

Владимир Николаевич КУТРУНОВ —
зав. кафедрой математического моделирования,
доктор физико-математических наук,
профессор

УДК 519.6

ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД ПОИСКА ПСЕВДОРЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

АННОТАЦИЯ. Новый прямой метод решения систем алгебраических уравнений размерности (m, n) , опирается на проектирование произвольных точек n -мерного пространства на последовательность сужающихся аффинных пространств.

New direct method for solving linear systems of algebraic equations with (m, n) -matrix based on building projections of n -dimensional points on to sequence of embedded spaces proposed.

Анализ различных модификаций метода Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений показывает, что они опираются на последовательное исключение неизвестных. При этом процесс исключения содержит произвол как в выборе последовательности, в которой рассматриваются уравнения системы, так и в выборе последовательности, в которой исключаются неизвестные. Можно отметить и еще одну особенность этих методов: они состоят из многократно повторяемых двух действий.

Первое действие: какая-либо одна неизвестная величина из выбранного уравнения выражается через другие неизвестные величины, что соответствует получению общего решения этого уравнения. Вектор решения состоит из ряда произвольных компонент и одной компоненты, определяемой через них. Программируемая схема выбора исключаемого элемента содержит процедуру выяснения, не возникнет ли в результате этого выбора деление на нуль. Эта проверка нарушает единообразие процесса и является помехой для оптимального распараллеливания вычислений.

Второе действие связано с подстановкой выраженной неизвестной в оставшиеся уравнения, что и является собственно исключением и приводит к уменьшению на единицу числа решаемых уравнений и размерности вектора неизвестных.

К указанной схеме присоединяется еще и процедура обратного хода. Эта процедура включается, после того как из последнего уравнения системы будет выражено последнее неизвестное. При движении в обратном направлении последовательно определяются все неизвестные. Известно также, что в некоторых модификациях можно обойтись без процедуры обратного хода.

Исследование подобных методов исключения приводит к желанию разработать такой метод, который не зависел бы от выбора исключаемого элемента, что привело бы к ликвидации блока, анализирующего возможность исключения данной переменной.

Определим *аффинное множество (точек)* как множество решений, удовлетворяющих уравнению

$$Au^T = b^T, \quad (1)$$

где A — матрица размера $m \times n$, $m \leq n$. Предполагается, что ранг матрицы A равен m , u^T — искомая, а b^T — заданная точки (векторы-столбцы). Верхний индекс «Т» означает транспонирование. Можно показать, что если две точки v_1, v_2 принадлежат аффинному множеству, тогда и любая точка, лежащая на прямой, соединяющей их, также принадлежит этому аффинному множеству. Введем вектор u , соединяющий эти точки: $u = v_2 - v_1$. Так как обе точки удовлетворяют системе уравнений (1), то вектор u обязан удовлетворять соответствующей однородной системе:

$$Au^T = 0, \quad (2)$$

Размерность этого множества равна $n-m$, где n — число неизвестных, а m — число заданных уравнений, которое, по предположению, равно рангу матрицы A . Все точки, удовлетворяющие уравнению (1), образуют аффинное множество точек, а все векторы, удовлетворяющие уравнению (2) (покоординатные разности точек), лежащие в этом множестве, образуют соответствующее аффинное множество векторов.

Пусть дана произвольная точка $v \in R^n$. Найдем проекцию этой точки на аффинное множество, заданное равенством (1). Решение этой задачи известно из теории выпуклых множеств. Проекция w^T точки $v \in R^n$ имеет вид:

$$w^T = (E - A^T (AA^T)^{-1} A)v^T + A^T (AA^T)^{-1} b^T, \quad (3)$$

где AA^T — квадратная матрица размерности $m \times m$. Ранг матрицы AA^T , как и матрицы A , равен m , следовательно, обратная матрица $(AA^T)^{-1}$ существует.

