Тогда справедливо неравенство:

$$\left\|g_{\lambda,r-k}\right\| \le \sup_f \left\|f^{(k)}\right\| \le \frac{K_{r-k} K_r^{\frac{r-k}{r}}(v)}{K_r^{\frac{r-k}{r}} K_{r-k}(v)} \left\|g_{\lambda,r-k}\right\|. \qquad (7)$$

В частности, при r=3 из неравенства (7) вытекают следующие оценки:

$$\left\|g_{l,2}\right\| \le \sup_f \left\|f'\right\| \le 1{,}059 \left\|g_{l,2}\right\|$$

$$\left\|g_{l,1}\right\| \le \sup_f \left\|f''\right\| \le 1{,}443 \left\|g_{l,1}\right\|.$$

Заметим, что при r=2 в работе [3]получена точная оценка нормы производной

$$\left\|f'\right\| \le \left\|g_{l,1}\right\|.$$

Автор выражает благодарность В. Н. Габушину и Ю. Н. Субботину за ценные замечания на семинарах отдела теории приближения функций института математики и механики УНЦ РАН (г. Екатеринбург).

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Учен. зап. МГУ. Математика. 1938. Вып. 30. Кн. 3. С. 3-16

2. Дмитриев Н. П. Оценки норм промежуточных производных комплексно-значных функций. Деп. в ВИНИТИ. 1989. № 210-В90 Деп.

3. Schoenberg I. J. The Landau problem 1. The case of motions on sets // Proc. Scand. Acad. Sci. //1978. // vol. 81. // N. 2. // P. 218-231.

*Наиля Абдулловна ГУБАЙДУЛЛИНА —
доцент кафедры математического
анализа и теории функций
математического факультета,
кандидат физико-математических наук*

УДК 517.54

ОБ ОДНОЛИСТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ

АННОТАЦИЯ. Получены достаточные условия однолистной разрешимости одной задачи фильтрации с заданным распределением скорости фильтрации.

Sufficient univalent conditions of the solution of filtration problem with the given distribution of filtration velocity are obtained.

Исследуем на однолистность функцию

$$f(z) = \int_q^z exp[\chi(z) + G(z)]dz, \quad K = \{z : q \le |z| \le 1\}, \qquad (1)$$

которая является решением одной задачи напорной фильтрации под двумя флютбетами с заданным распределением скорости фильтрации. Здесь $\chi(z)$ записывается по формуле Вилля в виде [1]:

$$\chi(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}P(1,\theta)\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\frac{dt}{t}-\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=q}P(q,\theta)\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\frac{dt}{t}\right], \quad (2)$$

$G(z)$ — комплексная функция Грина для кольца [2]:

$$G(z)=2\ln\left[z^{\frac{\ln z_0}{\ln q}}\frac{1}{z_0}\frac{1-zz_0}{1-\frac{z}{z_0}}\frac{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-q^{2k}zz_0\right)\left(1-q^{2k}\frac{1}{zz_0}\right)}{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-q^{2k}\frac{z}{z_0}\right)\left(1-q^{2k}\frac{z_0}{z}\right)}\right], \quad (3)$$

$q < z_0 < 1$. Плотности $P(1,\theta)$ и $P(q,\theta)$, $\theta\in[-\pi,\ \pi]$ в (2) определенным образом связаны с заданной скоростью фильтрации, причем $P(\rho,\theta)=P(\rho,-\theta)$, где $\rho=1,\ q$. Отметим, что постановка и решения обратных задач теории фильтрации достаточно подробно изложены в [3], и в некоторых случаях решения исследованы на однолистность [3, 4].

Образом кольца K при отображении функцией $f(z)$ является внешность двух кривых L_q и L_1, симметричных относительно оси абсцисс. Действительно, $f(z)$ имеет в точке $z=z_0$ простой полюс, $f(\rho e^{i\varphi})=f(\rho e^{-i\varphi})$, $\rho=1,\ q$.

