два графика, соответствующие параметру $z_0=0$ и различным начальным приближениям. Нижний график соответствует выбору начального приближения в форме $X_0 = \dfrac{\bar{a} - \bar{z}_0}{|a - z_0|^2 - M^2} f$, а верхний — в виде правой части системы алгебраических уравнений. Из графиков видно, что правильный выбор начального приближения оказывается существенным при плохой сходимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутрунов В. Н. Полином наилучшего равномерного приближения в итерационном методе решения систем линейных алгебраических уравнений // Сибирский математический журнал. 1992. Т. 33. № 1. С. 62-68.
2. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука. 1997. 511 с.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Гостехиздат. 1953. 491 с.

Николай Пименович ДМИТРИЕВ — заведующий кафедрой естественно-научных дисциплин филиала Тюменского государственного университета в г. Нижневартовске, кандидат физико-математических наук

УДК 517,53

Комплекснозначные сплайны сравнения и оценки норм производных

АННОТАЦИЯ. С помощью специально построенных сплайнов даются двусторонние оценки промежуточных производных комплекснозначных дифференцируемых функций с ограничениями на прямой в чебышевской норме.

By means of specially built splines are given double-sided evaluations of intermediate derivatives differentiated functions with restrictions on a line in Tshebishev's norm.

В теории приближения функций при вычислении оценок норм промежуточных производных или их верхних и нижних граней при ограничении на функцию и ее старшую производную часто используют так называемые функции сравнения. В качестве таких функций хорошо известны *функции Фавара:*

$$f_r(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x - \pi r/2)}{(2k+1)^{r+1}}$$

$$f_{l,r}(x) = \frac{1}{l^r} f_r(lx) \quad (r = 0,1,2,\ldots). \tag{1}$$

В современной литературе функции Фавара часто называют *сплайнами Эйлера.*

На рисунке 1 приведены графики этих сплайнов при r=0,1,2,3.

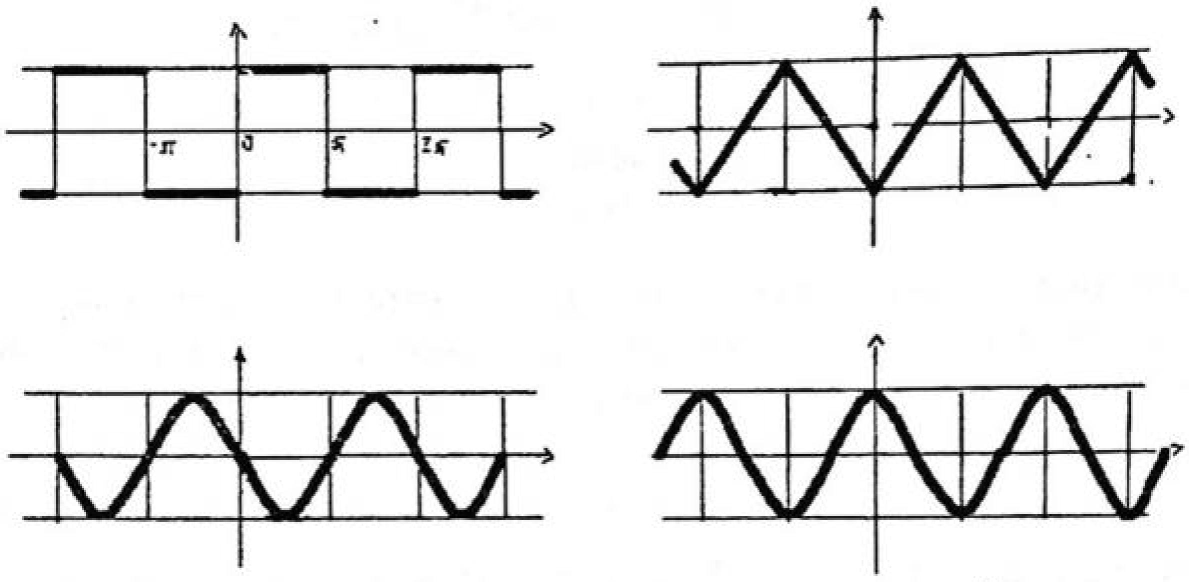

Рис. 1

Определим норму функции или ее производных следующим образом:

$$\left\|f^{(k)}\right\| = \sup\left|f^{(k)}(t)\right|, \quad f^{(0)}(t) = f(t), \quad (k = 0,1,2,..; \quad -\infty < t < \infty)$$

