

Рис. 1а. Возмущение концентрации дисперсной фазы при $\rho_2^0 = 500 \text{ кг/м}^3$, $t = 0$

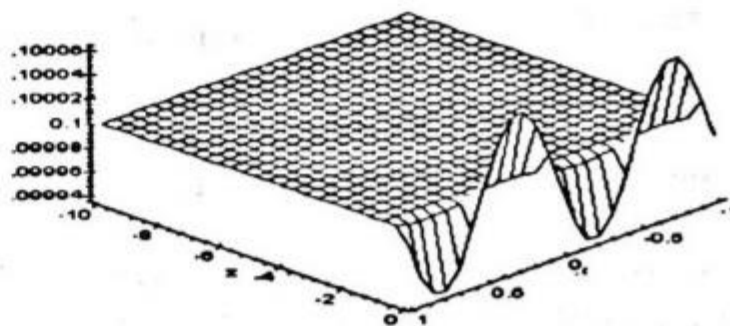


Рис. 1б. Возмущение концентрации дисперсной фазы при $\rho_2^0 = 500 \text{ кг/м}^3$, $t = 300 \text{ с}$

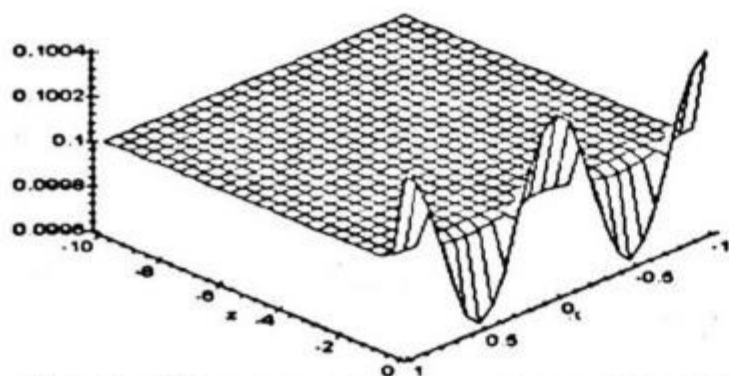


Рис. 2а. Возмущение концентрации дисперсной фазы при $\rho_2^0 = 1500 \text{ кг/м}^3$, $t = 0$

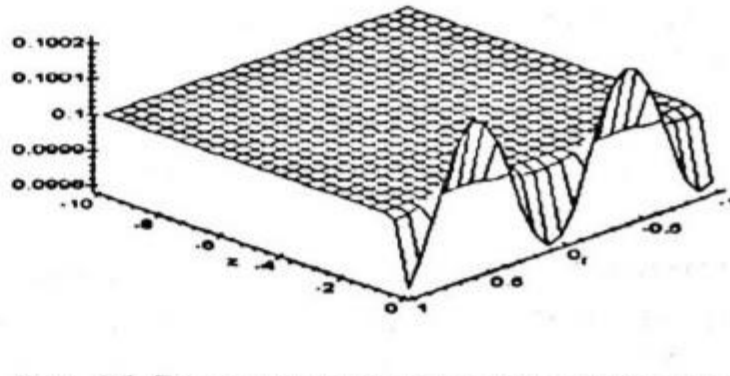


Рис. 2б. Возмущение концентрации дисперсной фазы при $\rho_2^0 = 1500 \text{ кг/м}^3$, $t = 300 \text{ с}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Баринов В. А., Бутакова Н. Н. Волны на свободной поверхности двухфазной среды. // ПМТФ. 2002. Т. 43. № 4. С. 27-35.
2. Баринов В. А., Бутакова Н. Н. Нелинейные волны на свободной поверхности дисперсной смеси // Тр. Средневолж. матем. общества. 2002. Т.3-4. № 1. С. 47-53.
3. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М., 1987. 464 с.
4. Botsh В. Hydraulische Kennwerte für Nachklärbecken: Definitionen und Vergleich mit Angaben des Arbeitsblattes АТА-АВ1// Korrespond. Abwasser. 1998. 45. № 7. С. 1289-1300.
5. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М., 1977. 816 с.
6. Найфэ Ф. Х. Методы возмущений. М., 1976. 456 с.

Василий Александрович БАРИНОВ — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования факультета математики и компьютерных наук;
Нина Николаевна БУТАКОВА — аспирантка кафедры математического моделирования факультета математики и компьютерных наук

УДК 532.59: 532.547

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА О ВОЛНАХ НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДВУХФАЗНОЙ СМЕСИ

АННОТАЦИЯ. Поставлена пространственная задача о поверхностных волнах на слое двухфазной смеси. Задача решена в нелинейной постановке с точностью до второго приближения по малому амплитудному параметру, решение получено в виде затухающих бегущих волн. Найдены фазовая скорость, частота и декремент затухания волны, определено возмущение концентрации дисперсной фазы.

The edge problem of superficial waves on a layer of a two-phase mix is put forward. The problem is solved in linear approximation, the solution revealed fading progressive waves. The authors have defined speed, frequency, decrement of attenuation of a wave and volume fraction of disperse phase.

Многофазные и, в частности, двухфазные среды широко распространены в природе и различных технологических процессах. Наличие в жидкости взвешенных частиц оказывает существенное влияние на распространение поверхностных волн [1]. Чтобы оценить это влияние, необходимо найти аналитические зависимости основных параметров волнового движения от характеристик многофазной смеси. В случае плоскопараллельного движения смеси эти зависимости были получены в работе [2], в [3] с точностью до второго приближения по малому амплитудному параметру решена нелинейная задача о плоских волнах, что позволило определить волновое возмущение концентрации дисперсной фазы. Целью настоящей работы является решение нелинейной задачи о распространении пространственных волн по свободной поверхности. Используемая в этой работе модель носит более широкий характер, чем в работах [2], [3], так как учитывает силу присоединенных масс.

1. Математическая модель. Рассматривается слой дисперсной смеси постоянной глубины, находящийся на твердом горизонтальном основании. Сверху слой граничит со средой пренебрежимо малой плотности, характеризующейся постоянным давлением P_a (в частности атмосферным). Считаем, что несущая фаза — идеальная несжимаемая жидкость, вязкость которой проявляется только на межфазной границе, дисперсная — недеформируемые частицы одного размера. Бесстолкновительное движение такой среды в отсутствие тепло- и массообмена описывается многоскоростными уравнениями сохранения массы и импульса [4]

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t^*} + \nabla(\rho_i \mathbf{v}_i^*) = 0,$$

$$\rho_i \frac{d\mathbf{v}_i^*}{dt^*} = -\alpha_i \nabla P_i + (-1)^i \alpha_1 \alpha_2 \chi^m \rho_i^0 \left(\frac{d\mathbf{v}_1^*}{dt^*} - \frac{d\mathbf{v}_2^*}{dt^*} \right) + (-1)^i \alpha_1 \alpha_2 R (\mathbf{v}_1^* - \mathbf{v}_2^*) + \rho_i \mathbf{g},$$

$$\rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \rho_i^0 = \text{const}, \quad i = 1, 2. \quad (1.1)$$

Здесь индексы $i = 1, 2$ соответственно относятся к несущей и дисперсной фазе; звездочкой (где это необходимо) обозначены размерные величины; α_i , $\mathbf{v}_i^* = (v_{ix}^*, v_{iy}^*, v_{iz}^*)$, P_i , ρ_i , ρ_i^0 — объемная концентрация, вектор скорости, давление, приведенная и истинная плотность i -й фазы; \mathbf{g} — вектор ускорения силы тяжести. Эмпирический коэффициент R характеризует силу вязкого трения Стокса, вызванную несовпадением скоростей фаз. Например, для сферических частиц радиуса a его значение принимается равным $R = 9\eta/2a^2$, где η — коэффициент динамической вязкости жидкости. Второе слагаемое в правой части уравнений движения (1.1) соответствует силе присоединенных масс, возникающей из-за ускоренного движения частиц относительно несущей фазы. Значение коэффициента χ^m определяется экспериментально. В случае идеальной несжимаемой несущей фазы $\chi^m = 1/2$ [4].

