ЛИТЕРАТУРА

1. Аксентьев Л. А. Оценки для гармонических функций и их применение к обратным краевым задачам // Тр. семин. по краевым задачам. Казань: Изд-во КГУ, 1970. Вып. 7. С. 82-87.

2. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука. 1970. 303 с.

3. Нужин М. Г., Ильинский Н. Б. Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений. Обратные краевые задачи теории фильтрации. Казань: Изд-во КГУ, 1963. 138 с.

4. Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций // Успехи мат. наук. 1975, 30. Вып. 4 (184). С. 3-60.

5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

6. Авхадиев Ф. Г. К слабой и сильной проблемам однолистности в обратных краевых задачах // Тр. семин. по краевым задачам. Казань: Изд-во КГУ, 1973. Вып. 10. С. 3-10.

Алексей Григорьевич ХОХЛОВ —
доцент кафедры математического
анализа и теории функций
математического факультета,
кандидат физико-математических наук

УДК 515.12

Раздельно непрерывные функции и отображения

АННОТАЦИЯ. В этой статье рассмотрены раздельно непрерывные функции. Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть X, Z — финально компактные p-пространства, Y — хаусдорфово пространство и Ф: $X \times Z \to Y$ раздельно непрерывное отображение, разделяющее точки X и Z. Кроме того, $nW(\Phi(X \times \{z\})) \le \aleph_0$ и $nW(\Phi(\{x\} \times Z)) \le \aleph_0$ для всех $x \in X$ и $z \in Z$. Тогда X вкладывается в Σ — произведение прямых.

In this article separately-continuous functions are considered. The following theorem is proved.

The theorem. Let X, Z are finally-compact p-spaces, Y is the Hausdorff space and Ф: $X \times Z \to Y$ is a separately-continuous reflection, separating X and Z points. Moreover, $nW(\Phi(X \times \{z\})) \le \aleph_0$ and $nW(\Phi(\{x\} \times Z)) \le \aleph_0$ for every $x \in X$ and every $z \in Z$. Then X is put into Σ — product of the straight lines.

Напомним, что отображение $f\colon X \times Y \to Z$ называется раздельно непрерывным, если для всяких $x \in X$, $y \in Y$ сужения $f|X \times \{y\}$ и $f|\{x\} \times Y$ непрерывны. Пусть R — прямая. Тогда Σ — произведение прямых — это подмножество R^A, состоящее из $f\colon A \to R$, таких, что $|A \setminus f^{-1}(0)| \le \aleph_0$, где $|Z|$ — мощность Z и $\aleph_0 = |N|$, N — натуральный ряд. Напомним, что пространство X называется финально компактным p-пространством, если существует совершенное (то есть непрерывное замкнутое) отображение

$f: X \xrightarrow{на} M$, где M — сепарабельное метрическое пространство. Будем обозначать через $w(X)$ — вес X, $nw(X)$ — сетевой вес X, $t(x)$ — теснота X. Пространство X называется монолитным, если для всякого $A \subset X$, $nw(X) \leq |A|$. Семейство подмножеств A T_0 — разделяет точки X, если для всяких $x \neq y$ найдется $A \in \mathcal{A}$, такое, что $|A \cap \{x, y\}| = 1$.

Предложение 1.

Пусть X — финально компактное р-пространство. Тогда следующие условия эквивалентны

1) X вкладывается в Σ — произведение прямых,

2) X уплотняется на Y, лежащее в Σ — произведении прямых,

3) в X имеется T_0, разделяющее точки X, точечно счетное семейство конуль множеств.

Доказательство.

Импликация 1)→2) очевидна. Докажем, что 2)→3). Известно [1], что в Σ — произведении прямых имеется $\gamma - T_0$ — разделяющее точки, точечно счетное семейство конуль множеств. Тогда этими же свойствами обладает семейство $\mu = \{f^{-1}(U \cap Y) : U \in \gamma\}$, где $f: X \xrightarrow{на} Y$ — уплотнение. Докажем, что 3)→1). Пусть $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — точечно счетное T_0, разделяющее точки X семейство конуль множеств. Для всякого $\alpha \in A$ зафиксируем $f_\alpha : X \longrightarrow R$, непрерывное отображение, такое, что $f_\alpha^{-1}(0) = X \setminus U_\alpha$. Тогда $f = \underset{\alpha \in A}{\Delta} f_a : X \to \sum$ — непрерывно и инъективно. Так как X — финально компактное р-пространство, то найдется совершенное отображение $\varphi: X \xrightarrow{на} M$, где M — сепарабельное метрическое пространство. Тогда $f \Delta \varphi : X \to \sum \times M$ вложение [1]. Но [1] M вкладывается в $R^{\aleph_0}$, следовательно, $\sum \times M$ вкладывается в $\sum$. Предложение доказано.

