Следующая по степени сложности и учета взаимодействия нелинейно-дисперсионных членов модель может быть получена с учетом слагаемых, содержащих амплитудный и дисперсионный параметры степени не выше первой, а также их произведение. Данная модель описывает распространение волн Кортевега–де Фриза. Она имеет достаточно сложную структуру и для ее интегрирования следует воспользоваться одним из современных численных методов.

Представленные функции $\alpha(x,y,t), \beta(x,y,t), \eta(x,y,t), \eta_1(x,y,t), \eta_2(x,y,t)$ в сочетании с экспериментальными данными позволяют определить волновой режим исследуемой акватории. Использование современных интегрированных сред разработки программных продуктов позволит значительно облегчить вычислительный аспект приложения результатов данного исследования к морской гидротехнике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алешков Ю. З. Течения и волны в океане. СПб., 1996. 228 с.

2. Алешков Ю. З. Волны на поверхности сыпучих сред, вызванные потоком жидкости // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2001. Сер. 1. Вып. 4 (№ 25). С. 35-43.

3. Букатов А. А. Математическое моделирование процесса распространения длинных волн: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. СПб., 1992. 16 с.

4. Великанов М. А. Динамика русловых потоков. Л., 1949. 474 с.

5. Ильичев А. Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики. М., 2003. 256 с.

6. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика: В 2 т. Т. 1. М., 1955. 560 с.

7. Перегудин С. И. Течения жидкости над сыпучей средой // Математическое моделирование. 2004. Т. 16. № 8. С. 70-76.

8. Франкль Ф. И. О движении песчаных волн // Докл. АН СССР. 1953. Т. 89. № 1. С. 29-32.

9. Черкесов Л. В., Иванов В. А., Хартиев С. М. Введение в гидродинамику и теорию волн. СПб., 1992. 264 с.

10. Шуляк Б. А. Физика волн на поверхности сыпучей среды и жидкости. М., 1971. 400 с.

Алексей Викторович ТАТОСОВ —
доцент кафедры математического моделирования,
кандидат физико-математических наук

УДК 539.3

ЗАПОЛНЕНИЕ ПРОППАНТОМ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА

АННОТАЦИЯ. Рассматривается процесс формирования трещины гидроразрыва при закачивании в скважину вязкой жидкости с примесями частиц. Предложена модель развития трещины и исследованы ее особенности.

The forming process of hydraulic fractures is considered. The model of crack development is moved.

Введение. Для повышения дебита нефтяных скважин иногда применяется технология гидроразрыва пласта. С целью формирования трещины гидроразрыва, в скважину подается вязкий полимер — жидкость гидроразрыва с примесью твердых частиц (проппант). Закачиваемая вязкая смесь, надавливая на берега начальной трещины, расширяет ее. Ввиду просачивания жидкости гидроразрыва в пласт у берегов трещины происходит скопление частиц и более быстрое осаждение их на «дно». После прекращения закачки смеси трещина вновь сужается. Окончательная ее форма определяется распределением по длине слоя осевших частиц. Асимптотика развития трещины указана в [1]. В работе [2] проведено исследование процесса роста трещины гидроразрыва в пористой среде. Цель данного исследования — определить влияние примеси частиц в жидкости гидроразрыва на динамику раскрытия трещины и ее конечную форму.

1. **Математическая постановка задачи**

Допущения. Движение жидкости с примесями частиц в трещине опишем в односкоростном приближении. Трещина гидроразрыва предполагается вертикальной. Прикоснувшиеся к стенке частицы оседают на «дно» оставаясь в одном поперечном сечении. Осевший слой частиц не изменяет картину фильтрации. Объемным содержанием жидкости в осевшем слое пренебрегаем. Будет также считать, что закачиваемая смесь жидкости гидоразрыва и взвешенных частиц с объемными долями α_1 и α_2 однородна. В силу принятых допущений объемное содержание взвешенных частиц остается неизменным по всей длине трещины.