Проекция w^T действительно принадлежит аффинному многообразию точек, задаваемых уравнением (1), что легко проверить прямой подстановкой w^T в уравнение (1). Вектор $w^T - v^T$, соединяющий произвольную проектируемую точку $v \in R^n$ с ее проекцией w^T , ортогонален любому вектору, лежащему в аффинном множестве, например вектору $w-x$, где x — произвольная точка этого аффинного множества. Утверждение проверяется вычислением скалярного произведения векторов с учетом формулы (3). Второе свойство полученной проекции формулируется в виде теоремы:

Теорема 1. Пусть дана алгебраическая система уравнений $Au^T = b^T$ с матрицей A размерности $m \times n$ и рангом m , тогда общее решение этой системы уравнений выражается через произвольную точку $p^T \in R^n$ и дается формулой:

$$u^T = (E - A^T (AA^T)^{-1} A)p^T + A^T (AA^T)^{-1} b^T. \quad (4)$$

Доказательство. Непосредственно подстановкой проверяется, что формула (4) действительно дает решение системы уравнений (1).

Для доказательства общности предположим, что некоторое решение u^T системы (1) не представляется формулой (4). Учитывая, что в формуле (4) точка $p^T \in R^n$ является произвольной, можно положить $p^T = u^T$ и подстановкой в (4) с учетом того, что $Au^T = b^T$, убедиться, что предположение не верно и решение u^T системы (1) включено в число решений, задаваемых формулой (4). Теорема доказана.

Решение (4) представим в матричной форме $u^T = \Phi p^T + D^T$, где $\Phi = E - A^T (AA^T)^{-1} A$ и $D^T = Qb^T = A^T (AA^T)^{-1} b^T$, $Q = A^T (AA^T)^{-1}$.

Теорема 2. Квадратная матрица Φ является проектором, матрица Q псевдообратной матрицей к матрице A , а вектор D^T нормальным псевдорешением системы уравнений (1). Более того, вектор D^T является нормальным решением этой системы.

Доказательство. Непосредственно видно, что матрица Φ симметрична, то есть $\Phi^T = \Phi$, и легко проверяются свойства, являющиеся определением проектора:

$$\Phi\Phi^T = \Phi^T\Phi = \Phi\Phi = \Phi, \quad (5)$$

Если положить $b^T = 0$, то формула (4), будучи общим решением системы уравнений (1), определяет общее решение соответствующей однородной системы. То есть множество

$$u^T = (E - A^T (AA^T)^{-1} A)p^T$$

является ядром матрицы A .

Далее, легко проверяется равенство $AQA=A$, что в соответствии с определением, например [1], означает, что матрица Q псевдообратна к матрице A . Псевдообратная матрица обладает многими интересными свойствами [1], среди которых — нахождение нормального псевдорешения u_0^T по формуле $u_0^T = Qb^T = D^T$.

Так как исходная система уравнений (1) по условию разрешима, то данное решение D является также и нормальным решением, что приводит к другой замечательной группе его свойств. Например, это решение является единственным из всех решений системы (1), ортогональным к ядру матрицы A , кроме того, оно имеет минимальную евклидову длину $|u_0^T|$. Не существует других нормальных решений системы (1).

Таким образом, общее решение (4) сконструировано из частного решения неоднородной системы уравнений (1), являющегося ее нормальным решением, и общего решения соответствующей однородной системы, являющегося ядром матрицы A . Эти две составляющих решения ортогональны между собой.

