:

$$[\tau]=[\rho u r/t]=[\rho u^2].$$

Введем безразмерный коэффициент сопротивления ζ, по формуле $\tau = \zeta\rho u^2/2$, тогда

$$\rho\frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\zeta\rho}{r}u^2. \tag{3}$$

Уравнение (3) написано для газа, движущегося в положительном направлении оси x. При его движении в обратном направлении необходимо поменять знак силы трения. Оба эти случая легко обобщаются одним уравнением заменой $u^2 \to |u|u$. Полная производная по времени du/dt в уравнении движения представляет собой ускорение выделенной и перемещающейся массы газа. Учитывая, что $u = u(x,t)$, находим

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Таким образом, уравнение движения можно записать в виде:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\zeta\rho}{r}|u|u \cdot \tag{4}$$

Левую часть равенства (4) представим в дивергентной форме, используя вновь уравнение неразрывности (1) и тождество $\partial(\rho u)/\partial t = \rho\partial u/\partial t + u\partial\rho/\partial t$. В итоге, система уравнений одномерного движения примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} - \dfrac{\zeta\rho}{r}|u|u. \end{cases} \tag{5}$$

Для расчета течения газа в магистральном трубопроводе, с учетом сказанного ранее, уравнения (5) целесообразно записать в приближении Чарного [4]. Воспользовавшись для удобства уравнением состояния газа $p = (\rho/\mu)RT$ в виде $p = c_T^2\rho$, где $c_T = \sqrt{RT/\mu}$, R — газовая постоянная, имеем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial(p/c_T^2)}{\partial t} = \frac{1}{c_T^2}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{2p}{c_T^3}\frac{\partial c_T}{\partial t} \approx \frac{1}{c_T^2}\frac{\partial p}{\partial t}.$$

Обозначая далее $q = \rho u$ и пренебрегая нелинейным слагаемым в левой части уравнения движения, получим

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c_T^2}\dfrac{\partial p}{\partial t} + \dfrac{\partial q}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial q}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} - \dfrac{\zeta c_T^2}{r}\dfrac{|q|q}{p}. \end{cases} \tag{6}$$

В этих уравнениях p, ρ, u соответственно давление, плотность и скорость газа, q — плотность потока вещества, r — радиус трубы (или гидравлический радиус сечения), c_T — изотермическая скорость звука, ζ — безразмерный коэффициент сопротивления. Если рассматривается широкий диапазон изменения параметров потока, то ζ следует считать зависящим от числа Рейнольдса.

Для удобства численного интегрирования введем безразмерные переменные:

$$\bar{p} = \frac{p}{p_0},\ \bar{x} = \frac{x}{L},\ \bar{t} = \frac{c_T t}{L},\ \bar{q} = \frac{c_T q}{p_0}, \tag{7}$$

где p_0 — атмосферное давление, L — длина отдельного участка трубопровода. В новых переменных система уравнений (7) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{t}} + \dfrac{\partial\bar{q}}{\partial\bar{x}} = 0, \\ \dfrac{\partial\bar{q}}{\partial\bar{t}} = -\dfrac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} - \bar{\lambda}\dfrac{|\bar{q}|q}{\bar{p}}. \end{cases} \tag{8}$$

В этой основной системе безразмерный коэффициент $\bar{\lambda} = \zeta L / r$ является единственным параметром подобия. В силу того, что ζ зависит от числа Рейнольдса самого потока, указанный коэффициент не может быть заранее задан точно. Правильная зависимость $\bar{\lambda}$ от координаты и времени могла бы быть определена только в процессе решения полной системы гидродинамических уравнений. Однако относительные изменения коэффициента сопротивления на каждом отдельном участке трубопровода в его рабочем режиме невелики. Это наводит на мысль рассчитать $\bar{\lambda}$ по стационарным уравнениям с условиями на границе, соответствующими данному моменту времени, и подменить его истинное значение некоторым средним значением, постоянным по всей длине участка. Отметим здесь, что при турбулентном движении несжимаемой жидкости в сильно шероховатой трубе коэффициент сопротивления вообще не зависит от числа Рейнольдса потока и является постоянным.