Нормы сплайнов Эйлера называются *константами Фавара:*

$$K_r = \|f_r\| = \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j(r+1)}}{(2j+1)^{r+1}}.$$

В частности,

$$K_0 = 1, \ K_1 = \frac{\pi}{2}, \ K_2 = \frac{\pi^2}{8}, \ K_3 = \frac{\pi^3}{24}, ...$$

Легко показать, что

$$\lim_{r\to\infty} K_r = \frac{4}{\pi}.$$

Сплайны Эйлера были использованы А. Н. Колмогоровым [1] для получения точных оценок норм промежуточных производных действительных дифференцируемых функций с ограничениями на норму самой функции и ее старшей производной.

Пусть W^r $(r = 2,3,...)$ означает класс заданных на всей числовой прямой R действительных дифференцируемых функций f (t) с абсолютно непрерывной (r—1)-ой производной $f^{(r-1)}(t)$ на любом отрезке из R. Справедлива следующая *теорема сравнения Колмогорова.*

Теорема 1. [1] Пусть $f \in W^r$ и при некотором l>0 выполнены ограничения

$$\|f\| \le \|f_{l,r}\|, \quad \left\|f^{(r)}\right\| \le 1,$$

где $f_r(t), (r = 2,3,...)$ — сплайны Эйлера. Тогда

$$\left\|f^{(k)}\right\| \le \|f_{l,r-k}\| \quad (k = 1,2,...,r-1).$$

Рассмотрим функцию

$$g_r(t,v) = \sum i^j \mu_j(v) f_{r-j}(t)$$

$$g_{l,r}(t,v) = \frac{1}{l^r} g_r(lt,v) \quad (r = 0,1,2,...), \qquad (2)$$

где i — мнимая единица, $f_j(t)$ — сплайны Эйлера, $\mu_j(v)$ — специально подобранные функции $0<v<\pi/2, -\pi/2<t<\pi/2$. Считаем, что

$$g_0(t,v)=f_0(t), \quad -\pi/2<t<\pi/2.$$

Продолжим эту функцию на всю числовую прямую с помощью следующего функционального соотношения:

$$g_{l_r}(t,v)=g_{l_r}(t+\pi/l)exp(-2vi) \qquad (r=0,1,2,...). \tag{3}$$

Из этого определения вытекает, что построенная функция при r=0 кусочно постоянна на прямой и терпит разрывы в точках $\pi/2+\pi, k=0,\pm1,\pm2,...$ Следовательно, дефект построенного сплайна не меньше 1.

Оказывается, что функции $\mu_j(v)$ всегда можно подобрать так, чтобы этот дефект был не больше 1. В силу периодичности построенного сплайна достаточно указать такие функции лишь в точке $\pi/2$. Из условий непрерывности сплайна $g_r(t,v)$ в этой точке при r>0 получаем

$$(Re\, g_r(-\frac{\pi}{2},v)+i\,Im\, g_r(-\frac{\pi}{2},v))(cos\,2v-sin\,2v)=Re\, g_r(\frac{\pi}{2})+i\,Im\, g_r(t,v).$$

После приравнивания действительных и мнимых частей полученного равенства находим $\mu_r(v)=(\sum_{j=0}^{m-1}K_{2m-2j-1}\mu_{2j}(v))ctgv,$ при r=2m—1, m=1,2,...

$\mu_r(v)=(\sum_{j=0}^{m-1}K_{2m-2j-1}\mu_{2j+1}(v))ctgv,$ при r=2m, m=1,2,...