Формула (4) позволяет предложить метод решения алгебраической системы (1), основанный на последовательном решении ее отдельных уравнений. Пусть рассматривается единственное уравнение $su^T = q$. Роль матрицы A играет вектор s , а вектора b^T — число q . В случае одного уравнения легко вычисляются все необходимые величины формулы (4). Например, $(AA^T) = ss^T$, $(AA^T)^{-1} = 1/ss^T$. Выполнив все необходимые операции, в соответствии с правилом (4) можно записать его общее решение:

$$u^T = \left(E - \frac{s^T s}{ss^T} \right) p^T + \frac{s^T}{ss^T} q. \quad (6)$$

Заметим, что данная формула является общим решением одного алгебраического уравнения, содержащего n неизвестных, однако в отличие от методов, в основе которых лежит метод исключения, ни одна из неизвестных компонент решения не выделена. Все неизвестные равноправны. Как и следовало ожидать, решение имеет существенный произвол, задаваемый вектором p^T . Отметим также, что решение в виде (6) не существует, только если $ss^T = 0$, что означает равенство нулю всех коэффициентов уравнения $su^T = q$, выраженных вектором s . Отсюда следует, что если $q = 0$, то решением будет произвольный вектор $u^T = p^T$, а если $q \neq 0$, то уравнение противоречиво и решений нет.

Для получения рекуррентных формул запишем вид общего решения после использования первых i уравнений исходной алгебраической системы (1):

$$u^T = \Phi_i p^T + D_i^T, \quad (7)$$

где для $i = 0$ имеем по определению $\Phi_0 = E$, $D_0^T = 0$. Следовательно, до начала рекуррентного процесса решением системы уравнений считается все множество точек пространства R^n . Так как решение (7) должно удовлетворять следующему уравнению $a_{i+1} u^T = b_{i+1}$ из системы уравнений (1), то после подстановки получим: $a_{i+1} (\Phi_i p^T + D_i^T) = b_{i+1}$. Отсюда вытекает единственное линейное уравнение для определения вектора p^T : $a_{i+1} \Phi_i p^T = -a_{i+1} D_i^T + b_{i+1}$. Решение этого уравнения записывается по формуле (6), где надо положить $s = a_{i+1} \Phi_i$, $q = -a_{i+1} D_i^T + b_{i+1}$.

Если в соответствии с (5) выполнить упрощение $ss^T = a_{i+1}\Phi_i\Phi_i^T a_{i+1}^T = a_{i+1}\Phi_i a_{i+1}^T$, то решение примет вид:

$$p^T = \left[\Phi_i - \frac{\Phi_i a_{i+1}^T a_{i+1} \Phi_i}{a_{i+1} \Phi_i a_{i+1}^T} \right] q^T + \frac{\Phi_i a_{i+1}^T}{a_{i+1} \Phi_i a_{i+1}^T} [b_{i+1} - a_{i+1} D_i^T]. \quad (8)$$

Здесь $q^T \in R^n$ снова произвольный вектор, который можно переобозначить через p^T . Подстановка (8) в (7), учет свойств (5) и переобозначение $q^T = p^T$ приводит к записи решения первых $i+1$ уравнений из системы (1) через произвольный вектор p^T :

$$u^T = \left[\Phi_i - \frac{\Phi_i a_{i+1}^T a_{i+1} \Phi_i}{a_{i+1} \Phi_i a_{i+1}^T} \right] p^T + \frac{\Phi_i a_{i+1}^T}{a_{i+1} \Phi_i a_{i+1}^T} [b_{i+1} - a_{i+1} D_i^T] + D_i^T. \quad (9)$$

Предположим, что это решение снова имеет вид (7), но для увеличенного на единицу числа уравнений:

$$u^T = \Phi_{i+1} p^T + D_{i+1}^T. \quad (10)$$

Тогда из сравнения (9) и (10) получаются рекуррентные формулы для вычисления последовательностей матриц Φ_i , D_i :

$$\Phi_{i+1} = \left[\Phi_i - \frac{\Phi_i a_{i+1}^T a_{i+1} \Phi_i}{a_{i+1} \Phi_i a_{i+1}^T} \right], \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad (11)$$

$$D_{i+1}^T = \frac{\Phi_i a_{i+1}^T}{a_{i+1} \Phi_i a_{i+1}^T} [b_{i+1} - a_{i+1} D_i^T] + D_i^T.$$

Здесь m число уравнений в исходной алгебраической системе (1), кроме того, $\Phi_0 = E$ и $D_0 = 0$. Следовательно, сконструирован новый метод получения общего решения, основанный на последовательном решении уравнений из системы (1). Метод заключается в последовательном вычислении матриц и векторов по формулам (11) и записи конечного результата через произвольный вектор p^T :

$$u^T = \Phi_m p^T + D_m^T. \quad (12)$$

Для использования результата в теоретических исследованиях изучим некоторые свойства проекторов Φ_i и псевдообратных матриц Q_i .