Введем декартову систему координат так, чтобы невозмущенная свободная поверхность совпадала с плоскостью $z^* = 0$, а дно — с плоскостью $z^* = -l^*$ (l^* — толщина слоя); ось z^* направлена вертикально вверх. Для того, чтобы система (1.1) описывала волновое движение смеси, необходимо ввести волновые возмущения концентрации и давления. Полагая, что в отсутствие волны среда находится в покое, из уравнений движения (1.1) при $\mathbf{v}_i^* = 0$ и условия равенства давлений на невозмущенной

свободной поверхности $z^* = 0$ находим гидростатические составляющие давлений $P_{i0} = P_a - \rho_i^0 g z^*$. Считая, что возмущения давления, вызванные распространением волны, одинаковы в обеих фазах и равны p' [2], получаем

$$P_i = P_a - \rho_i^0 g z^* + p', \quad i = 1, 2. \quad (1.2)$$

Предполагая, что в невозмущенном слое смеси дисперсная фаза распределена равномерно, объемные концентрации фаз можно представить в виде:

$$\alpha_1 = 1 - \alpha_0 - \alpha', \quad \alpha_2 = \alpha_0 + \alpha', \quad (1.3)$$

где $\alpha_0 = \text{const}$ и α' — концентрация дисперсной фазы в покоящемся слое смеси и ее волновое возмущение соответственно. Подставляя (1.2) и (1.3) в уравнения (1.1), получаем систему уравнений для описания волнового движения смеси

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \alpha'}{\partial t^*} + (1 - \alpha_0 - \alpha') \nabla \mathbf{v}_1^* - \mathbf{v}_1^* \cdot \nabla \alpha' &= 0, \\ \frac{\partial \alpha'}{\partial t^*} + (\alpha_0 + \alpha') \nabla \mathbf{v}_2^* + \mathbf{v}_2^* \cdot \nabla \alpha' &= 0, \\ \left(\rho_1^0 + \frac{1}{2} \rho_1^0 (\alpha_0 + \alpha') \right) \frac{d\mathbf{v}_1^*}{dt^*} - \frac{1}{2} \rho_1^0 (\alpha_0 + \alpha') \frac{d\mathbf{v}_2^*}{dt^*} - R(\alpha_0 + \alpha') (\mathbf{v}_2^* - \mathbf{v}_1^*) + \nabla p' &= 0, \\ \left(\rho_2^0 + \frac{1}{2} \rho_2^0 (1 - \alpha_0 - \alpha') \right) \frac{d\mathbf{v}_2^*}{dt^*} - \frac{1}{2} \rho_2^0 (1 - \alpha_0 - \alpha') \frac{d\mathbf{v}_1^*}{dt^*} + R(1 - \alpha_0 - \alpha') (\mathbf{v}_2^* - \mathbf{v}_1^*) + \nabla p' &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

На свободной поверхности среды $z^* = \xi(t^*, x^*, y^*)$ должны выполняться кинематическое и динамическое граничные условия [2], которые представляют собой условия отсутствия потока массы смеси через поверхность и непрерывности потока импульса соответственно

$$\alpha_1 \mathbf{v}_{1n}^* + \alpha_2 \mathbf{v}_{2n}^* = V_n, \quad P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = P_a,$$

где $\alpha_1 \mathbf{v}_{1n}^* + \alpha_2 \mathbf{v}_{2n}^*$ и V_n — нормальные проекции объемной скорости смеси и свободной поверхности. С учетом равенств (1.2) и (1.3) кинематическое и динамическое условия принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t^*} - (1 - \alpha_0 - \alpha') v_{1z}^* - (\alpha_0 + \alpha') v_{2z}^* + \frac{\partial \xi}{\partial x^*} [(1 - \alpha_0 - \alpha') v_{1x}^* + (\alpha_0 + \alpha') v_{2x}^*] + \frac{\partial \xi}{\partial y^*} [(1 - \alpha_0 - \alpha') v_{1y}^* + (\alpha_0 + \alpha') v_{2y}^*] &= 0, \\ p' - [\rho_1^0 (1 - \alpha_0 - \alpha') + \rho_2^0 (\alpha_0 + \alpha')] g z^* &= 0, \quad z^* = \xi(t^*, x^*, y^*), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\rho^0 = (1 - \alpha_0) \rho_1^0 + \alpha_0 \rho_2^0$ — плотность покоящейся смеси. Считая, что поток массы через твердую поверхность горизонтального основания отсутствует, на дне получаем условие непротекания для каждой фазы [4]

$$v_{in}^* = 0, \quad i = 1, 2, \quad z^* = -l^*. \quad (1.6)$$

Система уравнений (1.4) – (1.6) образует замкнутую математическую модель для определения неизвестных скоростей волнового движения фаз, возмущений давления и концентрации, а также формы свободной поверхности.

2. Краевая задача о пространственных волнах. Рассматриваем пространственное движение двухфазной среды, вызванное распространением по свободной поверхности слоя прогрессивной волны длиной λ . Фазовая скорость распространения трехмерной волны вдоль оси x^* равна c^* , эта величина также подлежит определению в процессе решения задачи. В данном случае переменная x^* может входить в решение только в комбинации $x^* - c^* t^*$. Полагаем, что длина волны много больше характерного размера дисперсных частиц ($\lambda \gg a$) и высоты волны ($\lambda \gg \xi_{\text{max}}$). Последнее условие позволяет искать решение в виде разложения по малому амплитудному параметру

$$\varepsilon = k \xi_{\text{max}},$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Предполагаем, что волна периодична по x^* и y^* и плоскость $z^* = 0$ проходит вдоль среднего уровня волновой поверхности. Это равносильно выполнению следующих условий

$$\begin{aligned} \xi(t^*, x^* + \lambda_1, y^* + \lambda_2) &= \xi(t^*, x^*, y^*), \\ \int_0^{\lambda_1} dx^* \int_0^{\lambda_2} \xi(t^*, x^*, y^*) dy^* &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где λ_1 и λ_2 — длины волны в направлении осей x^* и y^* соответственно.

Обезразмерим переменные и величины, входящие в (1.4) – (1.6), (2.1), считая, что все волновые возмущения одного порядка малости ε

$$t^* = t/kc^*, \quad x^* = x/k, \quad y^* = y/k, \quad z^* = z/k, \quad l^* = l/k, \quad \rho_i^0 = \rho^0 \mu_i,$$

$$R = \rho^0 kc_0 \gamma, \quad \alpha' = \varepsilon \alpha_0 \gamma, \quad \xi = \varepsilon \zeta/k, \quad v_i^* = \varepsilon c_0 v_i, \quad p' = \varepsilon \rho^0 c_0^2 p, \quad c^* = c_0 c, \quad (2.2)$$

где c_0 — фазовая скорость, соответствующая линейной задаче. Подставляя (2.2) в (1.4) – (1.6), (2.1), получаем следующую нелинейную краевую задачу.

В области, занятой смесью, выполняются уравнения

$$-\alpha_0 c \frac{\partial \gamma}{\partial t} + (1 - \alpha_0) \left[\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right] - \varepsilon \alpha_0 \left[v_{1x} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + v_{1y} \frac{\partial \gamma}{\partial y} + v_{1z} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right] = 0,$$

$$c \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial v_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} + \varepsilon \left[v_{2x} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + v_{2y} \frac{\partial \gamma}{\partial y} + v_{2z} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right] = 0,$$

$$\begin{aligned} & \left(\mu_1 + \frac{1}{2} \mu_1 \alpha_0 \right) c \frac{\partial v_{1s}}{\partial t} - \frac{1}{2} \mu_1 \alpha_0 c \frac{\partial v_{2s}}{\partial t} - r \alpha_0 (v_{2s} - v_{1s}) + \frac{\partial p}{\partial s} + \\ & + \varepsilon \left\{ \left(\mu_1 + \frac{1}{2} \mu_1 \alpha_0 \right) \left[v_{1x} \frac{\partial v_{1s}}{\partial x} + v_{1y} \frac{\partial v_{1s}}{\partial y} + v_{1z} \frac{\partial v_{1s}}{\partial z} \right] - r \alpha_0 \gamma (v_{2s} - v_{1s}) - \frac{1}{2} \mu_1 \alpha_0 \left[v_{2x} \frac{\partial v_{2s}}{\partial x} + v_{2y} \frac{\partial v_{2s}}{\partial y} + v_{2z} \frac{\partial v_{2s}}{\partial z} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \mu_1 \alpha_0 \gamma c \left(\frac{\partial v_{2s}}{\partial t} - \frac{\partial v_{1s}}{\partial t} \right) \right\} + \varepsilon^2 \frac{1}{2} \mu_1 \alpha_0 \gamma \left[v_{1x} \frac{\partial v_{1s}}{\partial x} + v_{1y} \frac{\partial v_{1s}}{\partial y} + v_{1z} \frac{\partial v_{1s}}{\partial z} - v_{2x} \frac{\partial v_{2s}}{\partial x} - v_{2y} \frac{\partial v_{2s}}{\partial y} - v_{2z} \frac{\partial v_{2s}}{\partial z} \right] = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\mu_2 + \frac{1}{2} \mu_1 (1 - \alpha_0) \right) c \frac{\partial v_{2s}}{\partial t} - \frac{1}{2} \mu_1 (1 - \alpha_0) c \frac{\partial v_{1s}}{\partial t} + r (1 - \alpha_0) (v_{2s} - v_{1s}) + \frac{\partial p}{\partial s} + \\ & + \varepsilon \left\{ \left(\mu_2 + \frac{1}{2} \mu_1 (1 - \alpha_0) \right) \left[v_{2x} \frac{\partial v_{2s}}{\partial x} + v_{2y} \frac{\partial v_{2s}}{\partial y} + v_{2z} \frac{\partial v_{2s}}{\partial z} \right] - r \alpha_0 \gamma (v_{2s} - v_{1s}) - \frac{1}{2} \mu_1 (1 - \alpha_0) \left[v_{1x} \frac{\partial v_{1s}}{\partial x} + v_{1y} \frac{\partial v_{1s}}{\partial y} + v_{1z} \frac{\partial v_{1s}}{\partial z} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \mu_1 \alpha_0 \gamma c \left(\frac{\partial v_{2s}}{\partial t} - \frac{\partial v_{1s}}{\partial t} \right) \right\} + \varepsilon^2 \frac{1}{2} \mu_1 \alpha_0 \gamma \left[v_{1x} \frac{\partial v_{1s}}{\partial x} + v_{1y} \frac{\partial v_{1s}}{\partial y} + v_{1z} \frac{\partial v_{1s}}{\partial z} - v_{2x} \frac{\partial v_{2s}}{\partial x} - v_{2y} \frac{\partial v_{2s}}{\partial y} - v_{2z} \frac{\partial v_{2s}}{\partial z} \right] = 0. \end{aligned}$$