В частности,

$\mu_0(v)=0, \quad \mu_1(v)=K_1ctgv, \ \mu_2(v)=K_1^2ctg^2v, \ \eta_3(v)=K_3ctgv+K_1^3ctgv,$

$\mu_4(v)=2K_1K_3ctg^2v+K_1^4ctg^4v, \ \mu_5(v)=K_5ctgv+3K_1^2K_3ctg^3v+K_1^5ctg^5v.$

Точки вида $\pi k/1 \ (k=0,\pm1,\pm2,...)$ в дальнейшем называем *центральными*, а точки вида $\pi k/1+\pi/21 \ (k=0<\pm1,\pm2,...)$ *узловыми* точками функции g_{l_r}.

Определим константы $K_r(v)$, $L_r(v)$ в соответствии со следующими формулами:

$$K_r(v)=\begin{cases} |g_r(0,v)|, & \text{если } r=2m \\ |g_r(\pi/2,v)|, & \text{если } r=2m+1 \end{cases} \quad (m=0,1,2,...)$$

$$L_r(v)=\begin{cases} |g_r(\pi/2,v)|, & \text{если } r=2m \\ |g_r(0,v)|, & \text{если } r=2m+1 \end{cases} \quad (m=0,1,2,...).$$

Ясно, что эти константы обобщают константы Фавара, когда $v=\pi/2$:

$$K_r(\pi/2)=K_r, \qquad L_r(\pi/2)=L_r$$

Для любой комплекснозначной функции f (t), определенной на промежутке (a,b) или на всей прямой R, положим

$$\lhd f \rhd = inf|f(t)|, \quad t\in(a,b).$$

Из определения констант $K_r(v)$, $L_r(v)$ сразу же вытекает, что

$$K_r(v)=\|g_r(\cdot,v)\|, \quad L_r(v)=\lhd g_r(\cdot,v)\rhd.$$

Отметим некоторые свойства построенных сплайнов $g_r(t,\nu)$. Сплайн имеет минимальный дефект, равный 1, он 2π — периодичен с точностью до поворота графика значений в комплексной плоскости на угол 2ν, однако $|g_r(t,\nu)|$ периодичен с периодом 2π. Для каждого $r=1,2,...$ справедливо равенство

$$g_r^{(k)}(t,\nu)=g_{r-k}(t,\nu).$$

Все значения функции $|g_r(t,\nu)|$ лежат в центральном кольце комплексной плоскости с внешним радиусом $K_r(\nu)$ и внутренним радиусом $L_r(t,\nu)$. Значения сплайна $g_0(t,\nu)$ расположены на единичной центральной окружности комплексной плоскости, причем их значения всюду плотны на ней, если число π/ν иррационально. Если индекс r четен (нечетен), то модуль сплайна не возрастает (не убывает) на промежутках $(\pi k,\pi k+\pi/2)$, $k=...-2,-1,0,1,2,...$ и не убывает (не возрастает) на промежутках $(\pi k-\pi/2,\pi k)$, $k=...-2,-1,0,1,2,....$ Для каждого $r=1,2,3,...$ модуль сплайна принимает экстремальные значения в центральных и узловых точках, причем если индекс r четен (нечетен), то наибольшее (наименьшее) значение достигается в центральных (узловых) точках, а наименьшее (наибольшее) значение — в узловых (центральных) точках этого сплайна.

На рисунке 1 изображен график значений линейного сплайна g_1, а на рисунке 2 — график параболического сплайна g_2

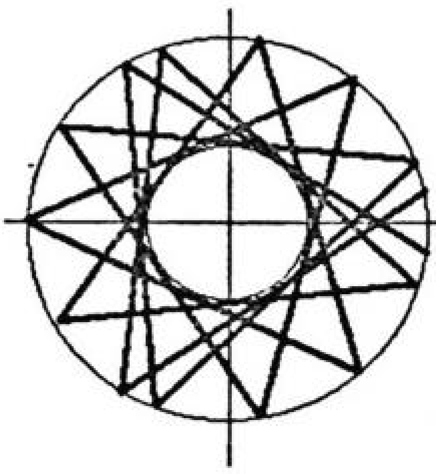

Рис. 1

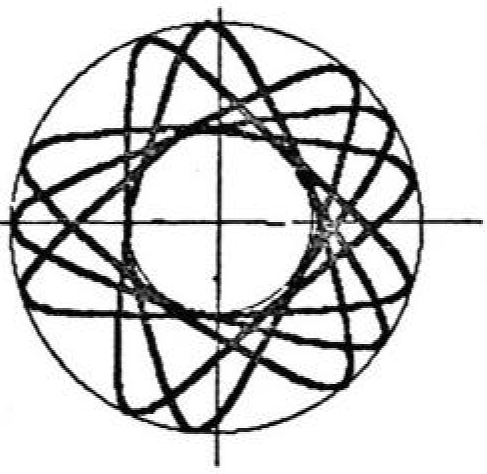

Рис. 2

Отметим, что для любых заданных чисел M>N всегда можно подобрать параметры λ и ν так, чтобы выполнялись равенства

