Василий Александрович БАРИНОВ —
доцент кафедры математического моделирования,
кандидат физико-математических наук,
Сергей Иванович ПЕРЕГУДИН —
докторант факультета прикладной математики – процессов управления СПбГУ,
кандидат физико-математических наук

УДК 532.591

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ НАД ДЕФОРМИРУЕМЫМ ДНОМ

АННОТАЦИЯ. В статье рассматривается нелинейная задача о распространении длинных волн над дном, которое может изменяться, деформироваться и перемещаться. Рассмотрен случай потенциального движения двух слоев идеальной несжимаемой однородной жидкости. Представленная математическая модель реализована в линейной аппроксимации с учетом дисперсии. Для бегущих волн получено соотношение, характеризующее зависимость частоты ω от волнового числа k, реологических свойств грунта и гидродинамических характеристик каждого слоя жидкости.

The article is devoted to nonlinear problem about distribution long waves above a bottom which can change, deform and move is considered. The partial case was researched. It is potential movement of two layers of homogeneous non compressible fluid. This mathematical model is given in linear approximation with dispersion. During the research for progressive waves the dispersion correlation has been advanced which characterize the dependence of frequency ω upon the waves number k, rheological properties of the ground and hydrodynamic characteristics of the any water layers.

1. В естественных природных водоемах достаточно редки случаи, когда дно акватории твердое, непроницаемое и недеформируемое. Как правило, дно реки или моря представляет собой смесь, компонентами которой являются песок, ил, глина или гравий. В результате воздействия потока жидкости, поверхность дна принимает волнообразную форму. Такого рода песчаные волны можно наблюдать на отмелях рек после схода воды, подобные песчаные волны, только гораздо более высокие, образуются в пустыне в виде дюн и барханов. Основной характеристикой взаимодействия потоков жидкости (газа) с поверхностью сыпучей среды (как и жидкости) [10] является скорость относительного движения. Поскольку практически деформируемая среда всегда остается неподвижной, этой величиной оказывается скорость абсолютного движения потоков u.

Первые экспериментальные исследования песчаных волн были произведены Диконом [4], причем им была установлена приближенная зависимость между скоростью потока и скоростью движения гребня песчаных волн. В его опытах хорошо оформленные песчаные волны начинали появляться при скорости потока 0,46 м/сек. При достижении предельной скорости 0,88 м/сек. в опытах Дикона песчаные волны размывались, исчезали и песок переносился во взвешенном состоянии.

Первое теоретическое исследование песчаных волн принадлежит Экснеру (1920 г.) [2, 4], который, исходя из своей приближенной теории, а также из проведенных им экспериментов в лотке с водным потоком и в аэродинамической трубе, дал в основном правильное описание механической стороны явления. Более того, для плоского случая им выведено уравнение, связывающее расход $Q(x,t)$ донного вещества с формой поверхности раздела $\eta(x,t)$ жидкого и донного слоев. Этот расход характеризуется реологией грунта. Для преодоления этой трудности Экснер принимает гипотезу о линейной зависимости расхода от донной скорости u_b, то есть $Q=\kappa u_b$. Из допущения постоянства расхода в водном слое следует равенство горизонтальных компонент донной и водной скорости. М. А. Великанов [4] обобщает гипотезу Экснера, полагая произвольную зависимость расхода Q от донной скорости, то есть $Q(x,t)=Q(u_b(x,t))$.

Ф. И. Франкль рассмотрел задачу о плоском движении песчаных волн с более полным учетом гидродинамики водного слоя, предполагая движение невозмущенного потока потенциальным с постоянной скоростью, а сами возмущения — величинами малыми [7]. В статье Ю. З. Алешкова [2] рассмотрен общий случай — непотенциальное движение слоя неоднородной жидкости над сыпучей средой, в [7] — аналогичная задача безвихревого движения двух слоев однородной жидкости. В работах [1,5] изучены вопросы распространения длинных волн над твердым дном.

В данной работе рассматривается задача о распространении длинных волн в двухслойной жидкости над деформируемым дном. Представленная длинноволновая модель реализована без учета и с учетом дисперсии.

