МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Антон Павлович ДЕВЯТКОВ —
студент 5 курса Института математики
и компьютерных наук

УДК 517.53/57

ДВЕ ИЛЛЮСТРАЦИИ ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО МНОЖЕСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ

АННОТАЦИЯ. В статье даются приложения понятия предельного множества последовательности функций к теории простых концов Г. Д. Суворова и к классификации функций по Бэру.

The article gives the applications of the notion of a cluster set of a sequence of functions to the theory of prime ends by G. D. Suvorov and to the classifications of functions by R. Baire.

Целью данной работы является демонстрация некоторых применений понятия предельного множества последовательности функций, которое было введено В. И. Кругликовым в статье [1].

Под предельным множеством последовательности функций $F=(f_j)_{j=1}^{\infty}$ в точке x_0 относительно множества A мы будем понимать совокупность $C(F,A,x_0)$ всевозможных пределов $\lim\limits_{k\to\infty} f_{j_k}(x_k)$, где $(f_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ — подпоследовательность функций из F, а $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность точек $x_k \in A, \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$.

Далее будут сделаны необходимые уточнения относительно множества задания и множества значений функций f_j.

1. Носитель простого конца как предельное множество переменного конформного отображения.

В данном параграфе мы покажем, что предельное множество последовательности нормированных конформных отображений единичного круга на сходящуюся к ядру равномерно ограниченную последовательность односвязных областей является носителем простого конца по теории Г. Д. Суворова. Также мы дадим приложение понятия предельного множества к вопросу о распределении простых концов последовательности областей.

1. Сначала, следуя [4], приведем нужные нам сведения из теории простых концов Г. Д. Суворова.

Рассмотрим в комплексной плоскости равномерно ограниченную последовательность $(D_j)_{j=1}^{\infty}$ односвязных областей, содержащих некоторую фиксированную окрестность начала координат. Ядром последовательности областей $(D_j)_{j=1}^{\infty}$ относительно точки 0 называется наибольшая область D, содержащая 0 и обладающая тем свойством, что любое ее замкнутое подмножество лежит во всех областях D_j, начиная с некоторой. Нетрудно видеть, что ядро представляет собой ограниченную односвязную область. Говорят, что последовательность областей $(D_j)_{j=1}^{\infty}$ сходится к своему ядру D, если ядро любой ее подпоследовательности также есть D.

Сечением области D назовем любую жорданову кривую $\gamma \subset \overline{D}$, не проходящую через начало координат, концы которой лежат на границе ∂D области D. Сечение γ разбивает область D на две подобласти. Ту из них, которая не содержит точку 0, обозначим через $D\gamma$.

Цепью сечений области D назовем последовательность попарно непересекающихся сечений $\{\gamma_n\}$, для которых подобласти $D\gamma_n$ последовательно вложены $D\gamma_1 \supset D\gamma_2 \supset \ldots$, и диаметры этих сечений стремятся к нулю $\operatorname{diam} \gamma_n \to 0$.

Сечением последовательности областей $(D_j)_{j=1}^{\infty}$, лежащим над сечением ядра γ, назовем последовательность $\{\gamma^j\}$ сечений областей D_j, сходящуюся к γ по отклонению Хаусдорфа $\operatorname{dist}(\gamma, \gamma^j) \to 0$. В частности, концы сечений γ^j сходятся к концам γ, и какова бы ни была окрестность U сечения γ, все γ^j, начиная с некоторого, лежат в U.

Последовательность $\{\gamma_n^j\}_{n=1}^{\infty}$ сечений $(D_j)_{j=1}^{\infty}$ назовем цепью сечений последовательности областей $(D_j)_{j=1}^{\infty}$, если $\{\gamma_n\}$ — цепь сечений ядра.

Будем говорить, что цепь сечений $\{\gamma_n^j\}$ последовательности областей $(D_j)_{j=1}^{\infty}$ вложена в цепь сечений $\{\beta_n^j\}$, если для любого номера n найдется номер m такой, что $D_j\beta_n^j \supset D_j\gamma_m^j$ при всех j, начиная с некоторого.

Две цепи сечений последовательности областей назовем эквивалентными, если они вложены друг в друга. Нетрудно проверить, что отношение эквивалентности на множестве цепей сечений введено корректно.