При стационарном течении газа уравнения (8) принимают вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{q}}{d\bar{x}} = 0, \\ \dfrac{d\bar{p}}{d\bar{x}} = -\bar{\lambda}\dfrac{|\bar{q}|\bar{q}}{\bar{p}}. \end{cases} \qquad (9)$$

Из первого уравнения следует, как и должно быть, постоянство плотности потока газа $\bar{q} = const$. Второе уравнение при сделанных предположениях также легко интегрируются и дает закон изменения давления по длине трубы :

$$\bar{p}_1^2 - \bar{p}_2^2 = 2\bar{\lambda}\bar{L}|\bar{q}|\bar{q} = 2\bar{\lambda}|\bar{q}|\bar{q}. \qquad (10)$$

На практике принято измерять давление P в атм., а коммерческий расход Q в млн.м^3/сутки при нормальных условиях. Численные значения P и $\bar{p}$ совпадают, т. к. измеряются в одних и тех же единицах. Выделим далее в уравнении (10) коммерческий расход. Для этого запишем вначале

$$q = \rho u = \rho_0 u_0 = \frac{p_0}{c_0^2}u_0 = \frac{p_0}{c_0^2 S}u_0 S = \frac{p_0}{c_0^2 S}\frac{dV}{dt} = \frac{p_0}{c_0^2 S}Q_0,$$

где индексом o отмечены значения параметров газа при нормальных условиях. В этих формулах S — площадь сечения трубы, Q_0— расход газа, измеряемый в Cu в м^3/с. Изменим должным образом масштаб измерения расхода. Имеем 1 млн. м^3 /сутки = k_0 м^3/с, $k_0 \approx 11{,}57$; тогда млн. м^3 /сутки = $k_0 Q$ м^3/с = Q_0 м^3/с. Из последнего равенства получаем $Q_0 = k_0 Q$, и, следовательно,

$$\bar{q} = \frac{k_0 c_T}{c_0 S}Q. \qquad (11)$$

Уравнение (10) теперь можно записать в виде:

$$P_1^2 - P_2^2 = \frac{2\bar{\lambda}k_0^2 c_T^2}{c_0^4 S^2}|Q|Q. \qquad (12)$$

Сравнивая (12) с хорошо известным законом падения давления

$$P_1^2 - P_2^2 = \lambda|Q|Q,$$

где λ — коэффициент сопротивления всей трубы, находим

$$\bar{\lambda} = \frac{b^2 S^2}{2}\lambda, \quad \text{где } b = \frac{c_0^2}{k_0 c_T}. \qquad (13)$$

В последнем выражении вновь появился не совсем точно определенный коэффициент b, зависящий от средней температуры:

$$b = \frac{c_0}{k_0}\frac{c_0}{c_T} = \frac{c_0}{k_0}\sqrt{\frac{T_0}{T}}. \qquad (14)$$

Напомним, что c_0 — изотермическая скорость звука в газе при нормальных условиях, связанная с обычной адиабатической скоростью при тех же условиях a_0 соотношением $c \quad a \,/\sqrt{\ }$, где γ — показатель адиабаты. С учетом обозначения (13) из (11) получаем

$$Q = bS\bar{q}. \tag{15}$$

Система уравнений (8) совместно с (13) – (15) и заданными значениями λ и c_T полностью определяет нестационарное движение газа в одной ветке магистрали. При этом λ и c_T могут быть слабо меняющимися функциями времени.

Вычисление коэффициента сопротивления всей трубы λ — задача непростая, но хорошо отработанная практиками и поэтому в данной работе не рассматривается. Особого внимания заслуживает роль параметра c_T в основных уравнениях.

Оказывается, что некоторый произвол в выборе средней температуры (или значения c_T) вовсе не сказывается на интегральных характеристиках асимптотического перехода к новому стационарному режиму. Когда $\partial/\partial t \to 0$, из (8), (13) и (15), имеем

при любом значении T (или c_T).

Тем самым, все неточности, связанные с принятыми упрощениями, фактически сведены к нулю. Некоторая ошибка может все же быть во временной зависимости решения. И эта ошибка связана не только с принятыми допущениями относительно определения температуры и коэффициента сопротивления. К ошибке того же характера приводит отбрасывание в исходной системе уравнений слагаемого с квадратом скорости газа. Аргументы, которые приводятся в пользу пренебрежения динамическим напором, как правило, исходят из рассмотрения его влияния на параметры стационарного потока газа, а не на скорость распространения волны. Очевидно также, что малые возмущения распространяются с более высокой адиабатической скоростью звука, а не с изотермической, как это следует из (6). Следовательно, точная зависимость решения от времени не может быть достигнута в рамках уравнений Чарного.