Требование замкнутости контуров L_ρ, $\rho=1,\ q$ ведет к появлению условий разрешимости задачи фильтрации. Известно, что индексы граничных кривых $C_\rho=\{z\colon |z(=\rho\}$ и L_ρ, $\rho=1,\ q$ связаны соотношением $ind\ C_\rho=indL_\rho-p$ [4], где

$$p=\frac{1}{2\pi}\int_{C_\rho}P(\rho,\theta)\alpha(\tau)d\tau,\ \alpha\left(e^{i\theta}\right)=\alpha(1,\theta)=-\frac{1}{\ln q},\ \alpha\left(qe^{i\theta}\right)=\alpha(q,\theta)=-\frac{1}{q\ln q}.$$

Так как $ind\ C_q\ =\ ind\ L_q\ =\ -1$, то получаем необходимое условие разрешимости

$$\int_{-\pi}^{\pi}P(1,\theta)d\theta-\int_{-\pi}^{\pi}P(q,\theta)d\theta=0\,. \quad (4)$$

Кроме того, для замкнутости контуров L_ρ, $\rho=1$, q должно быть $c_{-1}=0$, $\tilde{c}_{-1}=0$, где c_{-1} — коэффициент при $1/z$, а $\tilde{c}_{-1}$ — коэффициент при $1/(z-z_0)$ в разложении Лорана подынтегральной функции в (1). Физически эти условия можно рассматривать как условия расположения бьефов на одном уровне [3].

Так как

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}=\begin{cases}-2\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{q^{2k}t^i}{z^i}-1+2\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{q^{2k}}{t^i}z^i,\ |t|=1\\-2\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{q^{2k}t^i}{z^i}-1+2\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{q^{2k}}{t^i}z^i,\ |t|=q\end{cases},$$

то коэффициенты при $1/z$ в разложении функции $\chi(z)$ равны

$$\frac{1}{\pi}\frac{q}{1-q^2}\int_{-\pi}^{\pi}P(q,\theta)e^{i\theta}\,d\theta-\frac{1}{\pi}\frac{q^2}{1-q^2}\int_{-\pi}^{\pi}P(1,\theta)e^{i\theta}\,d\theta.$$

Поэтому условие $c_{-1}=0$ равносильно

$$\int_{-\pi}^{\pi}P(q,\theta)e^{i\theta}\,d\theta-q\int_{-\pi}^{\pi}P(1,\theta)e^{i\theta}\,d\theta. \tag{5}$$

Проводя те же рассуждения, что и для круга [5], при вычислении коэффициента $\tilde{c}_{-1}$ и, приравняв этот коэффициент нулю, получаем

$$\chi'(z_0)=-\frac{2z_0}{1-z_0^2}+\frac{2\ln z_0}{z_0\ln q}+\frac{2\left(1-z_0^4\right)}{z_0^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{2k}}{1-q^{2k}\left(z_0^2+\dfrac{1}{z_0^2}\right)+q^{4k}}\,.$$

Это уравнение служит для определения значения z_0, если последнее остается неизвестным в процессе решения задачи, или является условием разрешимости, если z_0 известно.

При исследовании вопроса однолистности понадобятся некоторые оценки гармонических в кольце функций.

Лемма. Пусть $w(z)=w(re^{i\theta})=u(r,\theta)+i\nu(r,\theta)$ — однозначная аналитическая в кольце K функция, $u_\rho=u(\rho,\theta)$, где $\rho=1,\ q$, непрерывны по $\theta\in[-\pi,\pi]$, $\omega_\rho\left(t;u_\rho\right)=\sup\limits_{|\theta_1-\theta_2|\le t}\left|u(\theta_1)-u(\theta_2)\right|$ — их модули непрерывности и

$$\int_{-\pi}^{\pi}u(1,\theta)d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}u(q,\theta)d\theta=0\,.$$