Форма трещины. При построении математической модели форму поперечного сечения трещины заменим прямоугольной с некоторой средней шириной. На основании гипотезы Перкинса [3], с учетом формы плоских трещин в упругой среде [4], в представленной выше работе [2] указана связь избыточного давления P со средней шириной трещины δ:

$$P = b\delta\ , \quad b = \frac{4\mu_\sigma}{\pi(1-\nu_\sigma)h} = const\ , \tag{1.1}$$

где ν_σ — коэффициент Пуассона, μ_σ — модуль сдвига материала.

Геометрическая форма трещины такова, что

$\delta \ll h \ll L$.

Здесь h =const, L — соответственно высота и длина трещины. На носике трещины, в приближении Перкинса, избыточное давление равно нулю:

$x = L(t):\quad P = 0$.

Кинематические соотношения. Вследствие просачивания жидкости гидроразрыва в пласт, взвешенные частицы подходят к берегам трещины и, согласно принятым допущениям, оседают вниз (рис. 1а). Определить скорость роста осевшего слоя частиц удобнее на вспомогательной схеме (рис. 1б).

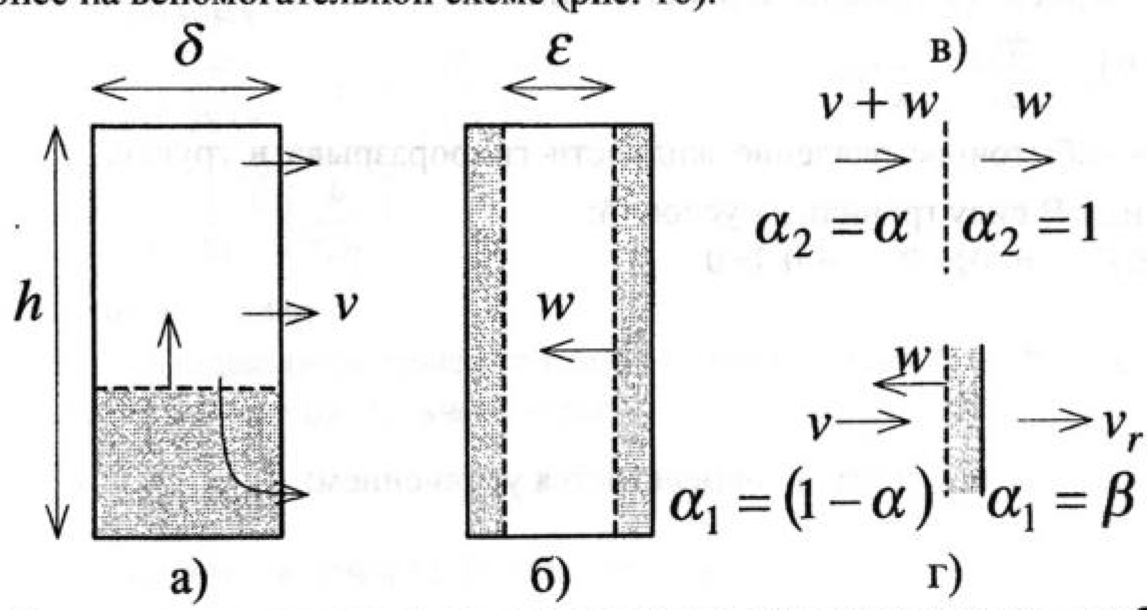

Рис.1. Схематическое представление плоского сечения трещины, штрихованная область — слой частиц; а) осаждение частиц, коснувшихся стенки; б) прилипание частиц, коснувшихся стенки; в) движение частиц относительно контактной линии; г) движение жидкости относительно берегов трещины