Теорема.

Пусть X, Z — финально компактные р-пространства, Y — хаусдорфово пространство и Φ: $X \times Z \to Y$ раздельно непрерывное отображение, разделяющее точки X и Z. Кроме того, $nw(\Phi(X \times \{z\})) \leq \aleph_0$ и $nw(\Phi(\{x\} \times Z)) \leq \aleph_0$ для всех $x \in X$ и $z \in Z$. Torga X вкладывается в Σ — произведение прямых.

Доказательство.

Покажем, прежде всего, что найдется, вообще говоря, другое отображение Φ_1: $X \times Z \to Y$, которое обладает всеми свойствами Φ и, кроме того, а) отображение $\Phi_1 \mid \{x\} \times Z$ и $\Phi_1 \mid X \times \{z\}$ — совершенны для всех $x \in X$, $z \in Z$, б) $w(\Phi_1(X \times \{z\})) \leq \aleph_0$, $w(\Phi_1(\{x\} \times Z)) < \aleph_0$ для всех $x \in X$, $z \in Z$. Действительно, так как X и Z — финально компактные р-пространства, то найдутся совершенные отображения φ_1: $X \xrightarrow{на} M_1$ и φ_2: $Z \xrightarrow{на} M_2$, где M_i — сепарабельное метрическое пространство, i=1,2. Тогда и отображение $\varphi_1 \times \varphi_2$: $X \times Z \xrightarrow{на} M_1 \times M_2$ совершенно. Положим $\Phi_1 = \Phi \Delta(\varphi_1 \times \varphi_2)$: $X \times Z \to Y \times (M_1 \times M_2)$. Тогда а) и б) следуют из [1] и известного факта, что финально компактное р-пространство со счетной сетью обладает счетной базой. Итак, чтобы не менять обозначений, будем считать, что Φ обладает свойствами а), б). Для всяких $A \subset X$, $B \subset Z$ определим фактор — пространство $Z/A = \{(z): z' \in (z)$ тогда и только тогда, когда $\Phi(x,z) = \Phi(x,z')$ для всякого $x \in A\}$. Аналогично определяется X/B. В силу свойства б) естественные факторы — отображения ρ_A: $Z \to Z/A$ и μ_B: $X \to X/B$ совершенны. В дальнейшем будет использоваться

1) $Z/\overline{A} = Z/A$.

Пусть $(z) \in Z/A$. Достаточно доказать, что для всякого $z' \in (z)$ и всякого $y \in \overline{A}$ справедливо $\Phi(y,z)=\Phi(y,z')$. Предположим противное, т. е. $\Phi(y,z) \neq \Phi(y,z')$. Так как Y хаусдорфово пространство, то выберем непересекающиеся окрестности $O(\Phi(y,z)) \cap O(\Phi(y,z'))=\emptyset$. В силу раздельной непрерывности найдутся окрестности $O_1(y)$ и $O_2(y)$ такие, что $\Phi(O_1(y)\times\{z\}) \subset O(\Phi(y,z))$ и $\Phi(O_2(y)\times\{z'\}) \subset O(\Phi(y,z'))$. Но тогда $\Phi(x,z) \neq \Phi(x,z')$, если $x \in O_1(y) \cap O_2(y) \cap A$. Противоречие.