Стремление предельно приблизить расчетное поле температуры к реальному не совсем оправдано. Скорость распространения возмущений в модели Чарного порядка c_T, в то время как в реальной волне $\sim u + c$, где $\ _T \qquad \sqrt{\ }\ _T$. Таким образом, временная зависимость решения оказывается затянутой и в расчетах должна быть искусственно ускорена. Повысить динамику течения можно некоторым завышением средней температуры T. Убедимся в этом на примере распространения малых возмущений. Пренебрегая нелинейным слагаемым в системе (8) и исключая $\bar{q}$ перекрестным дифференцированием уравнений, получаем

$$\frac{\bar{p}}{\bar{t}} \qquad \frac{\bar{p}}{\bar{x}}.$$

Это волновое уравнение в безразмерных переменных. Безразмерные скорость распространения волны и длина трубы равны единице. Следовательно, время распространения возмущений $\Delta\bar{t}$ от одного конца трубы до другого также равно единице. Истинное время Δt находим из (7):

$$t \quad \frac{L}{c} \quad \bar{t} \quad \frac{L}{c_T},$$

увеличивая $c \ \sim \sqrt{T}$, уменьшаем характерное время.

Заметим, что изменение c_T в α раз во всех формулах приводит к изменению $\bar{\lambda}$ в $1/\alpha^2$ раза. Значение же $\bar{\lambda}$, при неизменных начальных и граничных условиях, определяет характер самого течения. Например, для длинных и коротких труб одного диаметра картина нестационарного течения существенно различна. Оптимальное корректирование указанных параметров может быть проведено только путем анализа экспериментальных данных. Возможен также учет качественного изменения температуры по длине трубы.

Тем не менее, принятое в работе приближение о замене истинной температуры (точнее c_T) некоторым среднем значением, постоянным по всей длине отдельного участка трубопровода, не лишено смысла. В самих исходных уравнениях Чарного (6) температура не присутствует явно, присутствует только значение «изотермической скорости звука» c_T. Для идеального газа $c_T \sim \sqrt{T}$, в случае же движения реального газа в магистрали под высоким давлением c_T следует считать функцией температуры и давления. Уравнений состояния реального газа достаточно много, и все они являются приближенными. В практике, как правило, используют обычное уравнение состояния идеального газа с поправочным коэффициентом z:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{z}{\mu} RT,$$

или

$$p = c_T^2 \rho,$$

где $c_T = \sqrt{zRT/\mu}$ уже не изотермическая скорость звука $\sqrt{(\partial p/\partial \rho)_T}$, а просто обозначение. При нормальных условиях $z \approx 1$ и газ можно считать идеальным. Повышение давления газа при неизменной температуре приводит к уменьшению z, т. е. $(\partial z/\partial p)_T < 0$. В рабочем режиме трубопровода непосредственно за компрессорной станцией газ находится в относительно сжатом и нагретом состоянии. Если проследить за его движением вниз по течению, то давление и температура уменьшаются. Увеличение температуры за компрессорной станцией приводит к увеличению c_T. Одновременно с этим повышение давления уменьшает коэффициент свехсжимаемости z и, следовательно, c_T. Таким образом, есть все основания считать значение c_T почти постоянным по длине трубопровода. Иными словами, движение реального газа в магистрали близко по форме к изотермическому течению идеального газа.

Рассмотрим численный метод решения системы уравнений (8), основанный на разностных схемах. В целях упрощения записи опустим черту над символами, считая их безразмерными. Расчет будем вести на равномерной сетке с шагами по координате и времени соответственно h и τ. Разобьем весь участок трубопровода длиной, равной единице, на n частей, при этом $h=1/n$. Аппроксимируем (8) на равномерной сетке разностной схемой типа «крест»:

$$\begin{cases} \dfrac{q_{i-1/2}^{j+1} - q_{i-1/2}^{j}}{\tau} = -\dfrac{p_i^j - p_{i-1}^j}{h} - 2\dfrac{\left|q_{i-1/2}^j\right| q_{i-1/2}^j}{p_i^j + p_{i-1}^j}, \; 1 \le i \le n, \\ \dfrac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} + \dfrac{q_{i+1/2}^{j+1} - q_{i-1/2}^{j+1}}{h} = 0, \; 1 \le i \le n-1. \end{cases} \tag{16}$$

