МАТЕМАТИКА

Александр Николаевич ДЕГТЕВ —
зав. кафедрой алгебры
и математической логики,
доктор физико-математических наук,
профессор,
Дмитрий Иванович ИВАНОВ —
старший преподаватель
кафедры алгебры и математической логики

УДК 517.11

О КЛАССАХ ЛИНЕЙНЫХ И САМОДВОЙСТВЕННЫХ СЛАБО ИМПЛИКАТИВНО-СЕЛЕКТОРНЫХ МНОЖЕСТВ

АННОТАЦИЯ. После сложной леммы доказывается, что класс $K(\beta)$ слабо β-ИС множеств для линейной (самодвойственной размерности 4) булевой функции β совпадает с одним из классов

$$K(x \vee y) \subset K(\bar{x}\, y \vee x\, \bar{y}) \subset K(x),$$

соответственно $\quad K(x \vee y) \subset K(xy \vee xz \vee yz) \subset K(x),$

причем включения везде строгие.

After the complicated lemma provde, that a class $K(\beta)$ of weak β-IS sets for the admissible linear (self duality of the demesion 4) boolean function clach with one of the classes

$$K(x \vee y) \subset K(\bar{x}\, y \vee x\, \bar{y}) \subset K(x),$$

conformace $\quad K(x \vee y) \subset K(xy \vee xz \vee yz) \subset K(x),$

and all the inclusions are strong.

Пусть $A \subseteq N=\{0,1,2,..\}$ и β-n-местная булева функция (БФ) без фиктивных переменных. Тогда A называется слабо β-импликативно селекторным (β-ИС) множеством [1], если существует n-местная частично-рекурсивная функция (ЧРФ) f такая, что

$$(\forall x_1,...,x_n)(\beta(\chi(x_1),\ldots,\chi(x_n)))=1 \Rightarrow f(x_1,\ldots,x_2)\in A\cap\{x_1,\ldots,x_n\},$$

где χ — характеристическая функция множества A. ЧРФ f называется соответствующей множеству A. Следующая лемма отвечает на вопрос из статьи [1].

Лемма. Каждое слабо γ-ИС множество является слабо $x \vee y$-ИС множеством, где

$$\gamma(x,y,z)=xyz \vee xyz \vee xyz \vee xyz\,.$$

Доказательство. Пусть трехместная ЧРФ f является соответствующей слабо γ-ИС множеству A и $\bar{a}$ — фиксированный элемент из N\A. Заметим, что

$$\gamma(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=1 \Leftrightarrow \langle \theta_1,\theta_2,\theta_3\rangle \in \{\langle 1,1,1\rangle,\langle 1,0,0\rangle,\langle 0,1,0\rangle,\langle 0,0,1\rangle\}\,.$$

Начинаем вычислять $f(x,y,\bar{a})$ и искать такое число $u \in N$, что выполнено условие

$$f(x,y,u) \text{ определено, } f(x,u,\bar{a})=x \text{ и } f(y,u,\bar{a})=y. \qquad (1)$$

Заметим, что если $x, y \in A$ и нет такого $u \in A$, что выполнено условие (1), то

$$A=\{u\colon f(x,y,u) \text{ определено}\}$$

оказывается РПМ, которое является слабо $x \vee y$-ИС множеством. Если же $x \in A$ и $y \in \bar{A}$ или $y \in A$ и $x \in \bar{A}$, то значение $f(x,y,\bar{a})$ определено $f(x,y,\bar{a})=x$ или $f(x,y,\bar{a})=y$ соответственно. Поэтому если $f(x,y,\bar{a})$ будет вычислено раньше, чем найдено число u, удовлетворяющее условию (1), причем $f(x,y,\bar{a}) \in \{x, y\}$,то положим

$$g(x, y) = \begin{cases} x, \text{ если } f(x,y,\bar{a})=x, \\ y, \text{ если } f(x,y,\bar{a})=y. \end{cases}$$

Предположим, что найдено число u и выполнено условие (1). Определяем значение двухместной ЧРФ g, в зависимости от значения $f(x,y,u)$.