2) Пространства X и Z монолитны. Проверим монолитность X. Пусть $A \subset X$ и $|A|=\tau$. Определим $\tilde{\Phi}$: $\overline{A} \times Z/\overline{A} \to Y$ по правилу $\tilde{\Phi}(x,(z))=\Phi(x,z)$. Понятно, что $\tilde{\Phi}$ раздельно непрерывно и обладает свойствами а) и б). Проверим, что $\tilde{\Phi}$ разделяет точки $\overline{F}$ и $Z/\overline{F}$. Пусть $x_1 \neq x_2$, $x_i \in \overline{A}$, $i=1,2$. Тогда найдется $z \in Z$, такое, что $\Phi(x_1,z) \neq \Phi(x_2,z)$. Следовательно, $\tilde{\Phi}(x_1,(z))= \Phi(x_1,z) \neq \Phi(x_2,z)=\tilde{\Phi}(x_2,(z))$. Пространства $\overline{A}$ и $Z/\overline{A}$ — финально компактные p-пространства ($\overline{A}$ замкнуто в X, $Z/\overline{A}$ — совершенный образ Z). В силу 1) $Z/\overline{A} = Z/A$. Из свойства б) следует, что $w(Z/\overline{A}) \leq \tau$. Пусть $P \subset Z/\overline{A}$ плотное подмножество и $|P| \leq \tau$. Тогда $\overline{A} = \overline{A}/Z/\overline{A} = \overline{A}/P$. Следовательно, $w(\overline{A}) \leq \tau$. Монолитность Z проверяется аналогично.

3) Для всяких $A \subset X$ и $B \subset Z$ найдутся замкнутые $K \subset X$ и $T \subset X$ множества, такие, что $p_B(K) = X/B, \mu_A(T) = Z/A$ и $w(K) = w(X/B), w(T) = w(Z/A)$.

Это следует из свойства 2), совершенности отражений ρ_B и μ_A, а также [2] совпадения веса и сетевого веса в финально компактных р-пространствах.

4) Пусть $A_i \subset A_{i+1}$, $A_i \subset X$, $B_i \subset B_{i+1}$, $B_i \subset Z$ и $\rho_{B_i}(A_i) = X/B_i$, $\mu_{A_i}(B_{i+1}) = Z/A_i$, $i=0, 1, 2, \ldots$. Тогда, если $A = \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i}$, $B = \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i}$, то

$$\rho_B(A) = X/B, \ \mu_A(B) = Z/A.$$

Действительно, в силу 1) $X/B = X/\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$. Пусть $d \in X/\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$. Тогда $d = \bigcap_{i=0}^{\infty} d_i$, где $d_i \in X/B_i$, $i=0, 1, \ldots$. Так как $A \subset A_i$, то $A \cap d_i \neq \emptyset$ для $i=0, 1, \ldots$ В силу того, что $d_{i+1} \subset d_i$ и d_i бикомпакт, $i=0, 1, \ldots$ следует, что $A \cap d \neq \emptyset$. В силу произвольности d это влечет равенство $\rho_B(A) = X/B$. Аналогично доказывается равенство $\mu_A(B) = Z/B$.

5) Пусть $A \subset X$ и $B \subset Z$ — замкнутые множества и $\rho_B(A) = X/B$, $\mu_A(B) = Z/A$. Тогда $\rho_B|A : A \to X/B$ и $\mu_A|B : B \to Z/A$ — гомеоморфизмы.

Так как отображения ρ_B, μ_A совершенны, а множества A и B замкнуты, то и сужение $\rho_B|A$, $\mu_A|B$ совершенны. Таким образом, достаточно проверить их инъективность. Итак, пусть $a_1 \neq a_2$, $a_i \in A$, $i=1,2$. Тогда найдется $z \in Z$, такое, что $\Phi(a_1, z) \neq \Phi(a_2, z)$. Из условия $\mu_A(B) = Z/A$ следует, что найдется $b \in B$ такое, что $\Phi(a, z) = \Phi(a, b)$ для всех $a \in A$. Тогда $\Phi(a_1, b) = \Phi(a_1, z) \neq \Phi(a_2, z) = \Phi(a_2, b)$. То есть $\rho_B(a_1) \neq \rho_B(a_2)$. Инъективность отображения $\mu_A|B$ доказывается аналогично.