Нижние индексы сеточной функции q, относящиеся к полуцелым значениям координатной оси, можно интерпретировать как номер участка ребра между соседними узлами сетки, в которых определенно давление p. Для удобства численного интегрирования переобозначим эти индексы $i-1/2 \to i$, $i+1/2 \to i+1$, тогда система (16) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{q_i^{j+1} - q_i^j}{\tau} = -\dfrac{p_i^j - p_{i-1}^j}{h} - \dfrac{2\left|q_i^j\right| q_i^j}{p_i^j + p_{i-1}^j}, \\ \dfrac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} + \dfrac{q_{i+1}^{j+1} - q_i^{j+1}}{h} = 0. \end{cases} \tag{17}$$

При расчете по схеме (17) из первого уравнения находим значения q_i^{j+1} для всех на $(j+1)$-м временном слое, а затем из второго уравнения — p_i^{j+1}. После этого вся процедура повторяется. При задании же граничных условий следует учесть указанную замену индексов.

Условие Куранта устойчивости разностной схемы (17) имеет вид $\tau \le h$. Однако при резком изменении граничных условий могут возникнуть осцилляции, связанные с не вполне адекватной аппроксимацией дифференциальных уравнений. Для подавления периодической неустойчивости можно ввести в уравнение движения диссипативный член $\nu \partial^2 q / \partial x^2$, который моделирует действие реальной вязкости. Его разностный аналог будет иметь вид:

$$\nu \frac{q_{i+1}^j - 2q_i^j + q_{i-1}^j}{\tau^2}. \tag{18}$$

Выражение (18) следует прибавить к правой части уравнения движения в системе (17). Влияние диссипативного члена исчезает при стабилизации расхода.

Присутствие вязкости в разностной схеме порождает более жесткие условия устойчивости. Анализ устойчивости методом гармоник без учета нелинейного члена, отвечающего за сопротивление, приводит к следующим неравенствам [5]:

$$\nu\tau < \frac{h^2}{4}, \qquad \frac{h}{2} - \sqrt{\frac{h^2}{4} - \nu\tau} < \tau < \frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} - \nu\tau}. \tag{19}$$

Например, взяв середину временного интервала, имеем $\tau = h/2$, $\nu < h/2$. Коэффициент ν должен быть, очевидно, не слишком малым, чтобы вязкость оказала влияние на устойчивость, и в то же время не должен превышать величину, за которой начинается неустойчивость разностного уравнения измененного типа.

В некоторых расчетах необходимо уменьшить число Куранта τ / h. Рассмотрим случай, когда при заданном шаге h параметры τ и ν удовлетворяют условиям $\tau << h$, $\nu \sim h$. При этом первое неравенство (19) выполняется. Во втором имеем приближенно

$$\sqrt{\frac{h^2}{4} - \nu\tau} = \frac{h}{2}\sqrt{1 - \frac{4\nu\tau}{h^2}} \approx \frac{h}{2}\left(1 - \frac{2\nu\tau}{h^2}\right)$$

и поэтому

$$\frac{\nu}{h} < 1 < \frac{h}{\tau} - \frac{\nu}{h},$$

или

$$\begin{cases} \nu < h \\ \nu < \left(\dfrac{h}{\tau} - 1\right)h. \end{cases}$$

Уже при $\tau < \frac{h}{2}$ из системы следует $\nu < h$. Кроме рассмотренной разностной схемы, существует и множество других схем [5].

Перейдем теперь к описанию движения газа в сложной магистральной сети, имеющей ветвления, отборы и подкачки, а также компрессорные станции. Для удобства будем использовать терминологию теории графов. Вершина (узел) — место ветвления трубопровода, вход и выход и т.д. Ребро — участок трубопровода между узлами. Таким образом, магистральную сеть представляем некоторым графом с вершинами и ребрами. Занумеруем все ребра и вершины, а также выберем положительные направления движения газа на каждом ребре. Если присутствует компрессорная станция, то направление тяги должно совпадать с этим направлением. На остальных ребрах выбор положительного направления произволен.

Магистральную сеть, следовательно, удобно представлять ориентированным графом. Необходимость выбора направленных ребер диктуется, главным образом, включаем в сеть компрессорных станций.

Составим матрицу полученного графа. Наиболее подходящей представляется матрица инциденций $a[i, j]$. Здесь и далее индексы i, j имеют иной смысл. Элементы матрицы инциденций ориентированного графа принимают значения 0,1,–1. Элемент равен нулю, если вершина не инцидентна (не принадлежит) ребру, +1, если ребро ориентировано от вершины, и –1 в противном случае.