Тогда

$$\begin{aligned}|\nu(\rho,\varphi)|\le{}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\omega_\rho\left(2t;u_\rho\right)ctg\frac{\theta}{2}d\theta+\\&+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\omega_\rho\left(2t;u_\rho\right)\left|Im\frac{e^{i\theta}+q^{2k}}{e^{i\theta}-q^{2k}}\right|d\theta+\\&+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\omega_r\left(2t;u_r\right)\left|Im\frac{e^{i\theta}+q^{2k}}{e^{i\theta}-q^{2k+1}}\right|d\theta\equiv K_\rho\left[u_1,u_q\right]\end{aligned} \tag{6}$$

$$\rho=1,\ q,\qquad r=\begin{cases}1, \text{ если } \rho=q\\ q, \text{ если } \rho=1\end{cases}.$$

Методика доказательства та же, что для круга [6]. Для этого нужно представить $\mathrm{Im}\,w(e^{i\theta})=\nu\,(1,\theta)$ в виде следующего интегрального представления:

$$\begin{aligned}\nu(1,\varphi)={}&-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[u(1,\varphi+\theta)-u(1,\varphi-\theta)\right]ctg\frac{\theta}{2}d\theta+\\&+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[u(1,\varphi+\theta)-u(1,\varphi-\theta)\right]Im\frac{e^{i\theta}+q^{2k}}{e^{i\theta}-q^{2k}}d\theta-\\&-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[u(q,\varphi+\theta)-u(q,\varphi-\theta)\right]Im\frac{e^{i\theta}+q^{2k+1}}{e^{i\theta}-q^{2k+1}}d\theta\,.\end{aligned}$$

При выполнении условий леммы оценка получается сразу. Аналогично для $\nu\,(q,\varphi)$.

Перейдем теперь к исследованию однолистности интегрального представления (1). Функция $f(z)$ однолистна в окрестности точки $z=z_0$ (имеет там простой полюс), в остальных точках она аналитична. Поэтому для однолистности в замкнутом кольце $\overline{K}$ достаточно, чтобы кривые L_ρ, $\rho=1, q$ были простыми.

Обозначим через $\gamma(\rho,\varphi)$, $\rho=1, q$, угол между касательной к L_ρ, $\rho=1, q$ и положительным направлением оси абсцисс, когда точка $z=\rho e^{i\theta}$ обходит окружность C_ρ. Тогда необходимые и достаточные условия выпуклости кривых L_ρ, $\rho=1, q$ запишутся в виде неравенств $\gamma'(1,\varphi)\le 0$, $\gamma'(q,\varphi)\ge 0$.

Так как $\gamma(\rho,\varphi) = \arg df$, то

$$\gamma(\rho,\varphi)=\varphi+Im\,\chi\left(\rho\, e^{i\varphi}\right)+Im\,G\left(\rho\, e^{i\varphi}\right),$$

$$\frac{d\gamma(\rho,\varphi)}{d\varphi}=1+\frac{d}{d\varphi}Im\,\chi\left(\rho\, e^{i\varphi}\right)+\frac{d}{d\varphi}Im\,G\left(\rho\, e^{i\varphi}\right).$$

Учитывая, что

$$\left(\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\right)'_\varphi=-\left(\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\right)'_\theta,\quad z=\rho\, e^{i\varphi},\ t=r\, e^{i\theta},$$

будем иметь

$$\frac{d}{d\varphi}Im\,\chi\left(\rho\, e^{i\varphi}\right)=Im\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P'(1,\theta)\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P'(q,\theta)\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}d\theta\right].$$

Если $P'(\rho,\theta)$ удовлетворит условиям

$$\int_{-\pi}^{\pi}P'(\rho,\theta)d\theta=0,\ \rho=1, q \tag{7}$$

$$\left|P'(\rho,\theta_1)-P'(\rho,\theta_2)\right|\le N_\rho\left|\theta_1-\theta_2\right|^{\nu_\rho},\ 0<\nu_\rho\le 1, N_\rho>0, \forall\theta_1,\ \theta_2\in[-\pi,\pi], \tag{8}$$

то $\frac{d}{d\varphi}Im\,\chi\left(\rho\, e^{i\varphi}\right)$ можно оценить

$$\left|\frac{d}{d\varphi}Im\,\chi\left(\rho\, e^{i\varphi}\right)\right|\le M_\rho\left(N_1,\nu_1,N_q,\nu_q\right),\ \rho=1, q,$$

где $M_\rho\left(N_1,\nu_1,N_q,\nu_q\right)$ — известные функции своих аргументов [1].