Из 5) непосредственно следует

6) Пусть $A \subset X$, $B \subset Z$ замкнутые множества и $\rho_B(A) = X / B$, $\mu_A(B) = Z / A$. Тогда A ретракт X при ретракции $r_A = \rho_B o(\rho_B|A)^{-1}$ и B ретракт Z при ретракции $\pi_B = \mu_A o(\mu_A|B)^{-1}$. Кроме того, $r_A(x) = \rho_B^{-1}\rho_B(x) \cap A$ и ретракции r_A, π_B — совершенны.

Следующий факт является обобщением 4) и доказывается аналогично.

7) Пусть трансфинитные *последовательности* $A_0 \subset A_1 \subset \ldots A_\alpha \subset A_{\alpha+1} \subset \ldots$ $B_0 \subset B_1 \subset \ldots B_\alpha \subset B_{\alpha+1}$, ... $A_\alpha \subset X$, $B_\alpha \subset Z$, $\alpha < \gamma$ таковы, что $\rho_{B_\alpha}(A_\alpha) = X / B_\alpha$, $\mu_{A_\alpha}(B_{\alpha+1}) = Z / A_\alpha$. Тогда $\rho_B(A) = X / A$, $\mu_A(B) = Z / B$, где $A = \overline{\bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha}$, $B = \overline{\bigcup_{\alpha<\gamma} B_\alpha}$.

Обозначим через P множество пар (A, B), $A \subset X$, $B \subset Z$ замкнутые множества и $\rho_B(A) = X / A$, $\mu_A(B) = Z / B$.

Из 3), 4) непосредственно вытекает

8) Для всяких $S \subset X$, $T \subset Z$, $w(S) = w(T) = \tau$ найдется $(A, B) \in P$ $w(A) = w(B) = \tau$ и $S \subset A$, $T \subset B$.

9) Теснота X счетна. Пусть $x_0 \in \overline{C}$, $C \subset X$. Используя 8), построим пары $(A_n, B_n) \in P$, $n \in N$ и счетные множества $C_n \subset C$, $n \in N$, такие, что $x_0 \in A_0$, $A_n \subset A_{n+1}$, $B_n \subset B_{n+1}$, $C_n \subset C_{n+1}$, $C_n \subset A_{n+1}$ и $\overline{r_{A_n}(C_n)} \ni x_0$, $w(A_n) \le \aleph_0$, $w(B_n) \le \aleph_0$, $n = 0, 1, \ldots$. Пусть $\tilde{C} = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$, $A = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n}$, $B = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n}$. Тогда в силу 4) $(A, B) \in P$. Заметим, что $\tilde{C} \subset A$. Покажем, что $x_0 \in \tilde{C}$. Предположим противное, т. е. $x_0 \notin \overline{\tilde{C}}$. Тогда $r_A^{-1}(x_0) \cap \overline{\tilde{C}} = \emptyset$. Но (см. 4). $r_A^{-1}(x_0) = \bigcap_{n=0}^{\infty} r_{A_n}^{-1}(x_0)$, где $r_{A_{n+1}}^{-1}(x_0) \subset r_{A_n}^{-1}(x_0)$, $n = 0, 1, \ldots$. Следовательно, найдется n_0, такое, что $r_{A_{n_0}}^{-1}(x_0) \cap \overline{\tilde{C}} = \emptyset$. Это противоречит тому, что $x_0 \in r_{A_{n_0}}(C_{n_0})$.

Доказывать теорему будем индукцией по плотности $d(X)$. Если $d(X) \le \aleph_0$, то X — пространство со счетной базой. Пусть теперь $d(X) = \lambda$. Применяя 8), по трансфинитной индукции строятся пары $(A_\alpha, B_\alpha) \in P$, $\alpha < \lambda$, такие, что

I) $A_\alpha \subset A_{\alpha+1}$, $B_\alpha \subset B_{\alpha+1}$, $\alpha < \lambda$,

II) $d(A_\alpha) \le |\alpha|$, $d(B_\alpha) \le |\alpha|$, $\alpha < \lambda$,

III) если γ — предельный ординал, $\gamma < \lambda$, то $A_\gamma = \overline{\bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha}$, $B_\gamma = \overline{\bigcup_{\alpha<\gamma} B_\alpha}$,

IV) $A_\gamma = \overline{\bigcup\{A_\alpha : \alpha < \lambda\}} = X$, $\overline{\bigcup\{B_\alpha : \alpha < \lambda\}} = Z$. Для краткости обозначим $\rho_{B_\alpha} = \rho_\alpha$, $\mu_{A_\alpha} = \mu_\alpha$, $r_{A_\alpha} = r_\alpha$, $\alpha < \lambda$.