$$s = x, y, z. \quad (2.3)$$

На свободной поверхности $z = \varepsilon \zeta(t, x, y)$ заданы граничные условия

$$\begin{aligned} c \frac{\partial \zeta}{\partial t} - (1 - \alpha_0) v_{1z} - \alpha_0 v_{2z} + \varepsilon \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial x} [(1 - \alpha_0) v_{1x} + \alpha_0 v_{2x}] - \alpha_0 \gamma (v_{2z} - v_{1z}) + \frac{\partial \zeta}{\partial y} [(1 - \alpha_0) v_{1y} + \alpha_0 v_{2y}] \right\} \\ + \varepsilon^2 \alpha_0 \gamma \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial x} (v_{2x} - v_{1x}) + \frac{\partial \zeta}{\partial y} (v_{2y} - v_{1y}) \right\} = 0, \end{aligned}$$

$$p - v_0^2 \zeta + \varepsilon (\mu_1 - \mu_2) v_0^2 \gamma \zeta = 0, \quad v_0^2 = g/kc_0^2. \quad (2.4)$$

На дне $z = -l$

$$v_{iz} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.5)$$

Условия (2.1) в безразмерных величинах примут вид:

$$\zeta \left(t, x + \frac{2\pi}{\kappa_1}, y + \frac{2\pi}{\kappa_2} \right) = \zeta(t, x, y), \quad \int_0^{2\pi/\kappa_1} dx \int_0^{2\pi/\kappa_2} \zeta(t, x, y) dy = 0, \quad (2.6)$$

где $\kappa_1 = k_1/k = \lambda/\lambda_1$, $\kappa_2 = k_2/k = \lambda/\lambda_2$, а волновые числа k_1 и k_2 связаны с длинами волны λ_1 и λ_2 соотношениями $k_1 = 2\pi/\lambda_1$, $k_2 = 2\pi/\lambda_2$.

Граничные условия (2.4) заданы на неизвестной поверхности $z = \varepsilon\zeta(t, x, y)$. Разложим неизвестные функции, входящие в (2.4), в ряд Тейлора в окрестности невозмущенной свободной поверхности $z = 0$, например,

$$v_{1z} = v_{1z}(t, x, y, 0) + \left. \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right|_{z=0} \varepsilon\zeta + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial z^2} \right|_{z=0} \varepsilon^2 \zeta^2 + \dots$$

Данное преобразование позволяет свести граничные условия (2.4) к условиям на фиксированной поверхности $z = 0$. Выпишем преобразованные граничные условия с точностью до ε^1 .

$$\begin{aligned} c \frac{\partial \zeta}{\partial t} - (1 - \alpha_0) v_{1z} - \alpha_0 v_{2z} + \varepsilon \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial x} [(1 - \alpha_0) v_{1x} + \alpha_0 v_{2x}] - \alpha_0 \gamma (v_{2z} - v_{1z}) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \zeta}{\partial y} [(1 - \alpha_0) v_{1y} + \alpha_0 v_{2y}] - \zeta \left[(1 - \alpha_0) \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} + \alpha_0 \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} \right] \right\} = 0, \quad z = 0, \\ p - v_0^2 \zeta + \varepsilon \zeta \left\{ (\mu_1 - \mu_2) v_0^2 \gamma + \frac{\partial p}{\partial z} \right\} = 0, \quad z = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Решение краевой задачи будем искать в виде рядов по степеням малого параметра ε

$$v_i = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_{ik}, \quad p = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_k, \quad \gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \gamma_k, \quad \zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \zeta_k, \quad c = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k c_k. \quad (2.8)$$

Подставляя ряды (2.8) в (2.3), (2.5) – (2.7) и выписывая коэффициенты при ε^0 и ε^1 , получаем системы уравнений и граничных условий для определения решения в первом и во втором приближениях соответственно. Для определения первого приближения имеем

$$\begin{aligned} -\alpha_0 \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} + (1 - \alpha_0) \left[\frac{\partial v_{1x0}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1y0}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1z0}}{\partial z} \right] = 0, \\ \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} + \frac{\partial v_{2x0}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2y0}}{\partial z} + \frac{\partial v_{2z0}}{\partial z} = 0, \\ \left(\mu_1 + \frac{1}{2} \mu_1 \alpha_0 \right) \frac{\partial v_{1s0}}{\partial t} - \frac{1}{2} \mu_1 \alpha_0 \frac{\partial v_{2s0}}{\partial t} - \gamma \alpha_0 (v_{2s0} - v_{1s0}) + \frac{\partial p_0}{\partial s} = 0, \\ \left(\mu_2 + \frac{1}{2} \mu_1 (1 - \alpha_0) \right) \frac{\partial v_{2s0}}{\partial t} - \frac{1}{2} \mu_1 (1 - \alpha_0) \frac{\partial v_{1s0}}{\partial t} + \gamma (1 - \alpha_0) (v_{2s0} - v_{1s0}) + \frac{\partial p_0}{\partial s} = 0, \end{aligned} \quad s = x, y, z. \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial t} = (1 - \alpha_0) v_{1z0} + \alpha_0 v_{2z0}, \quad z = 0,$$

$$p_0 - v_0^2 \zeta_0 = 0, \quad z = 0. \quad (2.10)$$

$$v_{iz0} = 0, \quad i = 1, 2, \quad z = -l. \quad (2.11)$$

$$\zeta_0 \left(t, x + \frac{2\pi}{\kappa_1}, y + \frac{2\pi}{\kappa_2} \right) = \zeta_0(t, x, y), \quad \int_0^{2\pi/\kappa_1} dx \int_0^{2\pi/\kappa_2} \zeta_0(t, x, y) dy = 0. \quad (2.12)$$

Во втором приближении задача имеет вид

$$-\alpha_0 \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + (1 - \alpha_0) \left[\frac{\partial v_{1x1}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1y1}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1z1}}{\partial z} \right] - \alpha_0 \left[c_1 \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} + v_{1x0} \frac{\partial \gamma_0}{\partial x} + v_{1y0} \frac{\partial \gamma_0}{\partial y} + v_{1z0} \frac{\partial \gamma_0}{\partial z} \right] = 0,$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \frac{\partial v_{2x1}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2y1}}{\partial z} + \frac{\partial v_{2z1}}{\partial z} + c_1 \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} + v_{2x0} \frac{\partial \gamma_0}{\partial x} + v_{2y0} \frac{\partial \gamma_0}{\partial y} + v_{2z0} \frac{\partial \gamma_0}{\partial z} = 0,$$

$$\left(\mu_1 + \frac{1}{2} \mu_1 \alpha_0 \right) \frac{\partial v_{1s1}}{\partial t} - \frac{1}{2} \mu_1 \alpha_0 \frac{\partial v_{2s1}}{\partial t} - r \alpha_0 (v_{2s1} - v_{1s1}) + \frac{\partial p_1}{\partial s} + c_1 \left[\left(\mu_1 + \frac{1}{2} \mu_1 \alpha_0 \right) \frac{\partial v_{1s0}}{\partial t} - \frac{1}{2} \mu_1 \alpha_0 \frac{\partial v_{2s0}}{\partial t} \right] +$$

$$+ \left(\mu_1 + \frac{1}{2} \mu_1 \alpha_0 \right) \left[v_{1x0} \frac{\partial v_{1s0}}{\partial x} + v_{1y0} \frac{\partial v_{1s0}}{\partial y} + v_{1z0} \frac{\partial v_{1s0}}{\partial z} \right] - r \alpha_0 \gamma_0 (v_{2s0} - v_{1s0}) -$$