Наконец, простым P концом последовательности областей $(D_j)_{j=1}^{\infty}$ назовем всякий класс эквивалентности цепей сечений этой последовательности областей.

Важным понятием теории простых концов является понятие носителя простого конца.

Пусть простой конец P определен цепью сечений $\{\gamma_n^j\}$ последовательности областей $(D_j)_{j=1}^{\infty}$. Обозначим определяемые сечениями γ_n^j подобласти $D_j\gamma_n^j$ через Δ_n^j. Носитель простого конца P есть континуум, определяемый формулой

$$|P| = \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname*{Ls}_{j\to\infty} \Delta_n^j, \tag{1}$$

в которой Ls — верхний топологический предел последовательности множеств. Нетрудно доказать, что носитель простого конца не зависит от выбора цепи сечений из рассматриваемого класса эквивалентности.

2. Уточним теперь для рассматриваемого случая понятие предельного множества последовательности функций. Пусть в единичном круге $B:|z|<1$ задана равномерно ограниченная последовательность $F=(f_j)_{j=1}^{\infty}$ комплекснозначных функций $w=f_j(z)$. Для некоторой точки $e^{i\theta}$ на окружности $\partial B:|z|=1$ и множества $A\subset B, e^{i\theta}\in\bar{A}$, предельным множеством последовательности функций $F=(f_j)_{j=1}^{\infty}$ в точке $e^{i\theta}$ относительно множества A назовем совокупность $C(F,A,e^{i\theta})$ точек w таких, что существуют последовательность точек $(z_k)_{k=1}^{\infty}\subset A, \lim\limits_{k\to\infty} z_k = e^{i\theta}$, и подпоследовательность функций $(f_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ из F, для которых $\lim\limits_{k\to\infty} f_{j_k}(z_k)=w$.

Если множество A совпадает со всем кругом B, то предельное множество $C(F,B,e^{i\theta})$ называется полным предельным множеством.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(B_j)_{j=1}^{\infty}$ — стационарная последовательность областей, в которой каждая область есть единичный круг $B_j\equiv B:|z|<1$, и пусть $\{\beta_n^j\}$ — цепь сечений последовательности областей $(B_j)_{j=1}^{\infty}$, лежащая над цепью сечений $\{\beta_n\}$ круга B, сходящейся к некоторой точке $e^{i\theta}$. Обозначая через δ_n^j определяемые сечениями β_n^j подобласти $B\beta_n^j$, полное предельное множество произвольной последовательности функций $B\beta_n^j$ в точке $e^{i\theta}$ представимо в виде

$$C(F,B,e^{i\theta})=\bigcap_{n=1}^{\infty}\operatorname*{Ls}_{j\to\infty} f_j(\delta_n^j)(2)$$

Доказательство. Пусть $w\in C(F,B,e^{i\theta})$. Покажем, что $w\in C(F,B,e^{i\theta})$ для любого $n=1,2,\ldots$. Действительно $w=\lim\limits_{k\to\infty} f_{j_k}(z_k)$, для некоторой последовательности точек $z_k\to e^{i\theta}$ и последовательности номеров $j_1<j_2<\ldots\to\infty$. Возьмем произвольную ε-окрестность $U(w,\varepsilon)$ точки w. Так как $z_k\to e^{i\theta}$, а последовательность сечений $(\beta_n^j)_{j=1}^{\infty}$ сходится к сечению β_n, то найдется номер p такой, что при всех $k>p$ будет $z_k\in\delta_n^{j_k}$. Кроме того, можно дополнительно выбрать p столь большим, чтобы было $f_{j_k}(z_k)\in U(w,\varepsilon)$. Таким образом, при всех $k>p$ $U(w,\varepsilon)\cap f_{j_k}(\delta_n^{j_k})\neq\varnothing$. Итак, любая окрестность w точки пересекается с бесконечным числом множеств $f_j(\delta_n^j)$, т.е. $w\in\operatorname*{Ls}\limits_{j\to\infty} f_j(\delta_n^j)$.

Обратно, пусть $w\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname*{Ls}\limits_{j\to\infty} f_j(\delta_n^j)$. Найдем последовательность точек $z_k\to e^{i\theta}$ и подпоследовательность функций $(f_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ такие, что $w=\lim\limits_{k\to\infty} f_{j_k}(z_k)$.