2. Рассмотрим задачу о движении двух слоев идеальной тяжелой несжимаемой жидкости над деформируемым дном. Смоделируем рассматриваемую среду как трехслойную — два слоя однородной жидкости, грунт. Нижняя жидкость имеет плотность ρ_1, верхняя — ρ_2. Расположим декартову прямоугольную систему координат таким образом, что плоскость $z_1=0$ совпадает с невозмущенной поверхностью раздела водных слоев, ось z направлена вертикально вверх. Толщина верхнего слоя в невозмущенном состоянии — H_2^*, нижний слой в предположении горизонтального дна имеет высоту H_0^*. Свободная поверхность в текущий момент времени t_1 имеет вид $z_1=H_2^*+\eta_2^*(x_1,y_1,t_1)$, поверхность раздела водных слоев — $z_1=\eta_1^*(x_1,y_1,t_1)$, поверхность раздела жидкость–грунт — $z_1=-H^*(x_1,y_1,t_1)=-H_0^*+\eta^*(x_1,y_1,t_1)$. На поверхности раздела верхний слой — воздух (свободной поверхности), и на поверхности раздела водных слоев образуются волны. При движении нижнего слоя происходит взаимодействие жидкости с грунтом, частицы донного слоя при этом также приходят в движение.

Движение жидкости в слое будем считать потенциальным. Тогда потенциал скорости $\varphi_j^*=\varphi_j^*(x_1,y_1,z_1,t_1)$, $j=1,2$ в силу уравнения неразрывности [6] удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi_j^*+\varphi_{jz_1z_1}^*=0.$$

Давление в жидкости определяется из интеграла Лагранжа-Коши

$$\frac{p_j}{\rho_j}+\varphi_{jt_1}^*+\frac{1}{2}\left|\nabla\varphi_j^*\right|^2+\frac{1}{2}\left(\varphi_{jz_1}^*\right)^2+gz_1=f_j^*(t_1),$$

здесь g — ускорение силы тяжести, $f_j^*(t_1)$ — произвольная функция времени. На свободной поверхности выполняется кинематическое [1]

$$\eta_{2t_1}^*+\nabla\eta_2^*\nabla\varphi_2^*=\varphi_{2z_1}^*,\qquad z_1=H_2^*+\eta_2^*(x_1,\,y_1,t_1)$$

и динамическое, при постоянстве давления

$$\frac{p_2^0}{\rho_2}+\varphi_{2t_1}^*+\frac{1}{2}\left|\nabla\varphi_2^*\right|^2+\frac{1}{2}\left(\varphi_{2z_1}^*\right)^2+g(H_2^*+\eta_2^*)=f_2^*(t_1),\qquad z_1=H_2^*+\eta_2^*(x_1,\,y_1,t_1),$$

условия. На поверхности раздела жидких сред также имеет место кинематическое

$$\eta_{1t_1}^*+\nabla\eta_1^*\nabla\varphi_j^*=\varphi_{jz_1}^*,\qquad z_1=\eta_1^*(x_1,\,y_1,t_1)$$

и динамическое

$$\rho_1\left[\varphi^*_{1t_1}+\frac{1}{2}|\nabla\varphi^*_1|^2+\frac{1}{2}(\varphi^*_{1z_1})^2\right]-\rho_2\left[\varphi^*_{2t_1}+\frac{1}{2}|\nabla\varphi^*_2|^2+\frac{1}{2}(\varphi^*_{2z_1})^2\right]+g(\rho_1-\rho_2)\eta^*_1=\rho_1 f^*_1-\rho_2 f^*_2,$$ условия.

На поверхности раздела жидкость–грунт граничные условия примут вид [2, 4, 7, 8]:

$$\eta^*_{t_1}+\nabla\eta^*_1\nabla\varphi^*_1=\varphi^*_{1z_1},\qquad \eta^*_{t_1}+\frac{\partial Q^*_x}{\partial x}+\frac{\partial Q^*_y}{\partial y}=0,\qquad z_1=-H^*_0+\eta^*(x_1,y_1,t_1),$$

где Q^*_x, Q^*_y — компоненты вектора, характеризующего твердый расход.