Частицы, коснувшись стенки, «прилипают» к ней, образуя ровный слой: ε — ширина свободной области, w — скорость движения контактной линии, v — скорость жидкости по нормали к берегам трещины, v_r — скорость жидкости гидроразрыва в пласте, α — объемное содержание взвешенных частиц, β — объемное содержание жидкости гидроразрыва в пласте. Скорости w, v, v_r определены относительно боковой поверхности трещины. По определению w, имеем:

$$2w = \frac{\partial}{\partial t}(\delta - \varepsilon) \tag{1.2}$$

Условия непрерывности потока частиц через контактную линию (рис. 1в) и потока жидкости через слой «прилипших» частиц (рис. 1г) дают связи скоростей:

$$\alpha(v+w)=w \Rightarrow w=\frac{\alpha}{1-\alpha}v, \tag{1.3}$$

$$(1-\alpha)(v+w)=\beta v_r \Rightarrow v_r=\frac{1}{\beta}v. \tag{1.4}$$

Уравнения движения. Уравнение неразрывности для жидкой смеси с учетом деформации трещины и осаждения частиц запишем в виде:

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial(su)}{\partial x}=-2(v+w)h.$$

Здесь u — скорость движения смеси вдоль трещины; s — площадь поперечного сечения свободной области. Учитывая, что $s=\varepsilon h$, получим

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial x}=-2(v+w). \tag{1.5}$$

В силу принятых ограничений на геометрические параметры трещины в уравнении движения смеси целесообразно пренебречь инерционным слагаемым. Согласно условию осаждения частиц, будем иметь

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{12\eta}{\delta^2}u. \tag{1.6}$$

В целях упрощения формул эффективную вязкость смеси примем равной вязкости жидкости гидроразрыва — η.

Фильтрацию жидкости в грунт опишем по аналогии с [2], применяя гипотезу плоских сечений: жидкость гидроразрыва просачивается в пористую среду только по нормали к трещине. Вязкость жидкости, изначально насыщающей пласт, считаем малой в сравнении с вязкостью жидкости гидроразрыва. Учитывая дополнительно различие скоростей в трещине и пласте, запишем

$$v_r=v_r(t), \quad \frac{\partial p_r}{\partial y}=-\frac{\eta}{k}v_r,$$

где p_r — избыточное давление жидкости гидроразрыва в грунте, k — проницаемость грунта. В силу граничных условий:

$$0\le y\le Y, \quad p_r(0)=P, \quad p_r(Y)=0,$$

найдем

$$v_r=\frac{k}{\eta}\frac{P}{Y}. \tag{1.7}$$

Глубина зоны пропитки Y определяется уравнением:

$$\frac{\partial Y}{\partial t}=v_r. \tag{1.8}$$

Исключая переменные P, w, v, v_r, систему уравнений (1.1)-(1.8) приведем к виду:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}=-\frac{2\beta}{1-\alpha}\frac{kb}{\eta}\frac{\delta}{Y},\\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=\frac{\partial \delta}{\partial t}-\frac{2\alpha\beta}{1-\alpha}\frac{\partial Y}{\partial t},\\ u=-\frac{b}{12\eta}\delta^2\frac{\partial \delta}{\partial x},\\ \frac{\partial Y^2}{\partial t}=\frac{2kb}{\eta}\delta.\end{gathered} \tag{1.9}$$

Второе уравнение с учетом начальных условий

$$\delta=\varepsilon=Y=0, \text{ при } t=0$$

дает интеграл:

$$\varepsilon = \delta - \frac{2\alpha\beta}{1-\alpha} Y . \qquad (1.10)$$

Система (1.9) дополняется граничным условием на носике трещины

$$x = L(t): \quad \delta = 0 \qquad (1.11)$$

и граничным условием на входе в трещину.

2. **Автомодельное движение.** Решение задачи будем искать в автомодельной форме:

$$\delta(x,t) = t^n D^* D(\xi), \quad \varepsilon(x,t) = t^p H^* H(\xi), \quad u(x,t) = t^r U^* U(\xi),$$

$$Y(x,t) = t^s Y^* Y(\xi), \quad \xi = \frac{x}{E^* t^m} . \qquad (2.1)$$

Здесь n , p , r , s , m — безразмерные параметры; D^* , H^* , U^* , Y^* , E^* — размерные постоянные; ξ — безразмерная автомодельная переменная.