1. $f(x,y,u)=u$. Учитывая условие (1), имеем
 $u \in A \Rightarrow x,y \in A$ или $x,y \in \bar{A}$,
 $u \in A \Rightarrow x,y \in A$ или $x,y \in \bar{A}$.
 Поэтому полагаем $g(x,y)=x$.
2. $f(x,y,u)=x$.
 $u \in A \Rightarrow x \in A$ из условия (1),
 $u \in \bar{A}$ и $x \in \bar{A} \Rightarrow y \in \bar{A}$, т.к. иначе $f(x,y,u)=y$.
 Поэтому полагаем $g(x,y)=x$.
3. $f(x,y,u)=y$.
 $u \in A \Rightarrow y \in A$ из условия (1),
 $u \in \bar{A}$ и $y \in \bar{A} \Rightarrow x \in \bar{A}$, т.к. иначе $f(x,y,u)=x$.
 Поэтому полагаем $g(x,y)=y$.

В противном случае значения $g(x,y)$ не определено и это может произойти лишь тогда, когда $x,y \in \bar{A}$. Теперь ясно, что A оказывается слабо $x \vee y$-ИС множеством с соответствующей ему ЧРФ g.□

Напомним, что линейная БФ, существенно зависящая от переменных $x_1,\dots,x_n$, имеет вид $x_1+\dots+x_n$ или $x_1+\dots+x_n+1$, где + это сложение по mod 2. Но в последнем случае БФ не является допустимой, т.к. при $x_1=\dots=x_n=1$ ее значение равно 1 и класс слабо ИС множеств для таких БФ оказывается совпадает с $\{N\}$, что неинтересно. Положим по определению

$$\beta_1=x_1, \quad \beta_2=x_1+x_2, \quad \beta_3=x_1+x_2+x_3, \dots$$

Теорема. Если β — допустимая линейная БФ, то класс $K(\beta)$ совпадает с одним из классов

$$K(x \vee y) \subset K(xy \vee xy) \subset K(x),$$

причем все включения строгие.

Доказательство. В [1] замечено, что если БФ β получена из БФ α в результате подстановки вместо некоторых переменных константы 0, то $K(\alpha) \subseteq K(\beta)$. Поэтому если β_n — линейная БФ как выше и $n > 3$, то, полагая $x_1=\dots=x_n=0$, получим $K(\beta_n) \subseteq K(\beta_3)=K(\gamma)$. По лемме $K(\gamma)=K(x \vee y)$. То, что включения классов, указанные в формулировке теоремы, будут строгими, доказано в [1].□

Перейдем теперь к рассмотрению классов слабо β-ИС множеств для допустимых самодвойственных БФ β, зависящих от четырех переменных. Назовем их классом самодвойственных слабо ИС множеств. Понятно, что такие БФ β записываются в виде

$$\beta = u\, f(x,y,z) \vee u\, f^*(x,y,z), \qquad (2)$$

где f должна быть допустимой БФ, а f^*- БФ, двойственная к f. При вычислении f^* пользуемся известным принципом двойственности:

$$\text{если } f(x,y,z) = f_0(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)), \text{ то}$$
$$f^*(x,y,z) = f_0(f^*_1(x,y,z), f^*_2(x,y,z), f^*_3(x,y,z)).$$

Как считали авторы статьи [2], допустимых БФ от трех переменных, с точностью до перестановки последних, оказалось 34 БФ. Там же показано, что если отождествить в 5 из них z с y и в 11 из них положить z=0, то для таких 16 БФ f оказывается K(f)=K($x \vee y$). Среди них есть и одна из трех трехместных самодвойственных функций: $\overline{xz} \vee xy \vee \overline{yz}$. Поэтому в представлении β и (2), полагая u=0, для таких 16 БФ получаем K(β) = K($x \vee y$). Итак, осталось рассмотреть 18 случаев для оставшихся 18 БФ. При приведении β из [2] к дизъюнктивной форме пользуемся тождествами:

$$vg \vee \bar v = g \vee \bar v, \qquad \bar vg \vee v = g \vee x, \qquad vg \vee v = v,$$