Так как $w \in \operatorname*{Ls}_{j\to\infty} f_j(\delta_1^j)$, то найдутся сколь угодно большой номер j_1 и точка $z_1 \in \delta_1^{j_1}$ такие, что $|w - f_{j_1}(z_1)| < 1$. Так как последовательность сечений $(\beta_1^j)_{j=1}^{\infty}$ сходится к сечению β_1, то можно дополнительно потребовать, чтобы хаусдорфово отклонение dist $(\beta_1^{j_1}, \beta_1) < 1$.

Далее, так как $w \in \operatorname*{Ls}_{j\to\infty} f_j(\delta_2^j)$, найдутся номер $j_2 > j_1$ и точка $z_2 \in \delta_2^{j_2}$ такие, что $|w - f_{j_2}(z_2)| < 1/2$ и dist $(\beta_2^{j_2}, \beta_2) < 1/2$.

На k-ом шаге построенний, учитывая, что $w \in \operatorname*{Ls}_{j\to\infty} f_j(\delta_k^j)$, найдем номер $j_k > j_{k-1}$ и точку $z_k \in \delta_k^{j_k}$ такие, что $|w - f_{j_k}(z_k)| < 1/k$ и dist $(\beta_k^{j_k}, \beta_k) < 1/k$.

Итак, $w = \lim_{k\to\infty} f_{j_k}(z_k)$, осталось проверить, что $z_k \to e^{i\theta}$. Это следует из условий $z_k \in \delta_k^{j_k}$, dist $(\beta_k^{j_k}, \beta_k) < 1/k$ и того, что цепь сечений $\{\beta_k\}$ сходится к точке $e^{i\theta}$. Теорема доказана.

3. Следующая теорема описывает связь предельных множеств последовательности конформных отображений с носителями простых концов последовательности областей и является основной в данном параграфе.

ТЕОРЕМА 2. Для последовательности $F = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ конформных отображений $f_j : B \to D_j$, нормированных условиями $f_j(0) = 0$, $f_j'(0) > 0$ и отображающих единичный круг $B : |z| < 1$ на равномерно ограниченную последовательность областей $(D_j)_{j=1}^{\infty}$, сходящуюся к своему ядру D, в каждой точке $e^{i\theta}$ на окружности $|z| = 1$ полное предельное множество $C(F, B, e^{i\theta})$ представляет собой носитель $|P_\theta|$ простого конца P_θ последовательности областей $(D_j)_{j=1}^{\infty}$, соответствующего (по теореме Г. Д. Суворова о соответствии границ) заданной точке $e^{i\theta}$.

Доказательство. Пусть простой конец P_θ определен цепью сечений $\{\gamma_n^j\}$ последовательности областей $(D_j)_{j=1}^{\infty}$.

Согласно теореме Каратеодори о сходимости конформных отображений, последовательность $F = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ равномерно сходится внутри круга B к конформному отображению на ядро $f : B \to D$.

Обозначим прообразы сечений γ_n ядра D при отображении f через $\beta_n = f^{-1}(\gamma_n)$, а прообразы сечений γ_n^j областей D_j при отображениях f_j через $\beta_n^j = f_j^{-1}(\gamma_n^j)$. Тогда по теореме Г. Д. Суворова о преобразовании сечений [4; 169]) $\{\beta_n^j\}$ — цепь сечений стационарной последовательности областей $(B_j)_{j=1}^{\infty}$, $B_j \equiv B : |z| < 1$, лежащая над цепью сечений $\{\beta_n\}$ круга B, сходящейся к точке $e^{i\theta}$.

Обозначая, как и раньше, определяемые сечениями β_n^j подобласти $B\beta_n^j$ через δ_n^j, а определяемые сечениями γ_n^j подобласти $D_j\gamma_n^j$ через $\Delta_n^j = f_j(\delta_n^j)$, и сравнивая определение носителя простого конца (1) с формулой для предельного множества (2), заключаем, что теорема справедлива.

4. В качестве дальнейшего приложения этой теоремы исследуем вопрос о распределении простых концов последовательности областей.

Сначала заметим, что доказанная теорема аналогична тому известному факту, что предельное множество $C(f,B,e^{i\theta})$ предельного отображения $f: B \to D$ представляет собой носитель $|\pi_\theta|$ простого конца π_θ ядра.