Теорема 3. Элементы матриц Φ_i по модулю не превосходят единицы, а их диагональные элементы неотрицательны, более того, сумма квадратов элементов любой строки (столбца) матрицы не превосходит единицы.

Доказательство. Действительно, выделим, например, из произвольного проектора Φ строку с номером i с помощью единичного вектора e , у которого на месте i стоит единица, а прочие элементы нули: $e = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Строка матрицы, которую ниже будем считать вектором, равна произведению $e\Phi$. Умножив этот вектор сам на себя, найдем квадрат его длины: $e\Phi\Phi^T e^T$. Очевидно, что, во-первых, $e\Phi\Phi^T e^T \geq 0$ и, во-вторых, на этом основании, а также в силу свойств проектора $e\Phi\Phi^T e^T = e\Phi e^T \geq 0$. Так как число $e\Phi e^T$ является i -ым диагональным элементом матрицы Φ , то предыдущим неравенством доказано, что диагональные элементы этой матрицы не отрицательны. С другой стороны, в ортогональной системе координат для равенства квадрата длины вектора модулю какой-либо его координаты необходимо, чтобы все его координаты по модулю не превосходили единицу. Более того,

обе ситуации возможны, только если сумма квадратов элементов любой строки (или, в силу симметрии, любого столбца) матрицы не превосходит единицы.

Доказанная теорема может обозначать хорошую численную устойчивость метода, так как процесс вычисления матриц Φ_i будет происходить в ограниченном диапазоне чисел.

Докажем теперь, что решение системы уравнений (1) по формулам (11), (12) в случае невырожденной квадратной матрицы A приводит к нахождению единственного решения задачи.

Лемма 1. Для $k \leq i$ имеет место тождество $\Phi_i a_k^T \equiv 0$.

Доказательство. Для доказательства вычислим указанное произведение, воспользовавшись представлением (11) матрицы Φ_i :

$$\Phi_i a_k^T = \left(\Phi_{i-1} - \frac{\Phi_{i-1} a_i^T a_i \Phi_{i-1}}{a_i \Phi_{i-1} a_i^T} \right) a_k^T = \left(E - \frac{\Phi_{i-1} a_i^T a_i}{a_i \Phi_{i-1} a_i^T} \right) \Phi_{i-1} a_k^T.$$

Из формулы следует, что для нахождения $\Phi_i a_k^T$ необходимо вычислить $\Phi_{i-1} a_k^T$, что приводит к рекуррентной зависимости. Возникшее рекуррентное соотношение, с учетом того, что $k \leq i$, сводит в конечном итоге нахождение $\Phi_i a_k^T$ к вычислению $\Phi_k a_k^T$. Для последнего выражения имеем:

$$\Phi_k a_k^T = \left(\Phi_{k-1} - \frac{\Phi_{k-1} a_k^T a_k \Phi_{k-1}}{a_k \Phi_{k-1} a_k^T} \right) a_k^T = \left(\Phi_{k-1} a_k^T - \frac{\Phi_{k-1} a_k^T a_k \Phi_{k-1} a_k^T}{a_k \Phi_{k-1} a_k^T} \right)$$

Так как величина $a_k \Phi_{k-1} a_k^T$ является скаляром, то в предыдущей формуле возможно сокращение, откуда уже следует $\Phi_k a_k^T \equiv 0$. Двигаясь по рекуррентному соотношению в обратном направлении, получаем утверждение леммы.