$$- \frac{1}{2} \mu_1 \alpha_0 \left[v_{2x0} \frac{\partial v_{2s0}}{\partial x} + v_{2y0} \frac{\partial v_{2s0}}{\partial y} + v_{2z0} \frac{\partial v_{2s0}}{\partial z} \right] - \frac{1}{2} \mu_1 \alpha_0 \gamma_0 \left(\frac{\partial v_{2s0}}{\partial t} - \frac{\partial v_{1s0}}{\partial t} \right) = 0,$$

$$\left(\mu_2 + \frac{1}{2} \mu_1 (1 - \alpha_0) \right) \frac{\partial v_{2s1}}{\partial t} - \frac{1}{2} \mu_1 (1 - \alpha_0) \frac{\partial v_{1s1}}{\partial t} + r (1 - \alpha_0) (v_{2s1} - v_{1s1}) + \frac{\partial p_1}{\partial s} + c_1 \left[\left(\mu_2 + \frac{1}{2} \mu_1 (1 - \alpha_0) \right) \frac{\partial v_{2s0}}{\partial t} - \frac{1}{2} \mu_1 (1 - \alpha_0) \frac{\partial v_{1s0}}{\partial t} \right] +$$

$$+ \left(\mu_2 + \frac{1}{2} \mu_1 (1 - \alpha_0) \right) \left[v_{2x0} \frac{\partial v_{2s0}}{\partial x} + v_{2y0} \frac{\partial v_{2s0}}{\partial y} + v_{2z0} \frac{\partial v_{2s0}}{\partial z} \right] - r \alpha_0 \gamma_0 (v_{2s0} - v_{1s0}) -$$

$$- \frac{1}{2} \mu_1 (1 - \alpha_0) \left[v_{1x0} \frac{\partial v_{1s0}}{\partial x} + v_{1y0} \frac{\partial v_{1s0}}{\partial y} + v_{1z0} \frac{\partial v_{1s0}}{\partial z} \right] - \frac{1}{2} \mu_1 \alpha_0 \gamma_0 \left(\frac{\partial v_{2s0}}{\partial t} - \frac{\partial v_{1s0}}{\partial t} \right) = 0,$$

$$s = x, y, z. \quad (2.13)$$

На свободной поверхности выполняются кинематическое и динамическое граничные условия

$$\frac{d\zeta_1}{dt} - (1 - \alpha_0) v_{1z1} - \alpha_0 v_{2z1} + c_1 \frac{d\zeta_0}{dt} + \frac{d\zeta_0}{dx} [(1 - \alpha_0) v_{1x0} + \alpha_0 v_{2x0}] - \alpha_0 \gamma_0 (v_{2z0} - v_{1z0}) + \frac{d\zeta_0}{dy} [(1 - \alpha_0) v_{1y0} + \alpha_0 v_{2y0}] = 0, \quad z = 0,$$

$$p_1 - v_0^2 \zeta_1 + (\mu_1 - \mu_2) v_0^2 \gamma_0 \zeta_0 + \frac{\partial p_0}{\partial z} \zeta_0 = 0, \quad z = 0. \quad (2.14)$$

На дне заданы условия непротекания

$$v_{iz1} = 0, \quad i = 1, 2, \quad z = -l. \quad (2.15)$$

Функция $\zeta_1(t, x)$ также должна удовлетворять условиям

$$\zeta_1 \left(t, x + \frac{2\pi}{\kappa_1}, y + \frac{2\pi}{\kappa_2} \right) = \zeta_1(t, x, y), \quad \int_0^{2\pi/\kappa_1} dx \int_0^{2\pi/\kappa_2} \zeta_1(t, x, y) dy = 0. \quad (2.16)$$

3. Решение задачи в первом (линейном) приближении. Определим решение линейной задачи (2.9)–(2.12). Исключая компоненты скоростей фаз из системы (2.9), получаем два уравнения для определения возмущений давления p_0 и концентрации γ_0

$$\Delta p_0 + \frac{3\alpha_0 \mu_1}{2(1 - \alpha_0)} \frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial t^2} + \frac{\alpha_0 r}{1 - \alpha_0} \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} = 0,$$

$$\Delta p_0 - \frac{(\mu_1 + 2\mu_2)}{2} \frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial t^2} - r \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} = 0. \quad (3.1)$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем уравнение для определения возмущения концентрации дисперсной фазы γ_0

$$\frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial t^2} + \frac{2r}{(\mu_1 + 2\mu)} \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} = 0,$$

где $\mu = (1 - \alpha_0) \mu_2 + \alpha_0 \mu_1$. Общее решение этого уравнения с точностью до произвольных функций

$$\gamma_0 = \varphi_1(x, y, z) e^{-\frac{2r}{\mu_1 + 2\mu} t} + \varphi_2(x, y, z),$$

Функции $\varphi_i(x, y, z)$, $i = 1, 2$ задают начальное распределение возмущения концентрации. Полагая, что в начальный момент времени возмущений концентрации не было,

получаем $\varphi_i(x, y, z) \equiv 0$. Следовательно, уравнение для γ_0 имеет только тривиальное решение

$$\gamma_0 = 0. \quad (3.2)$$

Тогда из (3.1) для возмущения давления следует уравнение Лапласа

$$\Delta p_0 = 0. \quad (3.3)$$

Кроме уравнения (3.3), функция p_0 должна удовлетворять граничным условиям на свободной поверхности и дне. Из условий непротекания (2.11) и уравнений движения (2.9) следует условие на дне

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = 0, \quad z = -l. \quad (3.4)$$

Из уравнений движения (2.9) и граничных условий на свободной поверхности (2.10) получаем условие для p_0 при $z = 0$

$$\frac{\partial^3 p_0}{\partial t^3} + \frac{2\gamma}{\mu_1(1+2\mu_2)} \frac{\partial^2 p_0}{\partial t^2} + \frac{(\mu_1+2\mu)v_0^2}{\mu_1(1+2\mu_2)} \frac{\partial^2 p_0}{\partial t \partial z} + \frac{2\gamma v_0^2}{\mu_1(1+2\mu_2)} \frac{\partial p_0}{\partial z} = 0, \quad z = 0. \quad (3.5)$$

Из условий (2.10) и (2.12) следуют условие периодичности и интегральное условие для p_0

$$p_0\left(t, x + \frac{2\pi}{\kappa_1}, y + \frac{2\pi}{\kappa_2}, 0\right) = p_0(t, x, y, 0), \quad \int_0^{2\pi/\kappa_1} dx \int_0^{2\pi/\kappa_2} p_0(t, x, y, 0) dy = 0. \quad (3.6)$$

Таким образом, для определения функции p_0 имеем задачу (3.3) – (3.6). Решение уравнения Лапласа (3.3) находим методом разделения переменных $p_0 = X(t, x)Y(t, y)Z(t, z)$. Функции $X = X(t, x)$, $Y = Y(t, y)$, $Z = Z(t, z)$ являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений

$$X_{xx} + m_1^2 X = 0, \quad Y_{yy} + m_2^2 Y = 0, \quad Z_{zz} - m^2 Z = 0,$$

где m_1, m_2, m — постоянные разделения и $m_1^2 + m_2^2 = m^2$. Из условия на дне (3.4) следует, что $Z_z(t, -l) = 0$. Решение дифференциальных уравнений, удовлетворяющее этому условию и содержащее переменную x только в комбинации $x - t$ (прогрессивная волна), имеет вид:

$$X = C_1(t) \sin m_1(x-t) + C_2(t) \cos m_1(x-t), \quad Y = C_3(t) \sin m_2 y + C_4(t) \cos m_2 y, \quad Z = C_5(t) \operatorname{ch} m(z+l).$$

Для выполнения условия периодичности необходимо потребовать, чтобы $m_1 = \kappa_1 n$, $m_2 = \kappa_2 n$, $m = n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Условие $m_1^2 + m_2^2 = m^2$ выполнено в силу того, что $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1$. Без ограничения общности можно положить $n = 1$, тогда

$$m_1 = \kappa_1, \quad m_2 = \kappa_2, \quad m = 1.$$

Расписывая $\sin \kappa_1(x-t)$ и $\cos \kappa_1(x-t)$ и перегруппировывая сомножители, получаем $p_0 = [K_1(t) \sin \kappa_1 x + K_2(t) \cos \kappa_1 x] \sin \kappa_2 y \operatorname{ch}(z+l) + [K_3(t) \sin \kappa_1 x + K_4(t) \cos \kappa_1 x] \sin \kappa_2 y \operatorname{ch}(z+l)$, где $K_1(t) = C_3(t)C_5(t)[C_1(t) \cos \kappa_1 t + C_2(t) \sin \kappa_1 t]$, $K_2(t) = C_3(t)C_5(t)[C_2(t) \cos \kappa_1 t - C_1(t) \sin \kappa_1 t]$, $K_3(t) = C_4(t)C_5(t)[C_1(t) \cos \kappa_1 t + C_2(t) \sin \kappa_1 t]$, $K_4(t) = C_4(t)C_5(t)[C_2(t) \cos \kappa_1 t - C_1(t) \sin \kappa_1 t]$ (3.7) Подставляя (3.7) в (3.5) и приравнивая к нулю коэффициенты при синусах и косинусах, получаем четыре однородных дифференциальных уравнения третьего порядка с постоянными коэффициентами для определения неизвестных коэффициентов $K_i(t)$

$$K_i'''(t) + \frac{2\gamma}{\mu_1(1+2\mu_2)} K_i''(t) + \frac{(\mu_1+2\mu)v_0^2}{\mu_1(1+2\mu_2)} \operatorname{th} l K_i'(t) + \frac{2\gamma v_0^2}{\mu_1(1+2\mu_2)} \operatorname{th} l K_i(t) = 0, \quad i=1...4.$$