Подставляя решение в форме (2.1) в систему (1.9), с учетом интеграла (1.10), получим четыре обыкновенных дифференциальных уравнения относительно ξ :

$$pH - m\xi \frac{dH}{d\xi} + H\frac{dU}{d\xi} + U\frac{dH}{d\xi} = -24\frac{D}{Y},$$

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{dD}{d\xi} - 48\alpha \frac{dY}{d\xi}, \qquad (2.2)$$

$$U = -D^2 \frac{dD}{d\xi},$$

$$2sY^2 - m\xi \frac{dY^2}{d\xi} = D ;$$

найдем значения безразмерных параметров:

$$n = p = r = s = 1, \quad m = 2 \qquad (2.3)$$

и размерных постоянных:

$$D^* = H^* = \frac{\beta^2}{(1-\alpha)^2} \frac{kb}{288\eta}, \quad Y^* = \frac{\beta}{1-\alpha} \frac{kb}{12\eta}, \qquad (2.4)$$

$$U^* = E^* = \frac{\beta^3}{(1-\alpha)^3} \left(\frac{k}{24}\right)^{3/2} \left(\frac{b}{12\eta}\right)^2 .$$

Положим, также $a = 48\alpha$.

Из формы автомодельного решения следует, что на входе в трещину избыточное давление P_0 растет пропорционально времени

$$x = 0: \quad \frac{dP_0}{dt} = \dot{P}_0 = const . \qquad (2.5)$$

Данное условие для системы (2.2) запишем в виде

$$\xi = 0: \ D = A; \quad A = \frac{(1-\alpha)^2}{\beta^2} \frac{288\eta \dot{P}_0}{kb^2} = const . \qquad (2.6)$$

Граничное условие (1.11) на носике трещины

$$\xi = \xi_0: \quad D = 0; \qquad (2.7)$$

где ξ_0 — неопределенный параметр, соответствующий безразмерной координате носика.

Присутствие частиц не меняет вида решения и граничных условий указанных в [2] для общего случая. Учитывая интеграл (1.10), находим дополнительное ограничение на объемное содержание дисперсных частиц в закачиваемой смеси:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} < \frac{1}{2\beta b}\sqrt{\frac{\eta \dot{P}_0}{k}} \quad \text{или} \quad a < \sqrt{2A} . \qquad (2.8)$$