Упростим исходную задачу, используя представление о длинных волнах [1, 5]. Введем безразмерные координаты и время

$$x_1=Lx,\quad y_1=Ly,\quad z_1=H_*z,\quad t_1=\frac{L}{\sqrt{gH_*}}t,\quad H^*_0=H_*H_0,\quad H^*_2=H_*H_2,$$

а также безразмерные искомые функции

$$\varphi^*_j=L\sqrt{gH_*}\varphi^*_j,\eta^*=H_*\eta,\eta^*_j=H_*\eta_j,f^*_j=gH_*f_j,Q^*_x=H_*\sqrt{gH_*}Q_x,Q^*_y=H_*\sqrt{gH_*}Q_y,$$

здесь L и H_* — соответственно характерный горизонтальный и вертикальный размеры. Исходная задача в безразмерном виде при постоянстве давления на свободной поверхности примет вид:

$$\mu\Delta\varphi_j+\varphi_{jzz}=0,\qquad \mu=\left(\frac{H_*}{L}\right)^2,$$

$$\mu(\eta_{2t}+\nabla\eta_2\nabla\varphi_2)=\varphi_{2z},\quad \varphi_{2t}+\frac{1}{2}|\nabla\varphi_2|^2+\frac{1}{2\mu}(\varphi_{2z})^2+H_2+\eta_2=f_2(t),\quad z=H_2+\eta_2(x,y,t),$$

$$\mu(\eta_{1t}+\nabla\eta_1\nabla\varphi j)=\varphi_{jz},\ \rho_1\left[\varphi_{1t}+\frac{1}{2}|\nabla\varphi_1|^2+\frac{1}{2}(\varphi_{1z})^2\right]-\rho_2\left[\varphi_{2t}+\frac{1}{2}|\nabla\varphi_2|^2+\frac{1}{2}(\varphi_{2z})^2\right]+$$
$$+(\rho_1-\rho_2)\eta_1=\rho_1 f_1-\rho_2 f_2,\qquad z=\eta_1,$$

$$\mu(\eta_t+\nabla\eta\nabla\varphi_1)=\varphi_{1z},\quad \eta_t+\operatorname{div}Q=0,\quad z=-H_0+\eta(x,t).$$

Проинтегрировав каждое уравнение Лапласа по переменной z с учетом соответствующих граничных условий [1], получим:

$$(\eta_1-\eta)_t+div\int\limits_{-H_0+\eta(x,y,t)}^{\eta_1(x,y,t)}\nabla\varphi_1 dz=0,\tag{1}$$

$$(\eta_2-\eta_1)_t+div\int\limits_{\eta_1(x,y,t)}^{H_2+\eta_2(x,y,t)}\nabla\varphi_2 dz=0.\tag{2}$$

Предположим, что зависимость твердого расхода от придонной скорости жидкости выражается линейным соотношением [2, 4, 7, 8]

$$Q_x(x,y,t)=\kappa_1\varphi_{1x}\big|_{z=-H_0+\eta(x,y,t)},\qquad Q_y(x,y,t)=\kappa_2\varphi_{1y}\big|_{z=-H_0+\eta(x,y,t)},$$

где значение κ_1 и κ_2 характеризуется реологией грунта и для каждой акватории может быть определено экспериментально.

Рассматривая уравнения неразрывности с соответствующими граничными условиями и представляя потенциалы скорости в виде степенного ряда по дисперсионному параметру μ [1]

$$\varphi_j(x,z,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\varphi_{ji}(x,y,z,t)\mu^i,$$

приходим к выводу, что зависимость $\varphi_j(x,y,z,t)$ от вертикальной координаты имеет вид:

$$\begin{aligned}&\varphi_1(x,y,z,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(x,y,t;\mu)(z+H_0-\eta(x,y,t))^k,\\&\varphi_2(x,y,z,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(x,y,t;\mu)(z-\eta_1(x,y,t))^k.\end{aligned}\tag{3}$$