$$\|g_{\lambda,r}(\cdot,\nu)\|=M,\quad \triangleleft\, g_{\lambda,r}(\cdot,\nu)\,\triangleright=N.$$

Действительно, изменение параметра λ приводит к изменению размеров кольца значений сплайна, а изменение параметра ν — к изменению соотношения между его внешним и внутренним радиусами. Отметим также, что при $\nu=\pi/2$

$$g_{\lambda,r}(t,\frac{\pi}{2})=\frac{M}{K_r}\; f((\frac{K_r}{M})^{1/r}t),\, r=0,1,2,...$$

Следовательно, в этом случае построенный сплайн совпадает с известным сплайном Эйлера. В то же время, нетрудно показать, что при $\nu=0$ следует равенство $M=N$, т. е. график значений сплайна целиком располагается на окружности радиуса M. Отметим, что случай $r=2$ рассмотрен в [3].

Пусть $\overline{W^r}$, $(r = 2,3,...)$ означает класс заданных на всей числовой прямой R комплекснозначных дифференцируемых функций $f(t)$ с абсолютно непрерывной (r—1)-й производной $f^{(r-1)}(t)$ на любом отрезке из R. Сплайны g, построенные выше, содержатся в классе $\overline{W^r}$ комплекснозначных дифференцируемых функций с ограничениями на норму функции и норму ее старшей производной. Следовательно, такие сплайны могут служить в качестве оценок снизу относительно функций этого класса. Справедливо утверждение [2].

Теорема 2. Пусть $f \in \overline{W^r}$, а параметры l, ν таковы, что

$$\|f\| = \|g_{l,r}(\cdot,\nu)\|, \qquad \lhd f \rhd = \lhd g_{l,r}(\cdot,\nu) \rhd, \qquad \|f^{(r)}\| \le 1.$$

Тогда имеет место следующая оценка снизу:

$$\sup_f \|f^{(\cdot)}\| \ge \|g_{\lambda,r-1}(\cdot,\nu)\| \quad (k = 1,2,\dots,r-1). \tag{4}$$

Для получения оценки сверху докажем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $f \in \overline{W^r}$, причем

$$\|f\| \le M, \quad \|f^{(r)}\| \le 1. \tag{5}$$

Тогда справедлива точная оценка

$$\|f^{(k)}\| \le K_{r-k}\left(\frac{M}{K_r}\right)^{\frac{r-k}{r}}, \quad k = 1,2,\dots,r-1,$$

где $K_j(j = 0,1,2....)$— известные константы Фавара.

Доказательство.

Предположим противное. Пусть в некоторой точке $t=\tau$ доказываемое неравенство неверно, т. е.

$$|f'| > K_{r-1}\left(\frac{M}{K_r}\right)^{\frac{r-k}{r}},$$

Правая часть этого неравенства есть величина нормы первой производной сплайна

$$f_{\lambda,r} = g_{\lambda,r}\left(t,\frac{\pi}{2}\right),$$

где

$$\lambda = \left(\frac{K_r}{M}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Таким образом, последнее неравенство можно переписать так:

$$|f'(\tau)| > \|f_{\lambda,r-1}\|.$$

Введем функцию

$$f_{\lambda,r}(t,\delta) = f_{\lambda,r}(t)e^{i\delta},$$

где параметр δ подобран так, что

$$\arg f'(\tau) = \arg f_{\lambda,r-1}(t,\delta).$$

Обозначим через $\bar{f}(t)$ проекцию заданной функции на прямую AB (рис. 3)