10) Пусть $\alpha<\beta<\lambda$ Тогда $r_\alpha \circ r_\beta = r$. Действительно, $r_\alpha(x) = \rho_\alpha^{-1}\rho_\alpha(x) \cap A_\alpha$, $r_\beta(x) = \rho_\beta^{-1}\rho_\beta(x) \cap A_\beta = x'$. Тогда $x' \in \rho_\alpha^{-1}\rho_\alpha(x)$, следовательно, $r_\alpha(x') = r_\alpha(x)$.

11) Пусть $\alpha<\lambda$ предельно. Тогда $\bigcap\limits_{\beta<\alpha} r_\beta^{-1}(x) = x$. Действительно, в силу 1) $A_\alpha = A_\alpha / \bigcup\limits_{\beta<\alpha} B_\alpha$. Пусть $y \neq x$, $y \in A_\alpha$. Тогда найдется $\beta<\alpha$, такое, что $y \notin \rho_\beta^{-1}\rho_\beta(x)$ и так как $r_\beta^{-1}(x) \subset \rho_\beta^{-1}\rho_\beta(x)$, то этим все доказано.

Отсюда следует

12) Пусть x, $y \in A_\alpha$, $\alpha<\lambda$ предельно. Тогда найдется $\beta<\alpha$ такое, что $r_\beta(x) \neq r_\beta(y)$.

13) Для всякого $x \in X$ $nw\{r_\alpha(x)\}_{\alpha<\lambda} \leq \aleph_0$.

Докажем индукцией относительно λ. Если конфинальность $cf(\lambda)=\aleph_0$, то найдутся ординалы $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$, такие, что $\sup\limits_n \alpha_n = \lambda$. В силу 10) $\{r_\alpha(x)\}_{\alpha<\lambda} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{r_\alpha(x) : \alpha \leq \alpha_n\}$ и $nw\{r_\alpha(x)\}_{\alpha<\lambda} \leq \aleph_0$. Пусть $cf(\lambda) \geq \aleph_1$. Так как теснота X счетна, то $X = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} A_\alpha$. Пусть $x \in A_\beta$. Тогда $\{r_\alpha(x)\}_{\alpha<\lambda} = \{r_\alpha(x)_{\alpha\leq\beta}\}$ и по предположению индукции $nw\{r_\alpha(x)\}_{\alpha<\lambda} \leq nw\{r_\alpha(x)\}_{\alpha\leq\beta} \leq \aleph_0$.

По предположению индукции для всякого $\alpha<\lambda$ подпространство $A_{\alpha+1}$ вкладывается в Σ — произведение прямых, следовательно, найдется γ_α — точечно-счетное семейство конуль (в $A_{\alpha+1}$) множеств, T_0, разделяющее точки $A_{\alpha+1} \setminus A_\alpha$ и такое, что $\bigcup \gamma_\alpha \supset A_{\alpha+1} \setminus A_\alpha$, $(\bigcup \gamma_\alpha) \cap \aleph_\alpha = \emptyset$. Пусть γ_{-1} — счетное семейство конуль (в A_0) множеств T_0 — разделяющее точки A_0. Покажем, что семейство $\gamma = \bigcup\{r_{\alpha+1}^{-1}\gamma_\alpha : -1 \leq \alpha < \lambda\}$ — точечно счетное семейство конуль множеств в X, T_0, разделяющее точки X. Для всякого $x \in X$ положим $\alpha(x) = \min\{\alpha : x \in A_\alpha\}$. Покажем, что γ—T_0, разделяющее точки X. Пусть $x \neq y$ и $\alpha(x) \leq \alpha(y)$. Если $\alpha(y)$ предельно, то в силу 12) найдется $\beta+1<\alpha(y)$ и такой, что $r_{\beta+1}(x) \neq r_{\beta+1}(y)$. Тогда найдется $U \in \gamma_\beta$, такое, что $\left|U \cap \{r_{\beta+1}(x), r_{\beta+1}(y)\}\right| = 1$. Следовательно, $\left|r_{\beta+1}(U) \cap \{x, y\}\right| = 1$. Пусть теперь $\alpha(y)$ — непредельно, $\alpha(y) = \beta+1$. Тогда либо x и y одновременно принадлежат $A_{\beta+1} \setminus A_\beta$, либо $x \notin A_{\beta+1}$. В первом случае, так как γ_β — T_0 — разделяет точки $A_{\beta+1} \setminus A_\beta$, найдется $U \in \gamma_\beta$ и $\left|U \cap \{x,y\}\right| = 1$, следовательно, $\left|r_{\beta+1}^{-1}(U) \cap \{x,y\}\right| = 1$. Во втором случае, так как $\bigcup\gamma_\beta = A_{\beta+1} \setminus A_\beta$, то найдется $U \in \gamma_\beta, y \in U$. Тогда $y \in r_{\beta+1}^{-1}(U)$ и $x \notin r_{\beta+1}^{-1}(U)$. Семейство γ — точечно-счетно в силу 13). В силу предложения X вкладывается в Σ — произведение прямых. Теорема доказана.