Произведя необходимое дифференцирование, заключаем, что уравнения Лапласа в длинноволновом приближении эквивалентны рекуррентным соотношениям для коэффициентов степенного ряда

$$\alpha_{k+2} = \mu\frac{(k+1)\left[2\nabla\eta\,\nabla\alpha_{(k+1)} + \Delta\eta\alpha_{k+1}\right] - \Delta\alpha_k}{(k+1)(k+2)\left(1+\mu|\nabla\eta|^2\right)},$$
$$\beta_{k+2} = \mu\frac{(k+1)\left[2\nabla\eta_1\,\nabla\beta_{(k+1)} + \Delta\eta_1\beta_{k+1}\right] - \Delta\beta_k}{(k+1)(k+2)\left(1+\mu|\nabla\eta_1|^2\right)}. \qquad k \ge 0. \qquad (4)$$

Кинематические условия на поверхности деформируемого дна и на поверхности раздела означают

$$\alpha_1 = \mu\frac{\eta_t + \nabla\eta\nabla\alpha}{1+\mu|\nabla\eta|^2}, \quad \beta_1 = \mu\frac{\eta_{1t} + \nabla\eta_1\nabla\beta}{1+\mu|\nabla\eta_1|^2}, \qquad \alpha = \alpha_0,\ \beta = \beta_0, \qquad (5)$$

граничное условие, связывающее форму поверхности дна с твердым расходом:

$$\eta_t + \kappa_1\left[\alpha_{xx} - \eta_{xx}\alpha_1 - \eta_x\alpha_{1x}\right] + \kappa_2\left[\alpha_{yy} - \eta_{yy}\alpha_1 - \eta_y\alpha_{1y}\right] = 0. \qquad (6)$$

Из рекуррентных соотношений (4) нетрудно видеть, что коэффициенты α_1, α_2, β_1, β_2 имеют порядок μ, $\alpha_3, \alpha_4, \beta_3, \beta_4$ — порядок μ^2, остальные α_k, β_k, $k \ge 5$ будут иметь порядок не ниже μ^3. С точностью μ^2 приведем приближенные выражения для $\alpha_k, \beta_k, k \le 4$:

$$\alpha_1 = \mu(\eta_t + \nabla\eta\,\nabla\alpha) - \mu^2|\nabla\eta|^2(\eta_t + \nabla\eta\,\nabla\alpha),\ \beta_1 = \mu(\eta_{1t} + \nabla\eta_1\,\nabla\beta) - \mu^2|\nabla\eta_1|^2(\eta_{1t} + \nabla\eta_1\,\nabla\beta),$$
$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}\mu\Delta\alpha + \frac{1}{2}\mu^2\left[\nabla(\nabla\eta(\eta_t + \nabla\eta\,\nabla\alpha)) + \nabla\eta\,\nabla(\eta_t + \nabla\eta\,\nabla\alpha) + |\nabla\eta|^2\Delta\alpha\right]$$
$$\beta_2 = -\frac{1}{2}\mu\Delta\beta + \frac{1}{2}\mu^2\left[\nabla(\nabla\eta_1(\eta_{1t} + \nabla\eta_1\,\nabla\beta)) + \nabla\eta_1\,\nabla(\eta_{1t} + \nabla\eta_1\,\nabla\beta) + |\nabla\eta_1|^2\Delta\beta\right] \qquad (7)$$
$$\alpha_3 = -\frac{\mu^2}{6}\left[\Delta(\eta_t + \nabla\eta\,\nabla\alpha) + \nabla(\nabla\eta\,\Delta\alpha) + \nabla\eta\,\nabla(\Delta\alpha)\right] \qquad \alpha_4 = \frac{1}{24}\mu^2\Delta^2\alpha,$$
$$\beta_3 = -\frac{\mu^2}{6}\left[\Delta(\eta_{1t} + \nabla\eta_1\,\nabla\beta) + \nabla(\nabla\eta_1\,\Delta\beta) + \nabla\eta_1\,\nabla(\Delta\beta)\right] \qquad \beta_4 = \frac{1}{24}\mu^2\Delta^2\beta.$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{-H_0+\eta(x,y,t)}^{\eta_1(x,y,t)} (z + H_0 - \eta(x,y,t))^k dz = \frac{1}{k+1}\left[\eta_1(x,y,t) + H_0 - \eta(x,y,t)\right]^{k+1} = \frac{1}{k+1}h_1(x,y,t)^{k+1},$$
$$\int\limits_{\eta_1(x,y,t)}^{H_2+\eta_2(x,y,t)} (z - \eta_1(x,y,t))^k dz = \frac{1}{k+1}\left[H_2 + \eta_2(x,y,t) - \eta_1(x,y,t)\right]^{k+1} = \frac{1}{k+1}h_2(x,y,t)^{k+1},$$