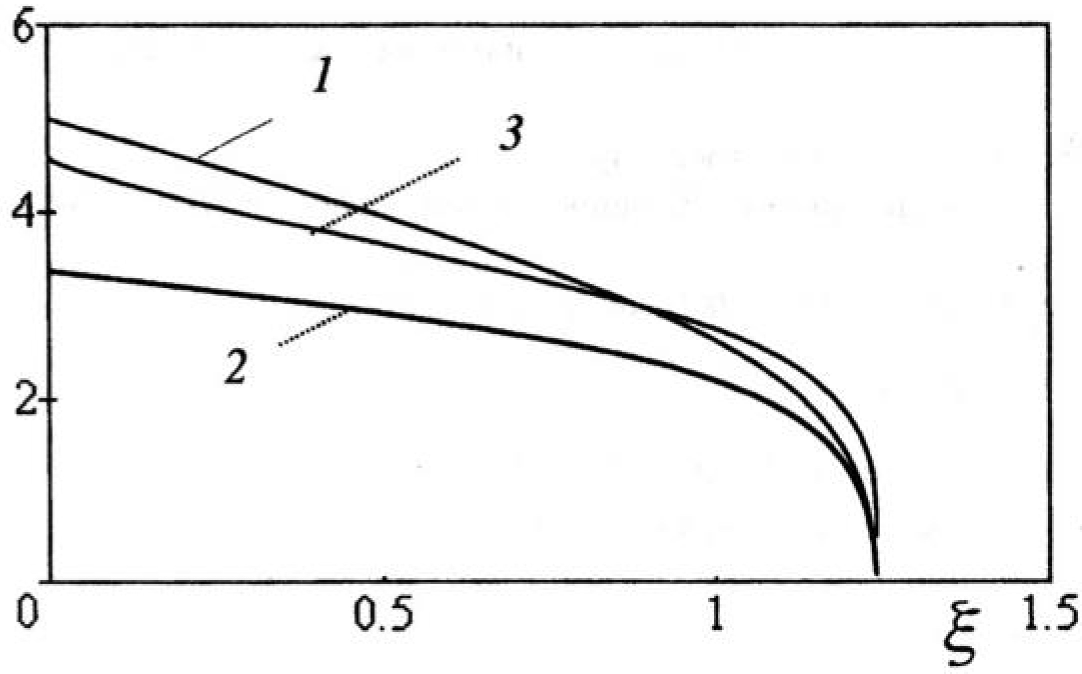

Рис. 2. Распределение безразмерных функций автомодельной переменной по длине трещины. Кривые *1, 2, 3* — соответственно ширина трещины, «ширина» свободной области и уменьшенная в десять раз скорость смеси

Распределение безразмерных функций автомодельной переменой ищем, решая численно краевую задачу (2.2), (2.6), (2.7). На рис.2 показана зависимость D , H , U от ξ при A=5, a=1. Функции D и H монотонно убывают по длине трещины, а вблизи носика резко падают до нуля. Подобным образом ведет себя скорость U , снижаясь до предельного значения $U(\xi_0)=m\xi_0$. При возрастании объемного содержания частиц до 48 $\alpha = a$ =2, функция $H(\xi)$ имеет слабо выраженный максимум, а $U(\xi)$ — более заметную точку перегиба. Высота слоя осевших частиц есть

$$h_s = \frac{\delta - \varepsilon}{\delta} h .$$

Отсюда, для относительной высоты будем иметь

$$\frac{h_s}{h} = \frac{\delta - \varepsilon}{\delta} = \frac{D-H}{D} = \frac{aY}{D},$$

или

$$\frac{h_s}{h} = af(\xi), \quad f(\xi) = \frac{Y}{D}.$$

Увеличение объемного содержания частиц приводит к замедлению скорости роста трещины:

$$L(t) = \xi_0 U^* t^m .$$

Это связано с уменьшением полного расхода на входе из-за перекрывания части входного сечения трещины слоем осевших частиц. Значение же начальной скорости смеси несколько увеличивается вследствие возрастания градиента давления:

a =0: ξ_0 =1.42, $U \approx 37$, $HU \approx 185$;

a =1: ξ_0 =1.25, $U \approx 46$, $HU \approx 156$;

a =2: ξ_0 =1.03, $U \approx 67$, S $HU \approx 127$.

После прекращения закачки смеси трещина вновь сужается. Определим упрощенно остаточную форму трещины как прямоугольную, со средней шириной δ_s :

$$\delta_s = \delta - \varepsilon = tD^*(D-H) = taD^*Y . \tag{2.9}$$

Функция $Y(\xi)$ близка к линейной зависимости, причем

$$Y(0) = \sqrt{\frac{A}{2s}}, \quad Y(\xi_0) = 0 .$$

Заключение. В результате исследования предложенной модели заполнения проппантом трещины гидроразрыва выявлены следующие особенности: модель допускает автомодельное решение; присутствие частиц в жидкости гидроразрыва, подаваемой в скважину, замедляет рост трещины; скорость втекающей смеси при этом повышается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nordgren R. P. Propagation of a vertical hydraulic fracture // SPE Journal. Paper 7834. 1972. 12. № 8. 306-314.

2. Ивашнев О. Е., Смирнов Н. Н. Формирование трещины гидроразрыва в пористой среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. 2003. № 6. С. 28-36.

3. Perkins T. K., Kern L. R. Widths of hydraulic fractures // J. Petrol. Technol., Paper SPE 89. 1961. 13. № 9/ 937-949.

4. Новацкий В. Теория упругости. М., 1975.