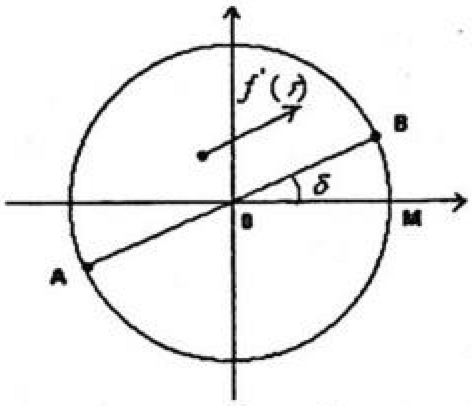

Рис. 3

Докажем сначала, что

$$\overline{f}^{(r)}(t) = \overline{f^{(r)}}(t). \qquad (6)$$

Для этого рассмотрим функцию

$$\langle f(t)\rangle = f(t)e^{-i\delta}.$$

В силу выбора параметра δ это означает, что в точке $t=\tau$ касательная к графику значений функции $\langle f(t)\rangle$ параллельна действительной оси. Следовательно, $\mathrm{Im}\langle f(t)\rangle' = 0$.

Представим функцию $\langle f(t)\rangle$ в канонической форме, а именно:

$$\langle f(t)\rangle = (\mathrm{Re}\, f(t)\cos\delta + \mathrm{Im}\, f(t)\sin\delta) + i(\mathrm{Im}\, f(t)\cos\delta - \mathrm{Re}\, f(t)\sin\delta).$$

Отсюда получаем:

$$\overline{f}(t) = \mathrm{Re}\, f(t)\cos\delta + \mathrm{Im}\, f(t)\sin\delta.$$

Дифференцируя r раз по переменной t, приходим к выражению

$$\overline{f}^{(r)}(t) = \mathrm{Re}\, f^{(r)}(t)\cos\delta + \mathrm{Im}\, f^{(r)}(t)\sin\delta.$$

С другой стороны, умножая r-ую производную функции $f(t)$ на $\exp(-i\delta)$, получаем:

$$f^{(r)}(t)e^{-i\delta} = (\mathrm{Re}\, f^{(r)}(t)\cos\delta + \mathrm{Im}\, f^{(r)}\sin\delta) + i(\mathrm{Im}\, f^{(r)}\cos\delta - \mathrm{Re}\, f^{(r)}(t)\sin\delta).$$

Отсюда немедленно вытекает, что

$$\overline{f}^{(r)}(t) = \mathrm{Re}\, f^{(r)}(t)\cos\delta + \mathrm{Im}\, f^{(r)}(t)\sin\delta,$$

что и доказывает равенство (6).

Далее заметим, что относительно функции $\bar{f}(t)$ выполнены все ограничения (4). Действительно,

$$\|\overline{f}\| = \|\mathrm{Re}\, f(.)\cos\delta + \mathrm{Im}\, f(.)\sin\delta\| = \sup_t|\mathrm{Re}\, f(.)\cos\delta + \mathrm{Im}\, f(.)\sin\delta| \le$$

$$\le \sup_t (\mathrm{Re}^2\, f(.) + \mathrm{Im}^2\, f(.))^{1/2}(\cos^2\delta + \sin^2\delta) \le \|f\| \le M$$

$$\|\overline{f}^{(r)}\| = \|\overline{f^{(r)}}\| = \|\mathrm{Re}\, f^{(r)}(.)\cos\delta + \mathrm{Im}\, f^{(r)}(.)\sin\delta\| \le$$

$$\le \sup_t (\mathrm{Re}^2\, f(t) + \mathrm{Im}^2(t))(\cos^2\delta + \sin^2\delta) \le \|f^{(r)}\| \le 1.$$

Пусть θ — некоторая точка на прямой R такая, что

$$\overline{f}(\tau)=f_{\lambda,r}(\theta,\delta).$$

Тогда из предположений от противного вытекает, что

$$\left|\overline{f}'(t)\right|>\left|f_{\lambda,r-1}(\theta,\delta)\right|.$$

Однако из теоремы сравнения Колмогорова [1] относительно этих функций следует, что

$$\left|\overline{f}'(\tau)\right|\le\left|f_{\lambda,r-1}(\theta,\delta)\right|.$$

Полученное противоречие доказывает теорему в случае k=1. В общем случае справедливость теоремы вытекает из математической индукции по к.