равенства (1), (2) можно представить в виде:

$$h_{1t} + \operatorname{div}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\nabla\alpha_k}{k+1} - \nabla\eta\ \alpha_{(k+1)}\right)h_1^{k+1} = 0, \qquad (8)$$
$$h_{2t} + \operatorname{div}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\nabla\beta_k}{k+1} - \nabla\eta_1\ \beta_{(k+1)}\right)h_2^{k+1} = 0. \qquad (9)$$

Динамическое условие на поверхности раздела и на свободной поверхности представим в виде:

$$(\rho_1 - \rho_2)\eta_1 + \rho_1\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha_{kt} - (k+1)\eta_t\alpha_{(k+1)}\right)h_1^k + \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\nabla\alpha_k - (k+1)\nabla\eta\alpha_{(k+1)}\right)h_1^k\right]^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\mu}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\alpha_{(k+1)}h_1^k\right]^2\right] - \rho_2\left[(\beta_t - \eta_{1t}\beta_1) + \frac{1}{2}(\nabla\beta - \nabla\eta_1\beta_1)^2 + \frac{1}{2\mu}\beta_1^2\right] =$$
$$= \rho_1 f_1(t) - \rho_2 f_2(t), \qquad (10)$$

$$h_2+\eta_1+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\beta_{kt}-(k+1)\eta_{1t}\beta_{(k+1)}\right)h_2^{\,k}+\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\nabla\beta_k-(k+1)\nabla\eta_1\beta_{(k+1)}\right)h_2^{\,k}\right]^2+$$

$$+\frac{1}{2\mu}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\beta_{(k+1)}h_2^{\,k}\right]^2=f_2(t).$$

Так как α_k, β_k, $k\in N$ выражаются через $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$, уравнения (6), (8), (9) и уравнения (10) образуют замкнутую систему относительно неизвестных функций $\alpha(x,y,t), \beta(x,y,t), \eta(x,y,t), \eta_1(x,y,t), \eta_2(x,y,t)$. Используя асимптотическое представление по дисперсионному параметру коэффициентов степенных рядов (3) и малость амплитудного параметра $\varepsilon=\dfrac{a}{H_*}$ (a — амплитуда поверхностной волны) и полагая при этом $\alpha\sim\varepsilon\alpha$, $\beta\sim\varepsilon\beta$, $\eta\sim\varepsilon\eta$, $\eta_1\sim\varepsilon\alpha$, $\eta_2\sim\varepsilon\eta_2$, заключаем, что представленная выше система уравнений с частными производными включает следующие частные задачи: линейные модели без дисперсии и с дисперсией, нелинейную модель без дисперсии $\mu=0$. В первом случае полученная система уравнений может быть преобразована к уравнению для горизонтальной скорости $\beta(x,y,t)$ поверхностной волны $\left(\gamma=\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)$:

$$\beta_{tttt}=\left(\kappa_1+H_0+H_2\right)\beta_{ttxx}+\left(\kappa_2+H_0+H_2\right)\beta_{ttyy}-$$
$$-(1-\gamma)H_2\left[\left(\kappa_1+H_0\right)\beta_{xxxx}+\left(\kappa_1+\kappa_2+2H_0\right)\beta_{xxyy}+\left(\kappa_2+H_0\right)\beta_{yyyy}\right].$$