Если $P'(\rho,\theta)$, где $\rho=1, q$ непрерывны по $\theta\in[-\pi,\pi]$, $\omega_\rho(t;P'(\rho,\theta))$ — их модули непрерывности соответственно, то на основании леммы получим оценку

$$\left|\frac{d}{d\varphi}Im\,\chi\left(\rho\, e^{i\varphi}\right)\right|\le K_\rho\left[P'_1,P'_2\right],\ \rho=1, q,$$

где $K_\rho\left[P'_1,P'_2\right]$ имеют вид (6).

Для вычисления $\frac{d}{d\varphi}Im\,G\left(\rho\, e^{i\varphi}\right)$, представим функцию $Im\,G\left(\rho\, e^{i\varphi}\right)$ в виде

$$ImG\left(\rho\, e^{i\varphi}\right)=2\left\{\frac{\ln z_0}{\ln q}\varphi-arctg\frac{a\sin\varphi}{1-a\cos\varphi}+arctg\frac{b\sin\varphi}{1-b\cos\varphi}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}arctg\frac{A\sin\varphi}{A_k-\cos\varphi}-\sum_{k=1}^{\infty}arctg\frac{B\sin\varphi}{B_k-\cos\varphi}\right\},$$

где

$$a=\rho z_0\,,\ b=\frac{\rho}{z_0},\quad A=-\frac{a-\dfrac{1}{a}}{a+\dfrac{1}{a}},\ B=-\frac{b-\dfrac{1}{b}}{b+\dfrac{1}{b}},$$

$$A_k=\frac{q^{2k}+\dfrac{1}{q^{2k}}}{a+\dfrac{1}{a}},\ B_k=\frac{q^{2k}+\dfrac{1}{q^{2k}}}{b+\dfrac{1}{b}}.$$

Тогда

$$\frac{d}{d\varphi}Im\,G\left(\rho\,e^{i\varphi}\right)=2\left\{\frac{\ln z_0}{\ln q}-\frac{a\cos\varphi-a^2}{1-2a\cos\varphi+a^2}+\frac{b\cos\varphi-b^2}{1-2b\cos\varphi+b^2}+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A\left(A_k\cos\varphi-1\right)}{A_k^2-2A_k\cos\varphi+\cos^2\varphi+A^2\sin^2\varphi}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B\left(B_k\cos\varphi-1\right)}{B_k^2-2B_k\cos\varphi+\cos^2\varphi+B^2\sin^2\varphi}\right\}. \tag{9}$$

Оценим слагаемые, входящие в (9).

Функция вида $g(\varphi,a)=\dfrac{\cos\varphi-a}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ является четной и монотонно убывающей на отрезке $[0,\ \pi]$ при $\rho=1,\ q$, функция $g(\varphi,b)$ монотонно возрастает при $\rho=1$ и монотонно убывает при $\rho=q$.

Так как

$$\left|A_k(\varphi)\right|=\left|\frac{A\left(A_k\cos\varphi-1\right)}{A_k^2-2A_k\cos^2\varphi+A^2\sin^2\varphi}\right|\le\frac{1}{A_k}\le\left(a+\frac{1}{a}\right)q^{2k},$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty}AA_k\le\left(\frac{1}{a}-a\right)\sum_{k=1}^{\infty}q^{2k}=\left(\frac{1}{a}-a\right)\frac{q^2}{1-q^2},\ \rho=1,\ q.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{d\varphi}Im\,G\left(e^{i\varphi}\right)\le2\left[\frac{\ln z_0}{\ln q}-\frac{1}{1-z_0}+2\frac{1-z_0^2}{z_0}\frac{q^2}{1-q^2}\right]\equiv T_1(z_0,q), \tag{10}$$

$$\frac{d}{d\varphi}Im\,G\left(q\,e^{i\varphi}\right)\ge2\left[\frac{\ln z_0}{\ln q}-\frac{qz_0}{(1-qz_0)^2}-\frac{q}{q+z_0}+\frac{q^2}{1-q^2}\left(\frac{1}{qz_0}-qz_0+\frac{q}{z_0}-\frac{z_0}{q}\right)\right]\equiv$$
$$\equiv T_2(z_0,q) \tag{11}$$