Рассмотрение двойственности естественным образом приводит к постановке следующей задачи: Пусть $f : X\times Y \xrightarrow{на} Z$ — отображение (даже непрерывное), и заданы ограничения на образы всех (или достаточно большую часть) слоев, то есть, например, для всяких $x \in X$, $y \in Y$, $f(X\times\{y\})$ и $f(\{x\}\times Y)$ обладают тем или иным свойством Р. Будет ли Z обладать свойством Р? Или одно из пространств обладает свойством Р, и образы всех слоев обладают свойством Р?

Начнем с примера, показывающего, что даже если образы всех слоев очень «хорошие», в данном случае метризуемые, пространство Z может иметь неограниченный вес.

Пример.

Для всякого кординала $\mathcal{E} \in \aleph_0$ найдутся Компакты X, Y, Z и непрерывное отображение $\varphi \cdot X\times Y \xrightarrow{на} Z$ такое, что $\omega\varphi(X\times\{y\}) \le \aleph_0$, $\omega\varphi(\{x\}\times Y) \le \aleph_0$ для всяких $x \in X, y \in Y$. Но $\omega(Z)=\tau, c(Z)=\tau, \chi(Z)=\tau$.

Построение.

Пространства X, Y, Z будут подпространствами R^{τ}. Считаем, что $R^{\tau}=R^{A}$, где $|A|=\tau$, и рассматриваем $R^{A}=\{f : A\to R\}$ — множество всевозможных функций из A в R. Полагаем $f_0 \equiv \theta, f_a=\chi_a, a\in A$. Положим $X=Y=Z=\{f_0, f_a\}_{a\in A}$. Положим $\varphi : X\times Y \xrightarrow{на} Z$ равным произведению функций, то есть $\varphi(f,g)=f\times g$, так как произведение поточечное, то φ — непрерывна. Заметим далее, что $f_{a_1}\times f_{a_2}=f_0$, если $a_1 \ne a_2$ $f_a\times f_a=f_a$, $f_a\times f_0=f_0$.

Таким образом $\varphi(\{f_a\}\times Y)=\varphi(X\times\{f_a\})=\{f_a, f_a\}$, а $\varphi(\{f_0\}\times Y)= =\varphi(X\times\{f_0\})=f_0$. То есть образы всех не более чем двухэлементные множества, следовательно, метризуемы. Остается заметить, что X — компакт. Действительно, множество $\{f_a\}_{a\in A}$ дискретно в себе, а всякая базисная окрестность точки f_0 содержит все функции f_a, кроме конечного числа. То есть X=Y=Z — александровская компактификация дискретного пространства мощности τ. Следовательно, $\omega(Z)=c(Z)= =\chi(Z)=\tau$.

Таким образом, рассмотрим случай, когда одно из пространств обладает свойством Р.

Предложение 2.

Пусть X, Y, Z — бикомпакты, f: $X\times Y \xrightarrow{на} Z$ непрерывно и $t(Y)\le\tau$, $t(f(X\times\{y\})\le\tau$ для всякого $y\in Y$. Тогда $t(Z)\le\tau$.