Описание распределений простых концов последовательности областей $(D_j)_{j=1}^\infty$ определяется их распределением в ядре. Например, согласно Б. П. Куфареву [2], будем говорить, что сходящаяся к ядру последовательность областей $(D_j)_{j=1}^\infty$ имеет распределение простых концов вида $(23')$, если ядро D имеет простые концы типов и по предложенной еще в 1913 г. классификации Каратеодори (см. [4]), причем для всех концов типа , соответствующих точкам окружности $e^{i\theta} \in E_2$, носители простых концов последовательности и ядра совпадают $|\pi_\theta|=|P_\theta|$, а для концов типа 3, соответствующих точкам $e^{i\theta} \in E_3$, имеет место строгое включение $|\pi_\theta| \subset |P_\theta|$.

Вопрос о возможности указанного распределения был поставлен в статье [2], авторы которой на конкретных примерах реализовали все остальные распределения простых концов последовательности областей при всевозможных их распределениях в ядре и всевозможных расстановках штрихов.

Учитывая связь между носителями простых концов и предельными множествами, задача сводится к изучению множества совпадения предельного множества последовательности функций $C(F,B,e^{i\theta})$ и предельного множества ее предельной функции $C(f,B,e^{i\theta})$.

Следующая теорема описывает топологическое строение этого множества.

ТЕОРЕМА 3. Пусть в круге $B:|z|<1$ задана произвольная равномерно ограниченная последовательность функций $F=(f_j)_{j=1}^\infty$, сходящаяся в каждой точке z этого круга к предельной функции $f(z)$. Тогда множество точек $e^{i\theta}$, в которых полные предельные множества $C((f_j)_{j=1}^\infty,B,e^{i\theta})$ и $C(f,B,e^{i\theta})$ совпадают, имеет на окружности $|z|=1$ тип G_δ.

Доказательство. Обозначим $K=\{e^{i\theta}: C((f_j)_{j=1}^\infty,B,e^{i\theta})=C(f,B,e^{i\theta})\}$

Рассмотрим какую-либо цепь сечений $\{\beta_n\}$ круга B, сходящуюся к некоторой точке $e^{i\theta}\in\partial B$. Согласно теореме 1 интересующие нас предельные множества могут быть представлены в виде

$$C(F,B,e^{i\theta})=\bigcap_{n=1}^\infty \operatorname*{Ls}_{j\to\infty} f_j(\delta_n) \text{ и } C(f,B,e^{i\theta})=\bigcap_{n=1}^\infty \overline{f(\delta_n)}, \text{ где } \delta_n = B\beta_n.$$

Мы видим, что эти предельные множества являются пересечениями убывающих последовательностей замкнутых множеств, а значит, их топологическими пределами [5]

$$C(F,B,e^{i\theta}) = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \operatorname*{Ls}_{j\to\infty} f_j(\delta_n), \quad C(f,B,e^{i\theta}) = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \overline{f_j(\delta_n)}.$$

Но для последовательностей замкнутых ограниченных множеств топологическая сходимость равносильна сходимости по отклонению Хаусдорфа. Следовательно, для совпадения указанных топологических пределов необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist} (\operatorname*{Ls}_{j\to\infty} f_j(\delta_n), \overline{f(\delta_n)}) = 0,$$

где dist (M,N) — хаусдорфово отклонение между множествами M и N.

Для любого числа $\varepsilon > 0$ обозначим через K_ε множество точек $e^{i\theta} \in \partial B$, для которых найдется сечение β с концами, отличными от $e^{i\theta}$, такое, что $\operatorname{diam} \beta < \varepsilon$, $\operatorname{dist} (\operatorname*{Ls}_{j\to\infty} f_j(B\beta), \overline{f(B\beta)}) < \varepsilon$. Очевидно, что K_ε — открытое подмножество окружности $|z|=1$.

Возьмем убывающую к нулю последовательность $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > 0$, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, и покажем, что $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{\varepsilon_n}$, а значит, является G_δ-множеством.