Чтобы найти функции $K_i(t)$, необходимо решить характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + \frac{2r}{\mu_1(1+2\mu_2)}\lambda^2 + \frac{(\mu_1+2\mu)v_0^2}{\mu_1(1+2\mu_2)}\text{th}l\lambda + \frac{2rv_0^2}{\mu_1(1+2\mu_2)}\text{th}l = 0. \quad (3.8)$$

Заметим, что коэффициенты данного уравнения удовлетворяют критерию устойчивости Гурвица [6]. Кубическое уравнение (3.8) будем решать при помощи формулы Кардано [7]. Обозначим

$$Q = \frac{\chi^2}{4} + \frac{\Psi^3}{27},$$

$$\Psi = \frac{3\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu)v_1^2\text{th}l - 4r_1^2}{12\mu_1^2(1+2\mu_2)^2}, \quad \chi = \frac{r_1}{54\mu_1^3(1+2\mu_2)^3} [4r_1^2 + 9\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1 - \mu + 3\mu_1\mu_2)v_1^2\text{th}l].$$

Здесь для краткости записи введены новые величины, имеющие размерность скорости

$$r_1 = c_0 r = R/\rho^0 k, \quad v_1^2 = c_0^2 v_0^2 = g/k.$$

При $Q > 0$ существует колебательное движение жидкости, так как в этом случае уравнение имеет пару комплексно-сопряженных корней. При $Q \leq 0$ колебательного движения нет. Следовательно, условием существования волнового движения является выполнение условия $Q > 0$ или

$64r_1^4 + 9\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu)^3 v_1^2 \text{th}^2 l + 4r_1^2 v_0^2 \text{th}l [27\mu_1^2(1+2\mu_2)^2 - 18\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu) - (\mu_1+2\mu)^2] > 0$. Очевидно, что достаточным, но не необходимым условием выполнения условия $Q > 0$ является справедливость неравенства $\Psi > 0$ или $4r_1^2 - 3\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu)v_1^2 \text{th}l < 0$.

Комплексно-сопряженные корни уравнения (3.8) определяются выражением

$$\lambda = -\frac{1}{c_0} \left\{ \left[-\frac{\chi}{2} + \sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \frac{\Psi^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{\chi}{2} - \sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \frac{\Psi^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} + \frac{2r_1}{3\mu_1(1+2\mu_2)} \right\} \pm$$

$$\pm i \frac{\sqrt{3}}{c_0} \left\{ \left[-\frac{\chi}{2} + \sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \frac{\Psi^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} - \left[-\frac{\chi}{2} - \sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \frac{\Psi^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} \right\}.$$

В случае распространения по свободной поверхности слоя прогрессивной волны необходимо выполнение равенства $\text{Im} \lambda = \kappa_1$ или

$$\frac{\sqrt{3}}{c_0} \left\{ \left[-\frac{\chi}{2} + \sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \frac{\Psi^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} - \left[-\frac{\chi}{2} - \sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \frac{\Psi^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} \right\} = \kappa_1. \quad (3.9)$$

Комплексно-сопряженным корням, для которых это равенство не выполнено, соответствуют стоячие волны с периодом $\tau = 2\pi/\text{Im} \lambda$ [5]. Уравнение (3.9) — это дисперсионное соотношение, из которого следует найти частоту волны $\omega = \kappa c_0$ (или фазовую скорость c_0). Из (3.9) получаем

$$c_0 = \frac{\sqrt{3}}{\kappa_1} \left\{ \left[-\frac{\chi}{2} + \sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \frac{\Psi^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} - \left[-\frac{\chi}{2} - \sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \frac{\Psi^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} \right\}. \quad (3.10)$$

Очевидно, что, вне зависимости от знака χ , $c_0 > 0$. Корни характеристического уравнения (3.8) можно записать в виде $\lambda = -b \pm i\kappa_1$, где $b = \beta/\kappa c_0$ — безразмерный декремент затухания волны. Размерный декремент β определяется выражением

$$\beta = k \left\{ \left[-\frac{\chi}{2} + \sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \frac{\psi^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{\chi}{2} - \sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \frac{\psi^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} + \frac{2\gamma_1}{3\mu_1(1+2\mu_2)} \right\} \quad (3.11)$$

и полностью совпадает с декрементом затухания плоской волны [2]. Подставляя $\lambda = -b \pm i\kappa_1$ в уравнение (3.9), получаем выражение, связывающее квадрат фазовой скорости и декремент затухания волны

$$c_o^2 = \frac{1}{\kappa_1^2} \left[\frac{\mu_1 + 2\mu}{\mu_1(1+2\mu_2)} v_1^2 \text{th} l + \frac{\beta}{k} \left(3 \frac{\beta}{k} - \frac{4\gamma_1}{\mu_1(1+2\mu_2)} \right) \right]. \quad (3.12)$$

Корням характеристического уравнения $\lambda = -b \pm i\kappa_1$ соответствуют решения дифференциальных уравнений

$$K_i(t) = e^{-bt} [K_{i1} \sin \kappa_1 t + K_{i2} \cos \kappa_1 t], \quad i = 1..4,$$

где K_{i1}, K_{i2} — произвольные постоянные. Сравнивая эти выражения с (3.7), находим

$$K_1(t) = C_1 e^{-bt} [C_4 \sin \kappa_1 t + C_3 \cos \kappa_1 t], \quad K_2(t) = C_1 e^{-bt} [-C_3 \sin \kappa_1 t + C_4 \cos \kappa_1 t],$$

$$K_3(t) = C_2 e^{-bt} [C_4 \sin \kappa_1 t + C_3 \cos \kappa_1 t], \quad K_4(t) = C_2 e^{-bt} [-C_3 \sin \kappa_1 t + C_4 \cos \kappa_1 t], \quad C_i = \text{const.}$$

Подставляя эти функции в (3.7), получаем возмущение давления

$$p_0 = e^{-bt} (C_1 \sin \kappa_2 y + C_2 \cos \kappa_2 y) [C_3 \sin \kappa_1 (x-t) + C_4 \cos \kappa_1 (x-t)] \text{ch}(z+l)$$

Число произвольных постоянных, входящих в p_0 , можно сократить до трех, переобозначив их,

$$\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \cos \epsilon_2, \quad \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = -\sin \epsilon_2, \quad \frac{C_4}{\sqrt{C_3^2 + C_4^2}} = \cos \epsilon_1, \quad \frac{C_3}{\sqrt{C_3^2 + C_4^2}} = -\sin \epsilon_1,$$

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sqrt{C_3^2 + C_4^2} = \frac{L}{\text{sh} l}.$$

Тогда

$$p_0 = L \frac{e^{-bt}}{\text{sh} l} \cos \kappa_1 (x-t+\epsilon_1) \cos \kappa_2 (y+\epsilon_2) \text{ch}(z+l). \quad (3.13)$$

Постоянные $L, \epsilon_1, \epsilon_2$ могут быть определены из начальной формы волны [5].