В реальных условиях для океанских течений разность плотностей слоев, обусловленная температурой и соленостью, достаточно незначительна и их отношение близко к единице [5, 9]. Как правило, $1-\gamma$ имеет порядок 10^{-3}. В соответствии с этим предположением можно записать решение уравнения для $\beta(x,y,t)$:

$$\beta(x,y,t)=\left(C_{11}\cos\lambda_1 t+C_{12}\sin\lambda_1 t\right)\left(C_{21}\cos\frac{\lambda_2}{\sqrt{\kappa_1+H_0+H_2}}x+C_{22}\sin\frac{\lambda_2}{\sqrt{\kappa_1+H_0+H_2}}x\right)\times$$
$$\times\left(C_{31}\cos\sqrt{\frac{\lambda_1^{\,2}-\lambda_2^{\,2}}{\kappa_2+H_0+H_2}}\,y+C_{32}\sin\sqrt{\frac{\lambda_1^{\,2}-\lambda_2^{\,2}}{\kappa_2+H_0+H_2}}\,y\right),\qquad \lambda_1^{\,2}>\lambda_2^{\,2}.$$

Полагая в задаче о волнах малой амплитуды при наличии дисперсии

$$\eta_{1t}-\eta_t+H_0\Delta\alpha=0,\qquad \eta_{2t}-\eta_{1t}+H_2\Delta\beta=0,$$

$$\eta_t+\kappa_1\alpha_{xx}+\kappa_2\alpha_{yy}=0,\qquad (1-\gamma)\eta_1+\alpha_t+\mu H_0\left[-\frac{1}{2}H_0\Delta\alpha_t+\eta_{tt}\right]-\gamma\beta_t=0,$$

$$\eta_2+\beta_t+\mu H_2\left[-\frac{1}{2}H_2\Delta\beta_t+\eta_{1tt}\right]=0,$$

что $(\alpha,\beta,\eta,\eta_1,\eta_2)(x,y,t)=(A,B,C,D,E)\exp\left(i(k_1x+k_2y-\omega t)\right)$, получим соотношения

$$\omega^2=\frac{\left(H_0+H_2\right)k^2+\left\langle\kappa,k^2\right\rangle+\frac{1}{2}\mu H_2\left[H_\gamma k^4H_0+\left(H_0+H_\gamma\right)\left\langle\kappa_1,k_t\right\rangle\right]}{1+\mu\left(\left(H_0+\gamma H_2\right)\left\langle\kappa,k^2\right\rangle+k^2\left(\frac{1}{2}H^2+\gamma H_0H_2\right)\right)+\frac{1}{4}\mu^2H_0H_2^{\,2}\left(H_0k^4+2\left\langle\kappa_1,k_t\right\rangle\right)}\times$$

$$\times\left[1-\left[\left(H_0+H_2\right)k^2+\left\langle\kappa,k^2\right\rangle+\frac{1}{2}\mu H_2\left[H_\gamma k^4H_0+\left(H_0+H_\gamma\right)\left\langle\kappa_1,k_t\right\rangle\right]\right]^{-2}\times\right.$$

$$\times\left[1+\mu\left(\left(H_0+\gamma H_2\right)\left\langle\kappa,k^2\right\rangle+k^2\left(\frac{1}{2}H^2+\gamma H_0H_2\right)\right)+\frac{1}{4}\mu^2H_0H_2^{\,2}\left(H_0k^4+2\left\langle\kappa_1,k_t\right\rangle\right)\right]\times$$

$$\times(1-\gamma)H_2\left[H_0k^4+\langle\kappa_t,k_t\rangle\right]\Big] \tag{11}$$

$$\omega^2=\frac{(1-\gamma)H_2\left[H_0k^4+\langle\kappa_t,k_t\rangle\right]}{(H_0+H_2)k^2+\langle\kappa,k^2\rangle+\frac{1}{2}\mu H_2\left[k^4H_0H_\gamma+(H_0+H_\gamma)\langle\kappa_t,k_t\rangle\right]},$$

$$H_\gamma=H_0+(1-\gamma)H_2,\quad H^2=\langle H_0,H_2\rangle^2,\quad \langle\kappa,k^2\rangle=\kappa_1k_1^{\,2}+\kappa_2k_2^{\,2},$$

$$\langle\kappa_t,k_t\rangle=\kappa_1k_1^{\,4}+(\kappa_1+\kappa_2)k_1^{\,2}k_2^{\,2}+\kappa_2k_2^{\,4}.$$