Действительно, если $e^{i\theta} \in K$, то для цепи сечений $\{\beta_n\}$, сходящейся к $e^{i\theta}$ будет выполнено $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist} (\operatorname*{Ls}_{j\to\infty} f_j(B\beta_n), \overline{f(B\beta_n)}) = 0$. Это означает, что найдется сечение β_n сколь угодно малого диаметра, для которого величина $\operatorname{dist} (\operatorname*{Ls}_{j\to\infty} f_j(B\beta_n), \overline{f(B\beta_n)})$ сколь угодно мала. Таким образом $e^{i\theta} \in K_{\varepsilon_n}$, для любого номера $n = 1,2,\ldots$.

Обратно, если $e^{i\theta} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{\varepsilon_n}$, то легко построить последовательность сечений $\{\beta_n\}$, сходящуюся к точке $e^{i\theta}$, для которой $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist} (\operatorname*{Ls}_{j\to\infty} f_j(B\beta_n), \overline{f(B\beta_n)}) = 0$, т.е. $e^{i\theta} \in K$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. В последовательности областей распределение простых концов вида (23′) невозможно.

Доказательство. Обозначим через E_2 и E_3 множества тех точек окружности $\partial B : |z|=1$, которым отвечают простые конца типов и соответственно. Заметим, что множество E_2 всюду плотно, так как ему отвечает множество достижимых точек границы ядра.

По теореме 3 E_2 — множества типа G_δ, а значит E_3 — типа F_σ. Каждое из замкнутых множеств, объединением которых, является E_3, нигде не плотно, поскольку всюду плотно множество E_2. Таким образом, E_3 — множество первой категории на $|z|=1$. Но по теореме Коллингвуда, E_2 — также множество первой категории. Следовательно окружность $\partial B = E_2 \cup E_3$ является множеством первой категории на себе, что противоречит теореме Бэра.

2. Точки непрерывной сходимости при предельном процессе образования функций первого класса Бэра.

В данном параграфе мы, используя в качестве инструмента исследования понятие предельного множества, дадим дополнение к классической теореме Бэра о точках непрерывности функций первого класса, дающее новую информацию о предельном процессе образования множества таких функций.

1. Прежде чем сформулировать основной результат, приведем требующиеся здесь необходимые сведения.

Сначала, следуя, например, [6], уточним понятие функции первого класса. Действительную функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a,b]$, называют функцией первого класса Бэра, если она не является непрерывной, но представима в виде $f(x)=\lim\limits_{j\to 0} f_j(x)$, где все функции $f_j(x)$ непрерывны на этом отрезке. Классическая теорема Бэра [7] утверждает, что для всякой функции первого класса $f(x)$ и любого непустого замкнутого множества A, расположенного на отрезке $[a,b]$, найдется точка $x_0 \in A$, в которой функция $f(x)$ является непрерывной относительно множества A.

Следуя Г. Хану ([3]), будем говорить, что последовательность функций $F=(f_j)_{j=1}^{\infty}$ непрерывно сходится в точке относительно множества A, если для любой последовательности точек $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subset A, \lim\limits_{j\to\infty} x_j = x_0$, существует предел $\lim\limits_{j\to\infty} f_j(x_j)$.

2. Уточним теперь для рассматриваемого случая понятие предельного множества последовательности функций.

Для последовательности $F=(f_j)_{j=1}^{\infty}$ определенных на отрезке $[a,b]$ функций $f_j(x)$, некоторого подмножества $A \subset [a,b]$ и точки $x_0 \in \overline{A}$ предельным множеством последовательности функций F в точке x_0 относительно множества A назовем совокупность $C(F,A,x_0)$ точек y, для каждой из которых существуют последовательность точек $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset A, \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$, и подпоследовательность функций $(f_{j_k})_{k=1}^{\infty} \subset F$ такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} f_{j_k}(x_k) = y$.

Нетрудно видеть, что непрерывная сходимость последовательности функций F в точке x_0 относительно множества A означает одноточечность предельного множества $C(F,A,x_0)$, которое в этом случае будем называть вырожденным.

3. Основным результатом данного параграфа является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть на некотором отрезке $[a,b]$ задана последовательность $F=(f_j)_{j=1}^{\infty}$ непрерывных функций $f_j(x)$, сходящаяся в каждой точке этого отрезка. Тогда для любого непустого замкнутого множества A, расположенного на отрезке $[a,b]$, найдется точка $[a,b]$, в которой предельное множество $C(F,A,x_0)$ вырожденно, и, таким образом, последовательность функций F непрерывно сходится в точке x_0 относительно множества A.