Рассмотрим в качестве примера типичный элемент сети типа «вилки», $1\xrightarrow{1}4$, $2\xrightarrow{2}4$, $4\xrightarrow{3}3$, матрица которого имеет вид:

$$a=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4\\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 3 & 0 & 0 & -1 & 1\end{array}.$$

Здесь первый индекс — номер ребра (строки), второй индекс — номер вершины (столбца). Вершины 1 и 2 условно принимаем за вход магистрали, 3 — за выход. Вершина 4 является точкой ветвления трубопровода. Пусть на ребрах 1,3 вблизи узла 4 действуют компрессорные станции, создающие перепад давлений $\Delta p1$, $\Delta p2$ и ускоряющие поток в выбранном направлении. Их положение в сети зададим матрицей:

$$Cp=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \Delta p1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \Delta p2\end{pmatrix}.$$

Пусть, так же, в точке ветвления магистрали производится отбор газа ΔQ:

$$Q_{IN}=(0,0,0,\Delta Q).$$

Cp и Q_{IN} могут быть заданными функциями времени или других параметров потока в узле и его окрестности. Последний вариант подходит для моделирования местных потерь давления.

Система уравнений, описывающих стационарное течение газа, будет иметь вид:

$$\begin{cases}P_1^2-(P_4-\Delta p1)^2=\lambda_1|Q_1|Q_1,\\ P_2^2-P_4^2=\lambda_2|Q_2|Q_2,\\ (P_4+\Delta p2)^2-P_3^2=\lambda_3|Q_3|Q_3,\\ Q_1+Q_2-Q_3=\Delta Q.\end{cases} \qquad \textbf{(20)}$$

Здесь P_i — давление в i-м узле, Q_i — расход в i-м ребре, λ_i — коэффициент сопротивления i-го ребра. При заданных значениях давления или расхода на границе определяем из (20) неизвестные величины.

Расчет нестационарных течений на каждом ребре может быть выполнен последовательными итерациями по схеме (17). Пусть длина i-го ребра равна L_i, площадь сечения трубы — S_i, среднее значение c_T-c_i. В целях более эффективных вычислений следует разбить i-е ребро на определенное число частей n_i так, чтобы шаг по координате в размерной форме был примерно одинаковым для всех ребер. В этом случае при одном числе Куранта шаги по времени в размерной форме также будут близки по величине. Далее необходимо добиться согласованности в реальном времени. Зададим первоначальное число Куранта $Kr=\tau/h$, одинаковое для всех ребер. Определим шаг в реальном времени для i-го ребра. Имеем

$$\Delta t_i=\frac{L_i\tau_i}{c_i}=\frac{L_iKrh_i}{c_i}=\frac{L_iKr}{c_in_i}.$$

Чтобы не выйти за пределы устойчивости, положим в качестве общего шага в реальном времени $\Delta t=min\{\Delta t_i\}$. Теперь во всех ребрах, кроме одного, несколько уменьшим число Куранта

$$Kr_i = \frac{c_i n_i \Delta t}{L_i} = \frac{Kr\Delta t}{\Delta t_i}.$$

При найденных значениях Kr_i шаг в реальном времени будет одинаковым для всех ребер, а на расчетной сетке

$$\tau_i = Kr_i h_i = Kr_i / n_i = c_i \Delta t / L_i.$$

Обозначим через $p[i,j]$, $q[i,j]$ значение сеточных функций давления и потока газа в магитстрали. Первый индекс будет соответствовать номеру ребра, а второй — номеру сетки. Пусть $\tau[i]$ и $h[i]$ соответственно шаги по времени и координате для i-го ребра. В новых обозначениях разностные уравнения (17) примут вид:

$$\begin{cases} \dfrac{qn[i,j]-q[i,j]}{\tau[i]} = -\dfrac{p[i,j]-p[i,j-1]}{h[i]} - \dfrac{2|q|q[i,j]}{p[i,j]+p[i,j-1]}, \\ \dfrac{pn[i,j]-p[i,j]}{\tau[i]} + \dfrac{qn[i,j+1]-qn[i,j]}{h[i]} = 0. \end{cases} \qquad (21)$$

Здесь pn и qn — значения сеточных функций на новом временном слое.