Первому выражению для частоты ω^2 в (11) будет соответствовать семейство поверхностных волн, второму выражению — семейство внутренних волн. Квадрат частоты является положительной величиной при любых $k=(k_1,k_2)$, что можно считать благоприятным фактором при численной реализации предполагаемой полной модели процесса распространения длинных волн в двухслойной жидкости. В предположении горизонтального недеформируемого дна для волнового движения без дисперсии значения ω^2 совпадут с аналогичными значениями, полученными в работе [3]. Выражения для $\alpha(x,y,t)$, $\eta(x,y,t)$, $\eta_1(x,y,t)$, $\eta_2(x,y,t)$ можно представить с точностью до амплитуды горизонтальной компоненты поверхностной волны $\beta(x,y,t)$:

$$\alpha=\frac{\gamma\omega^2B}{(1-\gamma)\left[H_0k^2+\left(\kappa_1k_1^{\,2}+\kappa_2k_2^{\,2}\right)\right]-\left[1+\mu H_0\left(\frac{1}{2}H_0k^2+\left(\kappa_1k_1^{\,2}+\kappa_2k_2^{\,2}\right)\right)\right]\omega^2},$$

$$\eta=\frac{i\gamma\left(\kappa_1k_1^{\,2}+\kappa_2k_2^{\,2}\right)\omega B}{(1-\gamma)\left[H_0k^2+\left(\kappa_1k_1^{\,2}+\kappa_2k_2^{\,2}\right)\right]-\left[1+\mu H_0\left(\frac{1}{2}H_0k^2+\left(\kappa_1k_1^{\,2}+\kappa_2k_2^{\,2}\right)\right)\right]\omega^2},$$

$$\eta_1=\frac{i\gamma\left[H_0k^2+\left(\kappa_1k_1^{\,2}+\kappa_2k_2^{\,2}\right)\right]\omega B}{(1-\gamma)\left[H_0k^2+\left(\kappa_1k_1^{\,2}+\kappa_2k_2^{\,2}\right)\right]-\left[1+\mu H_0\left(\frac{1}{2}H_0k^2+\left(\kappa_1k_1^{\,2}+\kappa_2k_2^{\,2}\right)\right)\right]\omega^2},$$

$$\eta_2=-\frac{i\omega B}{(1-\gamma)\left[H_0k^2+\left(\kappa_1k_1^{\,2}+\kappa_2k_2^{\,2}\right)\right]-\left[1+\mu H_0\left(\frac{1}{2}H_0k^2+\left(\kappa_1k_1^{\,2}+\kappa_2k_2^{\,2}\right)\right)\right]\omega^2}\times$$

$$\times\left[(1-\gamma)\left[H_0k^2+\left(\kappa_1k_1^{\,2}+\kappa_2k_2^{\,2}\right)+\frac{1}{2}\mu H_2^{\,2}\left[H_0k^4+\left(\kappa_1k_1^{\,4}+(\kappa_1+\kappa_2)k_1^{\,2}k_2^{\,2}+\kappa_2k_2^{\,4}\right)\right]\right]-\right.$$

$$-\left[1+\mu\left[\left(\frac{1}{2}H_2^{\,2}+\gamma H_0H_2+\frac{1}{2}H_0^{\,2}\right)k^2+(H_0+\gamma H_2)\left(\kappa_1k_1^{\,2}+\kappa_2k_2^{\,2}\right)\right]+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\mu^2H_0^{\,2}H_2^{\,2}\left[H_0k^4+\left(\kappa_1k_1^{\,4}+(\kappa_1+\kappa_2)k_1^{\,2}k_2^{\,2}+\kappa_2k_2^{\,4}\right)\right]\right]\omega^2\right].$$