окончательно получим оценки:

$$\frac{d}{d\varphi}\gamma(1,\varphi)\le1+M_1\left(N_1,\nu_1,N_q,\nu_q\right)+T_1(z_0,q),$$
$$\frac{d}{d\varphi}\gamma(q,\varphi)\ge1-M_2\left(N_1,\nu_1,N_q,\nu_q\right)+T_2(z_0,q).$$

Итак, доказана

Теорема. Пусть выполнены условия (4), (5), (7), (8). Тогда функция $f(z)$ вида (1) будет однолистной (выпуклой) в замкнутом кольце $\overline{K}$ при

$$1+M_1\left(N_1,\nu_1,N_q,\nu_q\right)+T_1(z_0,q)\le0\,,$$
$$1-M_2\left(N_1,\nu_1,N_q,\nu_q\right)+T_2(z_0,q)\ge0\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксентьев Л. А. Оценки для гармонических функций и их применение к обратным краевым задачам // Тр. семин. по краевым задачам. Казань: Изд-во КГУ, 1970. Вып. 7. С. 82-87.

2. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука. 1970. 303 с.

3. Нужин М. Г., Ильинский Н. Б. Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений. Обратные краевые задачи теории фильтрации. Казань: Изд-во КГУ, 1963. 138 с.

4. Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций // Успехи мат. наук. 1975, 30. Вып. 4 (184). С. 3-60.

5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

6. Авхадиев Ф. Г. К слабой и сильной проблемам однолистности в обратных краевых задачах // Тр. семин. по краевым задачам. Казань: Изд-во КГУ, 1973. Вып. 10. С. 3-10.

Алексей Григорьевич ХОХЛОВ — доцент кафедры математического анализа и теории функций математического факультета, кандидат физико-математических наук

УДК 515.12

Раздельно непрерывные функции и отображения

АННОТАЦИЯ. В этой статье рассмотрены раздельно непрерывные функции. Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть X, Z — финально компактные р-пространства, Y — хаусдорфово пространство и Ф: $X \times Z \to Y$ раздельно непрерывное отображение, разделяющее точки X и Z. Кроме того, $nW(\Phi(X \times \{z\})) \le \aleph_0$ и $nW(\Phi(\{x\} \times Z)) \le \aleph_0$ для всех $x \in X$ и $z \in Z$. Тогда X вкладывается в Σ — произведение прямых.

In this article separately-continuous functions are considered. The following theorem is proved.

The theorem. Let X, Z are finally-compact p-spaces, Y is the Hausdorff space and Ф: $X \times Z \to Y$ is a separately-continuous reflection, separating X and Z points. Moreover, $nW(\Phi(X \times \{z\})) \le \aleph_0$ and $nW(\Phi(\{x\} \times Z)) \le \aleph_0$ for every $x \in X$ and every $z \in Z$. Then X is put into Σ — product of the straight lines.

Напомним, что отображение $f: X \times Y \to Z$ называется раздельно непрерывным, если для всяких $x \in X$, $y \in Y$ сужения $f|X \times \{y\}$ и $f|\{x\} \times Y$ непрерывны. Пусть R — прямая. Тогда Σ — произведение прямых — это подмножество R^A, состоящее из $f: A \to R$, таких, что $|A \setminus f^{-1}(0)| \le \aleph_0$, где $|Z|$ — мощность Z и $\aleph_0 = |N|$, N — натуральный ряд. Напомним, что пространство X называется финально компактным р-пространством, если существует совершенное (то есть непрерывное замкнутое) отображение