Теорема 4. Если матрица A является невырожденной квадратной матрицей размерности n , то $\Phi_n \equiv 0$.

Доказательство. Так как, по предположению, матрица A невырожденная, то ее строки a_k , рассматриваемые как векторы, являются линейно независимыми и, следовательно, образуют базис в R^n . Разложим произвольный вектор p^T по указанному базису $p^T = \sum_{k=1}^n \beta_k a_k^T$ и выполним следующие выкладки:

$$\Phi_n p^T = \Phi_n \sum_{k=1}^n \beta_k a_k^T \text{ и выполним следующие выкладки:}$$

$$\Phi_n p^T = \Phi_n \sum_{k=1}^n \beta_k a_k^T = \sum_{k=1}^n \beta_k \Phi_n a_k^T.$$

Так как $k \leq n$, то на основании леммы 1 $\Phi_n a_k^T \equiv 0$, следовательно, $\Phi_n p^T \equiv 0$.

Из-за произвольности вектора p^T отсюда следует утверждение теоремы.

Следствие. Если матрица A является невырожденной квадратной матрицей размерности n , то ее решение имеет вид:

$$u^T = D_n^T = \frac{\Phi_{n-1} a_n^T}{a_n \Phi_{n-1} a_n^T} [b_n - a_n D_{n-1}^T] + D_{n-1}^T. \quad (13)$$

Доказательство. Из установленной выше рекуррентной зависимости (11), (12) следует, что окончательное решение системы уравнений записывается после использования ее последнего уравнения и имеет вид:

$$u^T = \Phi_n p^T + D_n^T.$$

Так как на основании теоремы 4 $\Phi_n \equiv 0$, то из общего решения следует $u^T = D_n^T$, а из второй формулы (11) утверждение следствия (13).

Как видно из формулы (13), общее решение не зависит от произвольного вектора, следовательно, оно является единственным.

Теорема 5. Произведение проекторов Φ с разными номерами равно проектору Φ с наибольшим номером. Проектор с некоторым номером может быть выражен через проекторы с меньшими номерами.

Доказательство. Запишем первое рекуррентное равенство в (12) в следующей форме:

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i \left[E - \frac{a_{i+1}^T a_{i+1} \Phi_i}{a_{i+1} \Phi_i a_{i+1}^T} \right],$$

Покажем вычисление произведения $\Phi_i \Phi_j$. Пусть $j > i$, тогда на основании предыдущего

$$\begin{aligned} \Phi_i \Phi_j &= \Phi_i \left(\Phi_{j-1} - \frac{\Phi_{j-1} a_j^T a_j \Phi_{j-1}}{a_j \Phi_{j-1} a_j^T} \right) = \Phi_i \Phi_{j-1} \left(E - \frac{a_j^T a_j \Phi_{j-1}}{a_j \Phi_{j-1} a_j^T} \right) = \\ &= \dots = \Phi_i \Phi_i \prod_{k=i+1}^j \left(E - \frac{a_k^T a_k \Phi_{k-1}}{a_k \Phi_{k-1} a_k^T} \right) = \Phi_i \prod_{k=i+1}^j \left(E - \frac{a_k^T a_k \Phi_{k-1}}{a_k \Phi_{k-1} a_k^T} \right) = \\ &= \Phi_{i+1} \prod_{k=i+2}^j \left(E - \frac{a_k^T a_k \Phi_{k-1}}{a_k \Phi_{k-1} a_k^T} \right) = \dots = \Phi_{j-1} \left(E - \frac{a_j^T a_j \Phi_{j-1}}{a_j \Phi_{j-1} a_j^T} \right) = \Phi_j. \end{aligned}$$

Отсюда следуют два результата

$$\Phi_i \Phi_j = \Phi_j, \quad j > i$$

$$\Phi_j = \Phi_i \prod_{k=i+1}^j \left(E - \frac{a_k^T a_k \Phi_{k-1}}{a_k \Phi_{k-1} a_k^T} \right) \quad (14)$$