Из пятого и восьмого уравнений системы (2.9) находим уравнения для определения компонент скоростей несущей v_{1z0} и дисперсной v_{2z0} фаз.

$$\frac{\partial v_{1z0}}{\partial t} = -\frac{\mu_2 \alpha_0}{\mu_1(1-\alpha_0)} \frac{\partial v_{2z0}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_1(1-\alpha_0)} \frac{\partial p_0}{\partial z},$$

$$\mu_1(1+2\mu_2) \frac{\partial^2 v_{2z0}}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial v_{2z0}}{\partial t} + 3\mu_1 \frac{\partial^2 p_0}{\partial t \partial z} + 2\gamma \frac{\partial p_0}{\partial z} = 0.$$

Подставляя в эти уравнения p_0 из (3.13) и интегрируя сначала второе, а затем и первое, находим

$$v_{iz0} = L \frac{e^{-bt}}{\text{sh} l} [M_i \sin \kappa_1 (x-t+\epsilon_1) - N_i \cos \kappa_1 (x-t+\epsilon_1)] \cos \kappa_2 (y+\epsilon_2) \text{sh}(z+l), \quad i = 1,2 \quad (3.14)$$

где $M_1 = \frac{\kappa_1}{b^2 + \kappa_1^2} [1 + 2(b^2 + \kappa_1^2) \mu_1 \mu_2 (1 - \mu_1) (1 + 2\mu_2) / d]$, $M_2 = \frac{\kappa_1}{b^2 + \kappa_1^2} [1 + 2(b^2 + \kappa_1^2) \mu_1^2 (1 - \mu_2) (1 + 2\mu_2) / d]$,

$$d = (2\gamma - b\mu_1(1+2\mu_2))^2 + \kappa_1^2 \mu_1^2 (1+2\mu_2)^2, \quad N_1 = \frac{1}{b^2 + \kappa_1^2} [-b + 2(b^2 + \kappa_1^2) \mu_2 (1 - \mu_1) (2\gamma - b\mu_1(1+2\mu_2)) / d],$$

$$N_2 = \frac{1}{b^2 + \kappa_1^2} [-b + 2(b^2 + \kappa_1^2) \mu_1 (1 - \mu_2) (2\gamma - b\mu_1(1+2\mu_2)) / d].$$

Аналогично определяются и функции v_{ix0} и v_{iy0} .

$$v_{ix0} = \kappa_1 L \frac{e^{-bt}}{\text{sh}l} [N_i \sin \kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) + M_i \cos \kappa_1 (x - t + \varepsilon_1)] \cos \kappa_2 (y + \varepsilon_2) \text{ch}(z + l),$$

$$v_{iy0} = \kappa_2 L \frac{e^{-bt}}{\text{sh}l} [-M_i \sin \kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) + N_i \cos \kappa_1 (x - t + \varepsilon_1)] \sin \kappa_2 (y + \varepsilon_2) \text{ch}(z + l), \quad i = 1, 2. \quad (3.15)$$

Из динамического условия (2.10) находим форму свободной поверхности

$$\zeta_0 = L \frac{\text{cth}l}{v_0^2} e^{-bt} \cos \kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) \cos \kappa_2 (y + \varepsilon_2). \quad (3.16)$$

Таким образом, найдено решение линейной задачи в виде затухающих прогрессивных волн. В первом приближении определены возмущения концентрации (3.2) и давления (3.13), скорости волнового движения фаз (3.14), (3.15), форма свободной поверхности (3.16), а также фазовая скорость c_0 (3.10) и декремент затухания волны β (3.11).

4. Решение задачи во втором приближении. Чтобы получить решение во втором приближении, необходимо в (2.13) – (2.16) подставить решение линейной задачи. В результате получается система линейных неоднородных уравнений в частных производных и граничных условий. В силу ее громоздкости, не выписывая систему, сразу приведем решение, которое было получено так же, как и в первом приближении.

$$c_1 = 0,$$

$$\gamma_1 = \frac{L^2}{\text{sh}^2 l} e^{-2bt} \left\{ \kappa_1^4 + \kappa_2^4 \text{ch}2(z+l) + \cos 2\kappa_2 (y + \varepsilon_2) \right\} \left[S_4 \sin 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) + K_4 \cos 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) \right] +$$

$$+ L_4 \left[\text{ch}2(z+l) + (\kappa_1^4 \text{ch}2(z+l) + \kappa_2^4) \cos 2\kappa_2 (y + \varepsilon_2) \right]$$

$$p_1 = L^2 \frac{e^{-2bt}}{\text{sh}^2 l} \left\{ (U \sin 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) + W \cos 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1)) \cos 2\kappa_2 (y + \varepsilon_2) \text{ch}2(z+l) + \right.$$

$$+ (S_3 \sin 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) + K_3 \cos 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1)) \left[\cos 2\kappa_2 (y + \varepsilon_2) + \kappa_1^2 - \kappa_2^2 \text{ch}2(z+l) \right] +$$

$$+ L_3 \left[\text{ch}2(z+l) + (\kappa_1^2 \text{ch}2(z+l) - \kappa_2^2) \cos 2\kappa_2 (y + \varepsilon_2) \right] +$$

$$\left. + (Q_1 \sin 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) + Q_2 \cos 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1)) \text{ch}2\kappa_1 (z+l) + Q_3 \cos 2\kappa_2 (y + \varepsilon_2) \text{ch}2\kappa_2 (z+l) + Q_4 \right\}$$

$$v_{iz1} = L^2 \frac{e^{-2bt}}{\text{sh}^2 l} \left\{ (q_i W - h_i U) \sin 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) - (q_i U + h_i W) \cos 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) \right\} \cos 2\kappa_2 (y + \varepsilon_2) \text{sh}2(z+l) +$$

$$+ \left[L_i (\kappa_1^2 \cos 2\kappa_2 (y + \varepsilon_2) + 1) + \kappa_2^2 (S_i \sin 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) + K_i \cos 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1)) \right] \text{sh}2(z+l) +$$

$$+ \kappa_1 \left\{ (q_i Q_2 - h_i Q_1) \sin 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) - (q_i Q_1 + h_i Q_2) \cos 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) \right\} \text{sh}2\kappa_1 (z+l) + \kappa_2 G_i \cos 2\kappa_2 (y + \varepsilon_2) \text{sh}2\kappa_2 (z+l) \right\}$$

$$v_{iy1} = \kappa_2 L^2 \frac{e^{-2bt}}{\text{sh}^2 l} \left\{ (h_i U - q_i W) \sin 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) + (q_i U + h_i W) \cos 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) \right\} \text{sh}2(z+l) +$$

$$+ \left[L_i (\kappa_2^2 - \kappa_1^2 \text{ch}2(z+l)) + S_i \sin 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) + K_i \cos 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) \right] G_i \text{ch}2\kappa_2 (z+l) \left\} \sin 2\kappa_2 (y + \varepsilon_2) \right\}$$

$$v_{ix1} = \kappa_1 L^2 \frac{e^{-2bt}}{\text{sh}^2 l} \left\{ (q_i U + h_i W) \sin 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) + (q_i W - h_i U) \cos 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) \right\} \cos 2\kappa_2 (y + \varepsilon_2) \text{ch}2(z+l) +$$

$$+ \left[K_i \sin 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) - S_i \cos 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) \right] \left[(\kappa_1^2 - \kappa_2^2 \text{ch}2(z+l)) + \cos 2\kappa_2 (y + \varepsilon_2) \right] +$$

$$+ \left\{ (q_i Q_1 + h_i Q_2) \sin 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) + (q_i Q_2 - h_i Q_1) \cos 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) \right\} \text{ch}2\kappa_1 (z+l) \right\}$$

$$\zeta_1 = L^2 e^{-2bt} \left\{ (\Phi_1 + \Phi_2 \cos 2\kappa_2 (y + \varepsilon_2)) \sin 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) + \right.$$

$$\left. + (\Psi_1 + \Psi_2 \cos 2\kappa_2 (y + \varepsilon_2)) \sin 2\kappa_1 (x - t + \varepsilon_1) + F \cos 2\kappa_2 (y + \varepsilon_2) \right\}$$

Коэффициенты, входящие в решение, определяются следующими выражениями:

$$S_1 = -\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0} S_2, \quad K_1 = -\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0} K_2, \quad L_1 = -\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0} L_2, \quad L_2 = \frac{(1-\alpha_0)H_3}{8(r-b(\mu_1+2\mu))},$$

$$S_2 = \frac{(1-\alpha_0)}{8d_2} [-\kappa_1(\mu_1+2\mu)H_1 - (r-b(\mu_1+2\mu))H_2], \quad K_2 = \frac{(1-\alpha_0)}{8d_2} [(r-b(\mu_1+2\mu))H_1 - \kappa_1(\mu_1+2\mu)H_2],$$

$$L_3 = \frac{-(1-\alpha_0)(\mu_1 r - b\mu_1(1+2\mu_2))(M_1^2 + N_1^2) - \alpha_0(\mu_2 r - b\mu_1(1+2\mu_2))(M_2^2 + N_2^2)}{8(r-b(\mu_1+2\mu))},$$

$$L_4 = \frac{(1-\alpha_0)H_3}{8b(r-b(\mu_1+2\mu))},$$

$$S_3 = \frac{1}{8d_2} \left\{ \kappa_1 \alpha_0 (1-\alpha_0)(\mu_2 - \mu_1)H_1 - 2M_1 N_1 (1-\alpha_0)(\mu_1 r - b\mu_1(1+2\mu_2))(r-b(\mu_1+2\mu)) + \kappa_1^2 \mu_1 (1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu) - \right. \\ \left. - 2M_2 N_2 \alpha_0 [(\mu_2 r - b\mu_1(1+2\mu_2))(r-b(\mu_1+2\mu)) + \kappa_1^2 \mu_1 (1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu)] \right\}$$