где g — БФ, а v — переменная.

$$\beta_1 = \bar u(xy \vee xz \vee yz) \vee u(x \vee y)(x \vee z)(y \vee z) = xy \vee xz \vee yz$$

$$\beta_2 = \bar u(\bar x(y\bar z \vee \bar yz) \vee ux(yz \vee \bar y\bar z) = \bar x(y\bar z \vee \bar yz) \vee x(yz \vee \bar y\bar z).$$

Эти равенства становятся понятными, т.к. $xy \vee xz \vee yz$ и $\bar x(y\bar z \vee \bar yz) \vee x(yz \vee \bar y\bar z)$ две из оставшихся трех самодвойственных трехместных БФ.

$$\beta_3 = \bar u(x(y \vee z) \vee u(x \vee yz).$$

Полагая z = 0, получаем $xy \vee u$. Отождествляя y с x, получаем $x \vee u$.

$$\beta_4 = \bar ux(y \vee \bar z) \vee u(x \vee y\bar z).$$

Полагая z = 0, получаем $x \vee ux \vee uy$. Отождествляя u с y, получаем $x \vee y$.

$$\beta_5 = \bar ux(yz \vee \bar y\bar z) \vee u(x \vee (y \vee z)(y \vee z)).$$

Полагая z = 0, получаем $x\bar y \vee ux \vee uy$. Отождествляя u с y, получаем $x \vee y$.

$$\beta_6 = \bar u(xyz \vee x\bar y\bar z \vee \bar x\bar yz) \vee u(x \vee y \vee z)(x \vee \bar y \vee \bar z)(\bar x \vee \bar y \vee z).$$

Полагая y = 0, получаем $x\bar z \vee \bar xz \vee ux \vee uz$. Отождествляя z с u, получаем $x \vee u$.

$$\beta_7 = \bar uxy\bar z \vee u(\bar x \vee y \vee \bar z).$$

Полагая z = 0, получаем $\bar uxy \vee u$. Отождествляя y с x, получаем $x \vee u$.

$$\beta_8 = \bar ux\bar y\bar z \vee u(x \vee \bar y \vee \bar z).$$

Полагая y =z = 0, получаем $x \vee u$.

$$\beta_9 = \bar u(x\bar y \vee xyz) \vee u(x \vee \bar y)(\bar x \vee y \vee z).$$

Полагая y = 0, получаем $\bar ux \vee u\bar x \vee uz$. Отождествляя z с u, получаем $x \vee u$.

$$\beta_{10} = \bar u(x\bar y \vee \bar xy\bar z) \vee u(x \vee \bar y)(\bar x \vee y \vee \bar z).$$

Полагая y = z = 0, получаем $x \vee u$.

$$\beta_{11} = \bar ux(y\bar z \vee \bar yz) \vee u(x \vee (y \vee \bar z)(\bar y \vee z)).$$

Полагая z = 0, получаем $xy \vee ux \vee u\bar y$. Отождествляя y с x, получаем $x \vee u$.

$$\beta_{12} = \bar ux(\bar y \vee \bar z) \vee u(x \vee \bar y\bar z).$$

Полагая y = z = 0, получаем $x \vee u$.

$$\beta_{13} = \bar u(xy \vee x\bar z \vee \bar xyz) \vee u(x \vee y)(x \vee \bar z)(\bar x \vee y \vee z).$$

Полагая z = 0, получаем $\bar ux \vee uy$. Отождествляя y с u, получаем $x \vee u$.

$$\beta_{14} = \bar u(xy\bar z \vee x\bar yz \vee \bar xyz) \vee u(x \vee y \vee \bar z)(x \vee \bar y \vee z)(\bar x \vee y \vee z).$$

Полагая z = 0, получаем $xy \vee u\bar x\bar y$. Отождествляя y с x, получаем $x \vee u$.

$$\beta_{15} = \bar u\bar x(y\bar z \vee \bar yz) \vee u(\bar x \vee (y \vee \bar z)(\bar y \vee z)).$$