Так как любой проектор Φ симметричен, то, транспонируя равенства (14), получим:

$$\Phi_j \Phi_i = \Phi_j, \quad j > i$$

$$\Phi_j = \prod_{k=j}^{i+1} \left(E - \frac{\Phi_{k-1} a_k^T a_k}{a_k \Phi_{k-1} a_k^T} \right) \Phi_i. \quad (15)$$

Из первых формул (14), (15) следует, что произведение матриц Φ_i, Φ_j коммутативно, результатом их произведения будет одна из матриц сомножителей с наибольшим номером. Так как во вторых формулах $i < j$, то, полагая $i=0$ и учитывая, что $\Phi_0 = E$, получим представление:

$$\begin{aligned} \Phi_j &= \prod_{k=1}^j \left(E - \frac{a_k^T a_k \Phi_{k-1}}{a_k \Phi_{k-1} a_k^T} \right) = \prod_{k=j}^i \left(E - \frac{\Phi_{k-1} a_k^T a_k}{a_k \Phi_{k-1} a_k^T} \right) = \\ &= \prod_{k=1}^j \left(E - \frac{\Phi_{j-k} a_{j-k+1}^T a_{j-k+1}}{a_{j-k+1} \Phi_{j-k} a_{j-k+1}^T} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Теорема доказана.

Введем в рассмотрение векторы

$$n_i = \frac{\Phi_{i-1} a_i^T}{\sqrt{a_i \Phi_{i-1} a_i^T}} = \frac{\Phi_{i-1} a_i^T}{\sqrt{a_i \Phi_{i-1} \Phi_{i-1} a_i^T}} = \frac{\Phi_{i-1} a_i^T}{|a_i \Phi_{i-1}|}, \quad i \leq m. \quad (17)$$

Теорема 6. Система векторов $\{n_i\}, i = 1, 2, \dots, m$ ортонормированна.

Доказательство.

$$\begin{aligned} n_i \cdot n_j &= n_i n_j^T = \frac{a_i \Phi_{i-1} \Phi_{j-1} a_j^T}{|a_i \Phi_{i-1}| |a_j \Phi_{j-1}|} = \\ &= \frac{a_i \Phi_{\max(i-1, j-1)} a_j^T}{\sqrt{a_i \Phi_{i-1} \Phi_{i-1} a_i^T} \sqrt{a_j \Phi_{j-1} \Phi_{j-1} a_j^T}} = \frac{a_i \Phi_{\max(i-1, j-1)} a_j^T}{\sqrt{a_i \Phi_{i-1} a_i^T} \sqrt{a_j \Phi_{j-1} a_j^T}} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \end{aligned}$$

В выкладках использовалось свойство матрицы $\Phi, \Phi\Phi = \Phi$ и его следствие $a_i \Phi_{i-1} a_i^T = a_i \Phi_{i-1} \Phi_{i-1} a_i^T = |a_i \Phi_{i-1}|^2$, а также теорема 5 о произведении проекторов с разными индексами. При совпадении индексов числитель и знаменатель сокращаются а при несовпадении в числителе получается нуль на основании доказанной выше леммы.

Введенные единичные векторы позволяют записать формулы для вычисления проектора Φ_i через проекторы с меньшими номерами в факторизованной форме.

Теорема 7. Факторизованная форма проектора Φ_i дается формулой:

$$\Phi_i = E - \sum_{k=1}^i n_k^T n_k = E - \sum_{k=1}^i \frac{1}{|z_k|^2} z_k^T z_k, \quad z_k = a_k \Phi_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, i-1, i. \quad \Phi_0 = E. \quad (18)$$

Доказательство. Воспользуемся рекуррентной формулой (11) для проектора Φ_i :

$$\Phi_i = \Phi_{i-1} - \frac{\Phi_{i-1} a_i^T a_i \Phi_{i-1}}{a_i \Phi_{i-1} a_i^T} = \Phi_{i-2} - \frac{\Phi_{i-2} a_{i-1}^T a_{i-1} \Phi_{i-2}}{a_{i-1} \Phi_{i-2} a_{i-1}^T} - \frac{\Phi_{i-1} a_i^T a_i \Phi_{i-1}}{a_i \Phi_{i-1} a_i^T} = \dots$$

Последовательная замена проекторов по указанной схеме с последующим учетом обозначений (17) приводит к представлению (18). Теорема доказана.