$$K_3 = \frac{1}{8d_2} \left\{ \kappa_1 \alpha_0 (1-\alpha_0)(\mu_2 - \mu_1)H_2 + (N_1^2 - M_1^2)(1-\alpha_0)(\mu_1 r - b\mu_1(1+2\mu_2))(r-b(\mu_1+2\mu)) + \kappa_1^2 \mu_1 (1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu) + \right. \\ \left. + (N_2^2 - M_2^2)\alpha_0 [(\mu_2 r - b\mu_1(1+2\mu_2))(r-b(\mu_1+2\mu)) + \kappa_1^2 \mu_1 (1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu)] \right\}$$

$$S_4 = \frac{(1-\alpha_0)[\kappa_1(r-2b(\mu_1+2\mu))H_1 - (br + (\kappa_1^2 - b^2)(\mu_1+2\mu))H_2]}{8(b^2 + \kappa_1^2)d_2},$$

$$G_1 = \frac{r-b(\mu_1+2\mu_2)}{b(r-b(\mu_1+2\mu))} Q_3,$$

$$K_4 = \frac{(1-\alpha_0)[(br + (\kappa_1^2 - b^2)(\mu_1+2\mu))H_1 + \kappa_1(r-2b(\mu_1+2\mu))H_2]}{8(b^2 + \kappa_1^2)d_2},$$

$$G_2 = \frac{r-3b\mu_1}{b(r-b(\mu_1+2\mu))} Q_3,$$

$$Q_1 = \frac{(b^2 + \kappa_1^2)^2}{2\Delta_1} \left\{ 4S_3(\kappa_2^2 \text{ch} 2l - \kappa_1^2) \left[2\text{ch} 2\kappa_1 l (b^2 + \kappa_1^2)^2 - \delta_1 \kappa_1 v_0^2 \text{sh} 2\kappa_1 l \right] + \right. \\ \left. + \delta_2 \kappa_1 \text{sh} 2\kappa_1 l \left[4v_0^2 (\kappa_2^2 \text{ch} 2l - \kappa_1^2) K_3 - (\kappa_2^2 \text{sh}^2 l - \kappa_1^2) \text{cth} l \right] \right\}$$

$$Q_2 = \frac{(b^2 + \kappa_1^2)^2}{2v_0^2 \Delta_1} \left\{ -4v_0^4 \delta_2 \kappa_1 \text{sh} 2\kappa_1 l S_3 (\kappa_2^2 \text{ch} 2l - \kappa_1^2) + \right. \\ \left. + \left(2\text{ch} 2\kappa_1 l (b^2 + \kappa_1^2)^2 - \delta_1 \kappa_1 v_0^2 \text{sh} 2\kappa_1 l \right) \left[4v_0^2 (\kappa_2^2 \text{ch} 2l - \kappa_1^2) K_3 - (\kappa_2^2 \text{sh}^2 l - \kappa_1^2) \text{cth} l \right] \right\},$$

$$Q_3 = \frac{b^2(r-b\mu_1(1+2\mu_2)) \left[4v_0^2 (\kappa_2^2 - \kappa_1^2 \text{ch} 2l) L_3 + (\kappa_2^2 - \kappa_1^2 \text{sh}^2 l) \text{cth} l \right]}{2v_0^2 \left[2b^2(r-b\mu_1(1+2\mu_2)) \text{ch} 2\kappa_2 l + \kappa_2 v_0^2 (r-b(\mu_1+2\mu)) \text{sh} 2\kappa_2 l \right]},$$

$$Q_4 = -\frac{\text{sh} 2l}{8v_0^2} - L_3 \text{ch} 2l,$$

$$U = \frac{(b^2 + \kappa_1^2)^2}{2\Delta_2} \left\{ \delta_2 \operatorname{sh} 2l \left[\operatorname{cth} l - 4v_0^2 K_3 \right] - 4S_3 \left(2(b^2 + \kappa_1^2)^2 \operatorname{ch} 2l - \delta_1 v_0^2 \operatorname{sh} 2l \right) \right\},$$

$$W = \frac{(b^2 + \kappa_1^2)^2}{2v_0^2 \Delta_2} \left\{ \left(2(b^2 + \kappa_1^2)^2 \operatorname{ch} 2l - \delta_1 v_0^2 \operatorname{sh} 2l \right) \left[\operatorname{cth} l - 4v_0^2 K_3 \right] + 4\delta_2 v_0^4 \operatorname{sh} 2l / S_3 \right\},$$

$$\Phi_1 = \frac{\kappa_1 \operatorname{sh} 2\kappa_1 l \left[\delta_1 Q_1 + \delta_2 Q_2 \right] \operatorname{cth} l}{\operatorname{sh} 2l (b^2 + \kappa_1^2)^2}, \quad \Phi_2 = \frac{[\delta_1 U + \delta_2 W] \operatorname{cth} l}{(b^2 + \kappa_1^2)^2},$$

$$\Psi_1 = \frac{\kappa_1 \operatorname{sh} 2\kappa_1 l \left[\delta_1 Q_2 - \delta_2 Q_1 \right] \operatorname{cth} l}{\operatorname{sh} 2l (b^2 + \kappa_1^2)^2} + \frac{\kappa_1^2 \operatorname{cth}^3 l}{4v_0^4},$$

$$\Psi_2 = \frac{[\delta_1 W - \delta_2 U] \operatorname{cth} l}{(b^2 + \kappa_1^2)^2} + \frac{\operatorname{cth}^3 l}{4v_0^4}, \quad F = \frac{\kappa_2^2 \operatorname{cth}^3 l}{4v_0^4} - \frac{\kappa_2 \operatorname{sh} 2\kappa_2 l}{\operatorname{sh} 2l} \frac{(r - b(\mu_1 + 2\mu)) \operatorname{cth} l}{b^2 (r - b\mu_1 (1 + 2\mu_2))} Q_3,$$

$$q_1 = \frac{\kappa_1}{b^2 + \kappa_1^2} \left[1 + 2(b^2 + \kappa_1^2) \mu_1 \mu_2 (1 - \mu_1) (1 + 2\mu_2) / d_1 \right],$$

$$q_2 = \frac{\kappa_1}{b^2 + \kappa_1^2} \left[1 + 2(b^2 + \kappa_1^2) \mu_1^2 (1 - \mu_2) (1 + 2\mu_2) / d_1 \right],$$

$$h_1 = \frac{1}{b^2 + \kappa_1^2} \left[-b + 2(b^2 + \kappa_1^2) \mu_2 (1 - \mu_1) (r - b\mu_1 (1 + 2\mu_2)) / d_1 \right],$$

$$d_1 = (r - b\mu_1 (1 + 2\mu_2))^2 + \kappa_1^2 \mu_1^2 (1 + 2\mu_2)^2,$$

$$h_2 = \frac{1}{b^2 + \kappa_1^2} \left[-b + 2(b^2 + \kappa_1^2) \mu_1 (1 - \mu_2) (r - b\mu_1 (1 + 2\mu_2)) / d_1 \right],$$

$$d_2 = (r - b(\mu_1 + 2\mu))^2 + \kappa_1^2 (\mu_1 + 2\mu)^2,$$

$$\Delta_1 = 4(b^2 + \kappa_1^2)^4 \operatorname{ch}^2 2\kappa_1 l + \kappa_1^2 v_0^4 (\delta_1^2 + \delta_2^2) \operatorname{sh}^2 2\kappa_1 l - 2\kappa_1 \delta_1 v_0^2 (b^2 + \kappa_1^2)^2 \operatorname{sh} 4\kappa_1 l,$$

$$\Delta_2 = 4(b^2 + \kappa_1^2)^4 \operatorname{ch}^2 2l + v_0^4 (\delta_1^2 + \delta_2^2) \operatorname{sh}^2 2l - 2\delta_1 v_0^2 (b^2 + \kappa_1^2)^2 \operatorname{sh} 4l,$$

$$\delta_1 = \kappa_1^2 - b^2 + 2(b^2 + \kappa_1^2) (\mu - \mu_1 \mu_2) (r + (\kappa_1^2 - b^2) \mu_1 (1 + 2\mu_2)) / d_1,$$

$$\delta_2 = -2\kappa_1 b + 2\kappa_1 (b^2 + \kappa_1^2) (\mu - \mu_1 \mu_2) (r - 2b\mu_1 (1 + 2\mu_2)) / d_1.$$

Таким образом, получено решение задачи во втором приближении. Волновые возмущения γ_1 , p_1 , v_{ix1} , v_{iy1} , v_{iz1} определяются приведенными формулами. Все коэффициенты этих функций определены через постоянные L , ϵ_1 , ϵ_2 , которые могут быть найдены из дополнительных начальных данных. Поправка к фазовой скорости во втором приближении равна нулю, что соответствует классическим решениям [5].