Отношение амплитуды поверхностной волны к внутренней волне имеет вид:

$$\frac{\eta_2}{\eta_1}=-(1-\gamma)\left[\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{2}\mu H_2^{\,2}\frac{H_0k^4+\left(\kappa_1k_1^{\,4}+(\kappa_1+\kappa_2)k_1^{\,2}k_2^{\,2}+\kappa_2k_2^{\,4}\right)}{\gamma\left[H_0k^2+\left(\kappa_1k_1^{\,2}+\kappa_2k_2^{\,2}\right)\right]}\right]+$$

$$+\frac{\omega^2}{\gamma\left[H_0k^2+\left(\kappa_1k_1^{\,2}+\kappa_2k_2^{\,2}\right)\right]}\times\left[1+\mu\left[\left(\frac{1}{2}H^2+\gamma H_0H_2\right)k^2+(H_0+\gamma H_2)\left(\kappa_1k_1^{\,2}+\kappa_2k_2^{\,2}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\mu H_0H_2^{\,2}\left[\frac{1}{2}H_0k^4+\left(\kappa_1k_1^{\,4}+(\kappa_1+\kappa_2)k_1^{\,2}k_2^{\,2}+\kappa_2k_2^{\,4}\right)\right]\right].$$

Данное выражение в зависимости от квадрата частоты ω позволяет проиллюстрировать проявление амплитуды внутренней или поверхностной волны на уровне свободной поверхности к соответствующей амплитуде на поверхности скачка плотности.

Следующая по степени сложности и учета взаимодействия нелинейно-дисперсионных членов модель может быть получена с учетом слагаемых, содержащих амплитудный и дисперсионный параметры степени не выше первой, а также их произведение. Данная модель описывает распространение волн Кортевега–де Фриза. Она имеет достаточно сложную структуру и для ее интегрирования следует воспользоваться одним из современных численных методов.

Представленные функции $\alpha(x,y,t), \beta(x,y,t), \eta(x,y,t), \eta_1(x,y,t), \eta_2(x,y,t)$ в сочетании с экспериментальными данными позволяют определить волновой режим исследуемой акватории. Использование современных интегрированных сред разработки программных продуктов позволит значительно облегчить вычислительный аспект приложения результатов данного исследования к морской гидротехнике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алешков Ю. З. Течения и волны в океане. СПб., 1996. 228 с.
2. Алешков Ю. З. Волны на поверхности сыпучих сред, вызванные потоком жидкости // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2001. Сер. 1. Вып. 4 (№ 25). С. 35-43.
3. Букатов А. А. Математическое моделирование процесса распространения длинных волн: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. СПб., 1992. 16 с.
4. Великанов М. А. Динамика русловых потоков. Л., 1949. 474 с.
5. Ильичев А. Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики. М., 2003. 256 с.
6. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика: В 2 т. Т. 1. М., 1955. 560 с.
7. Перегудин С. И. Течения жидкости над сыпучей средой // Математическое моделирование. 2004. Т. 16. № 8. С. 70-76.
8. Франкль Ф. И. О движении песчаных волн // Докл. АН СССР. 1953. Т. 89. № 1. С. 29-32.
9. Черкесов Л. В., Иванов В. А., Хартиев С. М. Введение в гидродинамику и теорию волн. СПб., 1992. 264 с.
10. Шуляк Б. А. Физика волн на поверхности сыпучей среды и жидкости. М., 1971. 400 с.

Алексей Викторович ТАТОСОВ —
доцент кафедры математического моделирования,
кандидат физико-математических наук

УДК 539.3

ЗАПОЛНЕНИЕ ПРОППАНТОМ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА

АННОТАЦИЯ. Рассматривается процесс формирования трещины гидроразрыва при закачивании в скважину вязкой жидкости с примесями частиц. Предложена модель развития трещины и исследованы ее особенности.

The forming process of hydraulic fractures is considered. The model of crack development is moved.

Введение. Для повышения дебита нефтяных скважин иногда применяется технология гидроразрыва пласта. С целью формирования трещины гидроразрыва, в скважину подается вязкий полимер — жидкость гидроразрыва с примесью твердых частиц (проппант). Закачиваемая вязкая смесь, надавливая на берега начальной трещины, расширяет ее. Ввиду просачивания жидкости гидроразрыва в пласт у берегов трещины происходит скопление частиц и более быстрое осаждение их на «дно». После прекращения закачки смеси трещина вновь сужается. Окончательная ее форма определяется распределением по длине слоя осевших частиц. Асимптотика развития трещины указана в [1]. В работе [2] проведено исследование процесса роста трещины гидроразрыва в пористой среде. Цель данного исследования — определить влияние примеси частиц в жидкости гидроразрыва на динамику раскрытия трещины и ее конечную форму.