Полагая x = 0, получаем $\bar uyz \vee u\bar y\bar z \vee u$. Отождествляя z с y, получаем $y \vee u$.

$$\beta_{16} = \bar u(x\bar y \vee \bar xyz) \vee u(x \vee \bar y)(\bar x \vee y \vee z).$$

Полагая y = 0, получаем $\bar ux \vee u\bar x \vee uz$. Отождествляя z с u, получаем $x \vee u$.

$$\beta_{17} = \bar{u}(x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z) \vee u(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).$$

Полагая $y = z = 0$, получаем $x \vee u$.

$$\beta_{18} = \bar{u}xyz \vee u(x \vee y \vee z) = xyz \vee ux \vee uy \vee uz.$$

Отождествляя z с u, получим $ux \vee uy \vee xy$.

Теорема. Класс самодвойственных слабо импликативных множеств ранга 4 совпадает с одним из классов

$$K(x \vee y) \subset K(xy \vee xz \vee yz) \subset K(x),$$

причем включения везде строгие.

Доказательство. То, что включения везде строгие, известно [1]. Из БФ β_3 - β_{17} в результате отождествления некоторых переменных или подстановки в них константы 0 получаем, с точностью до переименования переменных, БФ $x \vee y$. Поэтому для таких БФ β $K(\beta) = K(x \vee y)$ [1]. То, что $K(\beta_2) = K(x \vee y)$ следует из леммы. Остается сомнительным случай с БФ β_{18}, хотя имеем $K(\beta_{18}) \subseteq K(xy \vee xz \vee yz) = K(\beta_1)$. Докажем равенство этих классов.

Пусть ЧРФ $f(x,y,z)$ соответствует слабо β_1-ИС множеству A. Покажем, что A окажется и слабо β_2-ИС множеством. Для этого надо, используя f, построить ЧРФ $g(u,x,y,z)$, которая будет соответствовать A.

Начинаем одновременно вычислять $f(u,x,y)$ и $f(u,x,z)$. Заметим, что

$$\Theta = \beta_2(\chi(u), (x), \chi(y), \chi(z)) = 1$$

лишь тогда, когда $x,y,z \in A$, или $u,x \in A$, или $u,y \in A$, или $u,z \in A$. Если это так, то значение $f(u,x,y)$ или $f(u,x,z)$ определено, потому что

$$\beta_1(\chi(x_1), \chi(x_2), \chi(x_3)) = 1$$

только тогда, когда два числа из трех x_1, x_2, x_3 принадлежат A или все три. Теперь рассматриваем тот случай, который случится первым.

Случай 1. $f(u,x,y) = r$. Если $r = u$ и $u \in \bar{A}$, то $x \in \bar{A}$ или $y \in \bar{A}$. Значит $\Theta=0$ и поэтому можно положить $g(u,x,y,z) = u$.

Если $r = x$ и $x \in \bar{A}$, а $u \in A$, то $y \in \bar{A}$. Но возможно $\Theta=1$, если $z \in A$. Поэтому начинаем вычислять значение $f(u,z,a)$, где a — фиксированный элемент из A. Если оно будет вычислено и неравно a, то полагаем

$$g(u,x,y,z) = f(u,z,\bar{a}).$$

Иначе значение $g(u,x,y,z)$ неопределенно.

Если $r = y$, то поступаем аналогично с заменой x на y.

Случай 2. $f(u,x,z) = r$. Поступаем так же, как в случае 1. Надо только в нем заменить число y на z.

Наконец, если значения $f(u,x,y)$ и $f(u,x,z)$ неопределены, то $g(u,x,y,z)$ тоже.□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дегтев А. Н., Иванов Д. И. Слабо импликативно селекторные множества размерности 3 // Дискретная математика. 1999, Т. 11(№ 3). С. 126-132.

2. Дегтев А. Н., Иванов Д. И. Слабо комбинаторно-селекторные множества // Алгебра и логика. 1998. Т. 37. № 6. С. 627-636.