Заключение. Декремент затухания пространственной волны (3.11) полностью совпадает с декрементом затухания плоской волны. Поэтому все выводы, сделанные в работе [2] по этому вопросу остаются справедливыми. Фазовая скорость волны связана с прочими параметрами выражением (3.12), которое можно записать в виде:

$$c_0^2 = c_g^2 + c_d^2 + c_r^2,$$

где $c_g^2 = v_1^2 \frac{thl}{\kappa_1^2} = \frac{gk thkl}{k_1^2}$, $c_d^2 = v_1^2 \frac{thl}{\kappa_1^2} \frac{2(\mu - \mu_1 \mu_2)}{\mu_1(1+2\mu_2)} = \frac{2\alpha_0(1-\alpha_0)(\rho_1^0 - \rho_2^0)^2}{\rho_1^0(1+2\rho_2^0)} \frac{gk thkl}{k_1^2}$,

$$c_r^2 = \frac{1}{\kappa_1^2} \frac{\beta}{k} \left(3 \frac{\beta}{k} - \frac{4r_1}{\mu_1(1+2\mu_2)} \right) = \frac{\beta}{\kappa_1^2} \left(3\beta - \frac{4R\rho^0}{\rho_1^0(1+2\rho_2^0)} \right).$$

Здесь c_g^2 — квадрат фазовой скорости пространственной гравитационной волны [5]; $c_d^2 \geq 0$ — добавка к фазовой скорости за счет наличия дисперсной фазы; c_r^2 — добавка, обусловленная силами межфазного взаимодействия. Добавка c_d^2 увеличивает значение фазовой скорости по сравнению с c_g^2 . Она зависит от разности плотностей фаз и концентрации примесей. Наибольшее значение c_d^2 достигает при $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, наименьшее — при $\alpha_0 = 0$ или $\alpha_0 = 1$ (моносреда). Если рассматривать c_d^2 как функцию от ρ_2^0/ρ_1^0 , то наименьшее значение $c_d^2(\rho_2^0/\rho_1^0)$ достигает при $\rho_2^0 = \rho_1^0$. С увеличением разницы между истинными плотностями фаз c_d^2 возрастает. Функция $c_r^2(\beta_1)$ отрицательна при $0 < \beta < 4R/3\rho_1^0(\rho^0 + 2\rho_2^0)$. Так как в рассматриваемой модели β не может превысить этого значения ($\beta > 4R/3\rho_1^0(\rho^0 + 2\rho_2^0)$, если плотности фаз сильно различаются), то $c_r^2 \leq 0$ и, следовательно, силы межфазного трения уменьшают значение фазовой скорости пространственной волны.

Возмущение концентрации $\alpha' = \alpha_0 \varepsilon^2 \gamma_1$ имеет порядок малости ε^2 , т. е. является величиной более низкого порядка по сравнению с остальными волновыми возмущениями. Если отбросить малые слагаемые, то α' можно записать в виде:

$$\alpha' = \varepsilon^2 \alpha_0 \frac{L^2}{sh^2 kl^*} e^{-2bt} \left\{ L_4 \left(\frac{k_1^4}{k^4} \cos 2k_2 (y^* + \varepsilon_2^*) + 1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{k_2^4}{k^4} \left(S_4 \sin 2k_1 (x^* - c_0 t^* + \varepsilon_1^*) + K_4 \cos 2k_1 (x^* - c_0 t^* + \varepsilon_1^*) \right) \right\} ch 2k(z^* + l^*)$$

Наибольшего абсолютного значения α' достигает вблизи свободной поверхности, возмущение концентрации уменьшается с глубиной и принимает наименьшее значение на горизонтальной поверхности основания. На рисунках 1 и 2 представлены графики, иллюстрирующие изменение концентрации на свободной поверхности (рис. 1) и заглубленном слое (рис. 2). Расчеты выполнены для среды с параметрами: $\rho_1^0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\rho_2^0 = 500 \text{ кг/м}^3$, $\eta = 1,004 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$, $a = 0,25 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $\alpha_0 = 0,1$, $l = 10 \text{ м}$, $\lambda_1 = 5\sqrt{3} \text{ м}$, $\lambda_2 = 5 \text{ м}$.

Из условия $-\alpha_0 \leq \alpha' \leq 1 - \alpha_0$ можно получить ограничение на параметры модели. При $\alpha_0 < 1/2$ данное неравенство можно заменить более грубым $|\alpha'| \leq \alpha_0$. После несложных преобразований находим достаточное условие применимости модели

$$\frac{\lambda^4 + \lambda_1^4}{\lambda_1^4} |L_4| + \frac{\lambda^4}{\lambda_2^4} (|S_4| + |K_4|) \leq \frac{1}{2\varepsilon^2 L^2}.$$

Это неравенство выполняется, если характеристики среды и параметры волны удовлетворяют ранее наложенным ограничениям, а именно если характерные размеры примесей много меньше длины волны и высота волны мала по сравнению с ее длиной.

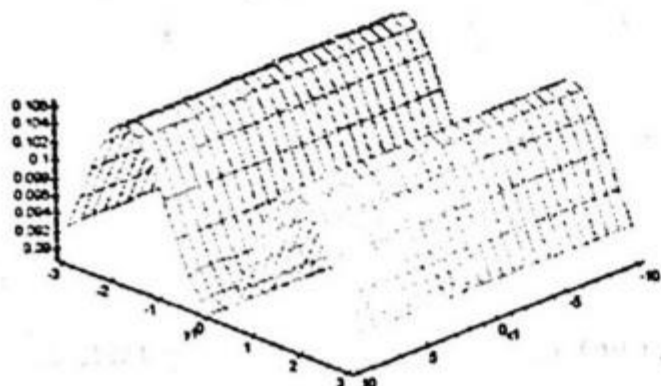


Рис. 1. Возмущение концентрации дисперсной фазы α_2 вблизи свободной поверхности $z = 0$

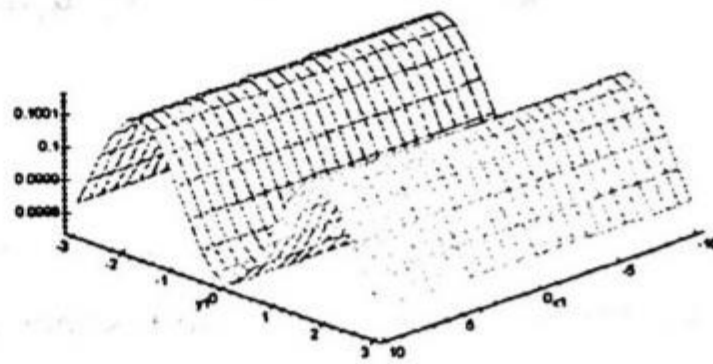


Рис. 2. Возмущение концентрации дисперсной фазы α_2 на глубине $z = -3$ м

ЛИТЕРАТУРА

1. Louaked M., Saidi A. Pointwise control and particle analysis for parabolic equation // Proc. 7th Intern. Symp. Comput. Fluid Dynamics. Beijing, 1997. P. 228-234.
2. Баринов В. А., Бутакова Н. Н. Волны на свободной поверхности двухфазной среды // ПМТФ. 2002. Т.43. № 4. С. 27-35.
3. Баринов В. А., Бутакова Н. Н. Нелинейные волны на свободной поверхности дисперсной смеси // Тр. Средневолж. матем. общества. 2002. Т.3-4. № 1. С. 47-53.
4. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М., 1987. 464 с.
5. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М., 1977. 816 с.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теорий функций комплексного переменного. М., 1987. 688 с.
7. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М., 1971. 432 с.

Вячеслав Дмитриевич КОЗЛОВ —
 ассистент кафедры информационных
 систем факультета математики
 и компьютерных наук

УДК 51(092)

Э. К. ХИЛЬКЕВИЧ (1895 – 1964) — УЧЕНЫЙ, ПЕДАГОГ. ВЕХИ ЖИЗНИ

АННОТАЦИЯ. В статье освещаются основные вехи научной и педагогической деятельности талантливого тюменского ученого и педагога Э. К. Хилькевича, в течение почти 25 лет возглавлявшего кафедру математики Тюменского педагогического института. Научные исследования Э. К. Хилькевича были связаны с проективной геометрией и с изучением истории распространения и развития идей Н. И. Лобачевского. В 40–50-х гг. XX в. имя Э. К. Хилькевича было широко известно в математических кругах педагогических вузов нашей страны.

This article reveals the main stages of scientific and pedagogical activity of the talented Tyumen scientist and teacher A. K. Khilkevich. He was at the head of the mathematical department in the Tyumen Pedagogical Institute for almost 25 years. A. K. Khilkevich's scientific research was connected with projecting geometry and with studying the history of distribution and development of the N. I Lobachevsky's ideas.