Доказательство.

Так как неравенство $t(Z)\le\tau$ эквивалентно тому, что $[A]=\bigcup\{[B]$ $B\subset A, |B|\le\tau\}=[A]_\tau$ для всякого $A\subset Z$, то достаточно доказать, что для всякого $A\subset Z$ и $A=[A]_\tau$ полный прообраз $f^{-1}(A)$ замкнут в $X\times Y$. Действительно, так как f непрерывно, то $f^{-1}(A)=\bigcup\{[C] : C\subset f^{-1}(A)$ и $|C|\le\tau\}=[f^{-1}(A)]_\tau$. Тогда для всякого $x\in X, f^{-1}(A)\bigcap(\{x\}\times Y)=[f^{-1}(A)\bigcap(\{x\}\times Y)]_\tau$ и так как

$\{x\}\times Y$ гомеоморфно Y и $t(Y)\le\tau$, то $f^{-1}(A)\cap(\{x\}\times Y)$ замкнуто в $\{x\}\times Y$. Пусть $(x_0,y_0)\notin f^{-1}(A)$. Тогда найдется окрестность $O(y_0)$ точки y_0, такая, что $\{x_0\}\times\overline{O(y_0)}\cap f^{-1}(A)=\emptyset$. Рассмотрим множество $P=(X\times\overline{O(y_0)})\cap f^{-1}(A)$. Тогда $P=[P]_\tau$, и так как проекция π_Y — замкнута, то $\pi_Y(P)=[\pi_Y(P)]_\tau$. В силу того, что $t(Y)\le\tau$, следует, что $\pi_Y(P)$ замкнуто в Y и $x_0\notin\pi_Y(P)$. Пусть $O(x_0)\cap\pi_Y(P)=\emptyset$. Тогда $(O(x_0)\times O(y_0))\cap f^{-1}(A)=\emptyset$. Следовательно, $f^{-1}(A)$ — замкнутое множество в $X\times Y$, и так как f — замкнутое отображение, следовательно, факторное отображение, то и A замкнуто в Z. Предложение доказано.

Предложение 3.

Пусть X,Y,Z — бикомпакты, $f:X\times Y\xrightarrow{на}Z$ — непрерывное отображение, Y — секвенциальный бикомпакт и для всякого $y\in Y$ $f(X\times\{y\})$ — секвенциальное пространство. Тогда Z — секвенциальный бикомпакт.

Доказательство.