Далее необходимо «сшить» решения в узлах сети. Для этой цели можно предложить следующий способ. Выделим рассматриваемый узел вместе с некоторой окрестностью. В качестве окрестности на i-м ребре возьмем элементарный участок, равный шагу h_i. Этот выделенный элемент сети, ввиду его относительно небольшого размера, рассчитаем по стационарным уравнениям. Из (9), имеем

$$pdp = -\lambda|q|q,$$

отсюда

$$\Delta p^2 = -2\lambda|q|q\Delta x,$$

или

$$p_H^2 - p_K^2 = -2\lambda|q|qh = -2\lambda|q|q/n.$$

По аналогии с системой (21) запишем

$$\begin{cases} p^2[1,n_1-1]-(p[1,n_1]-\Delta p1)^2 = 2\lambda_1|q|q[1,n_1]/n_1, \\ p^2[2,n_2-1]-p^2[2,n_2] = 2\lambda_2|q|q[2,n_2]/n_2, \\ (p[3,0]+\Delta p2)^2 - p^2[3,1] = 2\lambda_3|q|q[3,1]/n_3, \\ c_0(q[1,n_1]S_1/c_1 + q[2,n_2]S_2/c_2 - q[3,1]S_3/c_3) = \Delta Qk_0/c_0. \end{cases} \qquad (22)$$

При составлении системы уравнений (22) нужно следить за выбранными направлениями ребер, примыкающих к узлу. Этот анализ сделан визуально. В самой же вычислительной программе его необходимо выполнить «вслепую». Прежде всего определим степень $r = r[j]$ каждой вершины. Далее составим вспомогательные неполные матрицы. Выбирая узел $j=\overline{1,n}$, присваиваем по порядку дополнительный номер $k=\overline{1,r}$ всем примыкающим к нему ребрам и составляем матрицу $nb[j,k]$. Элементы этой матрицы для заданных j и k равны первоначальному номеру i соответствующего ребра и принимают значения от 1 до m. Одновременно составляем матрицы $sg[j,k]$, $mp[j,k]$, $np[j,k]$, $nq[j,k]$, элементы которых принимают соответственно следующие множества значений $\{1,-1\}$, $\{0,n_i\}$, $\{1,n_i-1\}$, $\{1,n_i\}$. Первое значение соответствует ребру, ориентированному от вершины, второе — в обратном случае.

Указанные матрицы составляются по a[i, j] согласованно так, что каждой паре [j, k] соответствуют определенные узел и инцидентное ребро. В рассмотренном выше примере получим

$$r=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\3\end{bmatrix},\ sg=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\-1&0&0\\-1&-1&1\end{bmatrix},\ nb=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\3&0&0\\1&2&3\end{bmatrix},$$

$$mp=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\n_3&0&0\\n_1&n_2&0\end{bmatrix},\ np=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\n_3-1&0&0\\n_1-1&n_2-1&1\end{bmatrix},\ nq=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\n_3&0&0\\n_1&n_2&1\end{bmatrix}.$$

Теперь систему уравнений для j - го узла произвольной сети со степенью большей единицы $r>1$, можно записать в едином виде. Отпуская, для наглядности, индексы [j, k] вспомогательных матриц, имеем

$$\begin{cases}(p[nb,mp]+sg*Cp[nb,j])^2-p^2[nb,np]=\\=2\lambda_{nb}sg*|q|q[nb,nq]/n_{nb},\ k=\overline{1,r}\\c_0\sum\limits_{k=1}^{r}sg*q[nb,nq]S_{nb}/c_{nb}=-Q_{IN}[j]k_0/c_0.\end{cases}\qquad(23)$$

Из уравнений (23) по заданным значениям p[nb, np] находим давление p[nb, mp]=P_j в j-м узле и потоки q[nb, nq] вблизи узла. Система (23) является типичной для расчета стационарных течений газа и может быть решена методом последовательных приближений.