Замечание 1. Представление (18) приводит к компактной схеме счета по рекуррентным последовательностям (11), когда требуется вычислить только нормальное решение D_m (или решение D_n , если $m=n$ и A невырожденная матрица). В этом случае проекторы Φ_i являются промежуточными результатами. Из второй формулы (11) следует, что для следующего рекуррентного вычисления потребуется знать только величину

$$\frac{1}{a_{i+1} \Phi_i a_{i+1}^T} a_{i+1} \Phi_i = \frac{z_{i+1}}{|z_{i+1}|^2}.$$

Следовательно, расчет сводится к вычислению вектора z_{i+1} и квадрата его модуля.

Этот вектор может быть вычислен из формулы (18) умножением равенства на a_{i+1}

$$z_{i+1} = a_{i+1} \Phi_i = a_{i+1} - \sum_{k=1}^i \frac{1}{|z_k|^2} (a_{i+1} z_k^T) z_k, \quad z_k = a_k \Phi_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, i-1, i. \quad z_1 = a_1. \quad (19)$$

Формула (19) привела к исключению проектора Φ из расчетов. Рекуррентные зависимости (11) можно переписать в другом виде:

$$z_{i+1} = \begin{cases} a_1, & i = 0 \\ a_{i+1} - \sum_{k=1}^i \frac{1}{|z_k|^2} (a_{i+1} z_k^T) z_k, & i > 0 \end{cases} \quad (20)$$

$$D_{i+1}^T = \frac{z_{i+1}^T}{|z_{i+1}|^2} [b_{i+1} - a_{i+1} D_i^T] + D_i^T. \quad (21)$$

Здесь, для вычисления вектора z_{i+1} нужны векторы z_k с предыдущих рекуррентных вычислений и вектор a_{i+1} , являющийся строкой матрицы A с номером $i+1$. Запомнить вектор z_{i+1} можно на месте использованной строки a_{i+1} матрицы A . В конце решения задачи, на месте этой матрицы будут записаны все векторы z_i и если потребуется восстановление проекторов Φ_i на любом этапе рекуррентных вычислений, то это можно выполнить с помощью данной матрицы по формулам (18). С другой стороны, для вычисления общего решения знать проектор Φ не обязательно, проще пользоваться факторизованной формулой. Действительно, пусть требуется записать общее решение системы первых i уравнений (1). Ответ записывается по формуле (7) с учетом факторизации (18):

$$u^T = \left(E - \sum_{k=1}^i \frac{1}{|z_k|^2} z_k^T z_k \right) p^T + D_i^T, \quad z_1 = a_1.$$

Векторы z_k будут строками матрицы A , и если мы хотим после полного решения задачи восстанавливать промежуточные общие решения для любого номера $i \leq m$, то придется запомнить всю последовательность нормальных псевдорешений D_i^T .

Два новых разработанных алгоритма имеют ряд привлекательных вычислительных особенностей. В частности, они пригодны для получения нормальных псевдорешений систем линейных уравнений (1). Так как каждый вычислительный этап использует только одно уравнение системы и не изменяет другие ее уравнения, а также из-за симметрии матриц Φ , могут быть разработаны варианты алгоритмов, эффективно использующие память компьютера. В том числе, это относится к случаю разреженных матриц. Вследствие ограниченного диапазона представления чисел алгоритмы должны обладать вычислительной устойчивостью, а из-за отсутствия выбора исключаемой переменной должны быть эффективными для распараллеливания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М., 1984. 320 с.