Доказанная теорема позволяет получить оценку сверху норм промежуточных производных комплекснозначных функций со значениями в кольце комплексной плоскости. В самом деле, класс комплекснозначных дифференцируемых функций со значениями в кольце C(M,N) не шире, чем класс таких же функций со значениями в круге C(M,0). Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть $f\in\overline{W}^r$, а параметры λ, ν таковы, что

$$\|f\|=\|g_{\lambda,r}(\cdot,\nu)\|,\qquad \lhd f\rhd=\lhd g_{\lambda,r}(\cdot,\nu)\rhd,$$

причем

$$\|f^{(r)}\|\le 1.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sup_f\|f^{(k)}\|\le\|f_{\eta,r-k}\|,$$

где

$$\eta=\left(\frac{K_r}{\|g_{\lambda,r}(\cdot,\nu)\|}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Здесь необходимо отметить, что параметр η подобран так, что

$$\|f_{\eta,r}\|=\|g_{\lambda,r}\|.$$

Нетрудно выразить норму промежуточной производной сплайна Эйлера через норму соответствующей промежуточной производной построенных комплекснозначных сплайнов. Имеет место следующая

Лемма. Для k=1,2,...,r−1 справедливо равенство:

$$\|f_{\eta,r-k}\|=\frac{K_{r-k}}{K_r^{\frac{r-k}{r}}}\frac{K_r^{\frac{r-k}{r}}(\nu)}{K_{r-k}(\nu)}\|g_{\lambda,r-k}\|.$$

С учетом этой леммы, а также теорем 3 и 4, окончательно приходим к следующему утверждению.

Теорема 5. Пусть $f\in\overline{W}^r$, а параметры λ, ν таковы, что

$$\|f\|=\|g_{\lambda,r}\|,\qquad \lhd f\rhd=\lhd g_{\lambda,r}\rhd,$$

причем

$$\|f^{(r)}\|\le 1.$$

Тогда справедливо неравенство:

$$\|g_{\lambda,r-k}\| \le \sup_f \|f^{(k)}\| \le \frac{K_{r-k} K_r^{\frac{r-k}{r}}(v)}{K_r^{\frac{r-k}{r}} K_{r-k}(v)} \|g_{\lambda,r-k}\|. \qquad (7)$$

В частности, при r=3 из неравенства (7) вытекают следующие оценки:

$$\|g_{l,2}\| \le \sup_f \|f'\| \le 1{,}059 \|g_{l,2}\|$$

$$\|g_{l,1}\| \le \sup_f \|f''\| \le 1{,}443 \|g_{l,1}\|.$$

Заметим, что при r=2 в работе [3]получена точная оценка нормы производной

$$\|f'\| \le \|g_{l,1}\|.$$

Автор выражает благодарность В. Н. Габушину и Ю. Н. Субботину за ценные замечания на семинарах отдела теории приближения функций института математики и механики УНЦ РАН (г. Екатеринбург).

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Учен. зап. МГУ. Математика. 1938. Вып. 30. Кн. 3. С. 3-16

2. Дмитриев Н. П. Оценки норм промежуточных производных комплексно-значных функций. Деп. в ВИНИТИ. 1989. № 210-В90 Деп.

3. Schoenberg I. J. The Landau problem 1. The case of motions on sets // Proc. Scand. Acad. Sci. //1978. // vol. 81. // N. 2. // P. 218-231.

Наиля Абдулловна ГУБАЙДУЛЛИНА — доцент кафедры математического анализа и теории функций математического факультета, кандидат физико-математических наук

УДК 517.54

ОБ ОДНОЛИСТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ

АННОТАЦИЯ. Получены достаточные условия однолистной разрешимости одной задачи фильтрации с заданным распределением скорости фильтрации.

Sufficient univalent conditions of the solution of filtration problem with the given distribution of filtration velocity are obtained.

Исследуем на однолистность функцию

$$f(z) = \int_q^z exp[\chi(z) + G(z)]dz, \quad K = \{z : q \le |z| \le 1\}, \qquad (1)$$