Обозначим сокращенно величины, входящие в (23), при заданном номере узла j:

$$p[nb[j,k],mp[j,k]]=P_j=P,\ p[nb[j,k],np[j,k]]=p[k],$$
$$q[nb[j,k],nq[j,k]]=q[k],\ 2\lambda_{nb[j,k]}/n_{nb[j,k]}=\lambda[k],$$
$$sg[j,k]=sg[k],\ sg[j,k]*Cp[nb[j,k],j]=Cp[k],$$
$$c_0S_{nb[j,k]}/c_{nb[j,k]}=S[k],\ Q_{IN}[j]=Q_{IN}.$$

Тогда система (23) примет вид:

$$\begin{cases}(P+Cp[k])^2-p^2[k]=\lambda[k]sg[k]q[k]|q|,\ k=\overline{1,r}\\\sum\limits_{k=1}^{r}sg[k]q[k]S[k]=-Q_{IN}k_0/c_0.\end{cases}\qquad(24)$$

Запишем уравнения (24) применительно к «вилке» в матричном виде

$$\begin{pmatrix}(1+Cp[1]/P)^2&\lambda[1]q[1]&0&0\\(1+Cp[2]/P)^2&0&\lambda[2]q[2]&0\\(1+Cp[3]/P)^2&0&0&\lambda[3]q[3]\\0&S[1]&S[2]&S[3]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P^2\\sg[1]q[1]\\sg[2]q[2]\\sg[3]q[3]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p^2[1]\\p^2[2]\\p^2[3]\\-Q_{IN}k_0/c_0\end{pmatrix},$$

или символически $A(X)X=B$, где X — неизвестный вектор. Построив последовательные приближения по схеме

$$A(X_i)X_{i+1}=B,\ |q[k]|=\sqrt{\frac{(P+Cp[k])^2-p^2[k]}{\lambda[k]}},$$

находим решение $X_i\to X$.

Таким образом, уравнения (21) и (23) при заданных начальных и граничных условиях полностью описывают течение газа в сложной системе магистрального трубопровода. Последовательными итерациями определяются значения сеточных функций давления и расхода во всей сети в рассматриваемый промежуток времени.

Предложенный способ моделирования неустановившегося движения газа является наиболее простым и достаточно точным. Он опирается на известные методы расчета стационарных потоков. Сложный учет работы компрессорных станций, отборов и подкачек в нестационарном режиме заменен решением типичных для статики систем уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юфин В. А., Мамедов А. И., Аллахвердиев В. А. Расчет переходных процессов в сложных разветвленных системах магистральных нефтепроводов с учетом влияния ударных волн // Изв. вузов. Нефть и газ. 1986. № 11. С. 69–73.

2. Седов Л. И., Черный Г. Г. Осреднение неравномерных потоков газа в каналах// Теоретическая гидромеханика: Сб. статей / Под ред. Л. И. Седова. № 12. Вып. 4. М., 1954. С. 17–30.

3. Воеводин А. Ф., Сафин Р. И. Алгоритм численного расчета течения газа в системе труб с учетом местных сопротивлений // Числ. методы механики сплош. среды: Сб. науч. тр. Новосибирск: СО АН СССР; Ин-т теорет. и прикл. механики, 1981. Т. 12. № 1. С.20–29.

4. Чарный И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М., 1975.

5. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.,1992.

Анвар Гумерович КУТУШЕВ — профессор кафедры механики многофазных систем физического факультета, доктор физико-математических наук

УДК 532.529

ОБ ЭФФЕКТАХ СТОЛКНОВЕНИЯ И СЛИПАНИЯ ЧАСТИЦ В ПОТОКАХ ДВУХФРАКЦИОННОЙ МОНОДИСПЕРСНОЙ ГАЗОВЗВЕСИ В УДАРНОЙ ТРУБЕ

АННОТАЦИЯ. Приводится модель одномерного нестационарного движения химически-инертной столкновительной полидисперсной (двухфракционной) газовзвеси с учетом процесса слипания частиц разных размеров. Показывается, что на распространение ударных волн в газовзвесях влияние эффектов столкновения и прилипания твердых частиц пренебрежимо мало.

The particle-particle collision model of one-dimensional unsteady motion of chemically-inert polydispersed (two-fractional) gas suspension with consideration of coagulation process of particles having various sizes is presented. It is shown that the influence of collision and coagulation effects of solid particles on the propagation of shock waves in gas suspensions is neglectibly small.

Введение. В цикле работ [1-5] приводится детальное численное исследование процессов столкновения и прилипания мелких частиц на крупные капли или твердые частицы на структуру стационарных [1-3] и нестационарных [4,5] ударных волн в двухфазных и трехфазных дисперсных смесях. В отмеченных работах составляющая смеси из мелких твердых частиц и несущая газовая фаза рассматриваются как односкоростная однотемпературная двухкомпонентная сплошная среда со своими теплофизическими свойствами, именуемая в литературе, как «эффективный газ». В рамках такой