Напомним, что подмножество $A\subset Z$ секвенциально замкнуто, если оно содержит пределы всех своих сходящихся последовательностей. Тогда секвенциальность эквивалентна тому, что всякое секвенциально замкнутое множество — замкнуто. Итак, пусть $A\subset Z$ секвенциально замкнуто. Тогда в силу непрерывности f множество $f^{-1}(A)$ также секвенциально замкнуто. Так как по условию $f(X\times\{y\})$ — секвенциальное пространство и для всякого $y\in Y$, то $f(X\times\{y\})\cap A$ замкнуто в Z. Тогда $f^{-1}f(X\times\{y\})\cap f^{-1}(A)$ замкнуто в $X\times Y$, следовательно, множество $(X\times\{y\})\cap f^{-1}(A)$ замкнуто в $X\times Y$ для всякого $y\in Y$. Кроме того, $(Y\cap\{x\})\cap f^{-1}(A)$ также замкнуто в $X\times Y$ для всякого $x\in X$, так как Y — секвенциальное пространство. Пусть $(x_0,y_0)\notin f^{-1}(A)$. Выберем окрестность $O(x_0)\subset X$, такую, что $(\overline{O(x_0)}\times\{y_0\})\cap f^{-1}(A)=\emptyset$. Положим $P=(\overline{O(x_0)}\times Y)\cap f^{-1}(A)$. Множество P секвенциально замкнуто, как замкнутое подмножество $f^{-1}(A)$. Предположим, что $f^{-1}(A)$ не замкнуто и $(x_0,y_0)\in \overline{f^{-1}(A)}\setminus f^{-1}(A)$. Тогда P не замкнуто и $\pi_Y(P)$ также не замкнуто $(y_0\in\overline{\pi_Y(P)}\setminus\pi_Y(P))$. Так как Y секвенциально, то найдутся $y_n\in\pi_Y(P)$ и $y\notin\pi_Y(P)$, $n\in N$, так что $y_n\to y$. Пусть $F_n=(X\times\{y_n\})\cap P$, $n\in N$, $F=X\times\{y\}$. Тогда выберем $(x_n,y_n)\in F_n, n\in N$. Пусть $S_n=(x_n,y)\in F$, $n\in N$. Положим $\zeta=\overline{\{S_n\}_{n=1}^{\infty}}$ — замкнутое подмножество F. Тогда $f(\zeta)\subset Z$ — секвенциальный бикомпакт и $\{f(S_n)\}_{n=1}^{\infty}$ плотно в $f(\zeta)$. Если $\{f(S_n)\}_{n=1}^{\infty}\neq f(\zeta)$, то $\{f(S_n)\}_{n=1}^{\infty}$ не замкнуто в $f(\zeta)$, следовательно, найдется $z\neq f(S_n), n\in N$, и $f(S_{n_k})\to z$. Покажем, что тогда и $f(x_{n_k},y_{n_k})\to z$. Пусть $Of^{-1}(z)$ — произвольная окрестность множества $f^{-1}(z)$ и $W(f^{-1}(z)\cap F)$ — окрестность множества $f^{-1}(z)\cap F$, такая, что $W(f^{-1}(z)\cap F)\subset Of^{-1}(z)$. В силу замкнутости отображения f найдется k_0, такое, что $S_{n_k}\in W(f^{-1}(z)\cap F)$ при $k\ge k_0$. Так как $f^{-1}(z)\cap F$ — бикомпакт, то найдутся $O(y)$ — окрестность точки y в Y и $V(f^{-1}(z)\cap F)$ — окрестность множества $f^{-1}(z)\cap F$ в F, такие, что $V(f^{-1}(z)\cap F)\times$ $\times O(y)\subset W(f^{-1}(z)\cap F)$. Так как $y_n \to y$, то $y_{n_k}\in O(y)$ при $k\geq k_1$. Тогда

$$(x_{n_k}, y_{n_k})\in V(f^{-1}(z)\cap F)\times O(y)\subset W(f^{-1}(z)\cap F)\subset O(f^{-1}(z))$$

при $k\geq max\{k_0, k_1\}$. Следовательно, $f(x_{n_k}, y_{n_k})\to z$, по $f(x_{n_k}, y_{n_k})\in A, z\notin A$. Это противоречит секвенциальной замкнутости A. Пусть $\{f(S_n)\}_{n=1}^{\infty}=f(\zeta)$. Тогда либо $f(\zeta)$ конечно и тогда найдется стационарная последовательность $f(S_{n_k})\to z, z\in f(\zeta)$, либо $f(\zeta)$ — бесконечный счетный, следовательно, метризуемый бикомпакт, и тогда найдется $f(S_{n_k})\to z, z\in f(\zeta)$. Дальнейшие рассуждения такие, как и в первом случае, приходим к противоречию. Предложение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Энделькинг Р. В. Общая топология (перевод с английского). М.: Мир, 1986. 750 с.
2. Архангельский А. В. Топологические пространства функций. М.: Мир 1986. 223 с.

Амир Анварович ГУБАЙДУЛЛИН —
директор филиала ИТПМ СО РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор,
Иван Николаевич САННИКОВ —
студент 5 курса

УДК 532.529

Влияние дробления пузырьков на структуру нестационарной ударной волны в пузырьковой жидкости

АННОТАЦИЯ. В рамках односкоростной двухтемпературной с двумя давлениями модели пузырьковой жидкости исследуется распространение нестационарной ударной волны при наличии процесса дробления пузырьков. Показано, что этот процесс может оказывать значительное влияние на эволюцию и структуру ударной волны.

Propagation of non-stationary shock wave with bubble breakdown has been investigated on the basis of a one-velocity two-temperature with two pressures model of bubbly liquid. It is shown that this process can effect essentially the evolution and structure of a shock wave.

Введение

К настоящему времени поведение нестационарных ударных волн в пузырьковых жидкостях достаточно хорошо изучено [1, 2]. Однако распространение ударных волн с дроблением пузырьков исследовано