Доказательство. Выбирая на отрезке $[a,b]$ какое-либо непустое замкнутое множество A, сначала покажем, что для любого числа $\varepsilon > 0$ и всякого открытого интервала U, содержащего точки множества A, найдется интервал

$V \subset U$, также содержащий точки A и такой, что для каждой точки $x \in V \cap A$ диаметр предельного множества $\operatorname{diam} C(F, A, x) < \varepsilon$.

Предполагая противное, мы можем указать число $\varepsilon_0 > 0$ и интервал U_0, $U_0 \cap A \neq \varnothing$, такие, что для любого интервала $V \subset U_0$, содержащего точки множества A, найдется точка $x \in V \cap A$, в которой $\operatorname{diam} C(F, A, x) \geq \varepsilon_0$.

Чтобы получить требуемое противоречие, мы определим сейчас точку $\alpha \in A$, в которой исходная последовательность $F = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ расходится.

Такая точка будет представляться нами одноточечным пересечением $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \overline{V_k \cap A}$ специальной последовательности расположенных в U_0 вложенных интервалов $V_1 \supset V_2 \supset \ldots$.

Опишем построение первого интервала V_1. При этом везде далее для краткости вместо символа $C(F, A, x)$ условимся писать просто $C(x)$.

Опираясь на предположение, в интервале U_0 мы можем выбрать точку $x_1 \in U_0 \cap A$, в которой $\operatorname{diam} C(x_1) \geq \varepsilon_0$.

Далее во множестве $C(x_1)$ отметим любую точку $y_1 \in C(x_1)$ и в соответствии с определением предельного множества подберем точку $c_1 \in U_0 \cap A$ и номер j_1 так, чтобы $| f_{j_1}(c_1) - y_1 | < 1$. В силу непрерывности это неравенство сохраняет силу и в некотором (нужном нам) интервале $V_1 = (c_1 - \delta_1, c_1 + \delta_1)$, где $\delta_1 < 1$, содержащемся в U_0, так что при всех $x \in \overline{V_1 \cap A}$ будет выполнено

$$| f_{j_1}(x) - y_1 | < 1.$$

На втором шаге построений считаем исходным интервал V_1. Опираясь опять же на предположение, пусть $x_2 \in V_1 \cap A$ — та точка, в которой $\operatorname{diam} C(x_2) \geq \varepsilon_0$. Легко видеть, что найдется некая точка $y_2 \in C(x_2)$, такая, что $| y_2 - y_1 | \geq \varepsilon_0 / 4$ (действительно, в противном случае было бы $\operatorname{diam} C(x_2) \leq \varepsilon_0 / 2$). Согласно определению предельного множества, мы можем подобрать точку $c_2 \in V_1 \cap A$ и номер $j_2 > j_1$ так, чтобы $| f_{j_2}(c_2) - y_2 | < 1/2$. Так как функция f_{j_2} непрерывна, найдется число $\delta_2 < 1/2$, столь малое, что интервал $V_2 = (c_2 - \delta_2, c_2 + \delta_2)$ содержится в интервале V_1, и при всех $x \in \overline{V_2 \cap A}$ выполнено

$$| f_{j_2}(x) - y_2 | < 1/2.$$

На третьем шаге, отправляясь от интервала V_2, аналогичным образом последовательно находим точку $x_3 \in V_2 \cap A$ с $\operatorname{diam} C(x_3) \geq \varepsilon_0$, точку $y_3 \in C(x_3)$ с $| y_3 - y_2 | \geq \varepsilon_0 / 4$, точку $c_3 \in V_2 \cap A$ и номер $j_3 > j_2$ с $| f_{j_3}(c_3) - y_3 | < 1/3$. При этом для непрерывной функции f_{j_3} в некотором интервале $V_3 = (c_3 - \delta_3, c_3 + \delta_3)$, $\delta_3 < 1/3$, входящем в V_2, при $x \in \overline{V_3 \cap A}$ выполнено

$$| f_{j_3}(x) - y_3 | < 1/3.$$

Продолжая подобные построения бесконечно, в итоге получим последовательность пересекающихся с A вложенных интервалов $U_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset ...$, с убывающими к нулю длинами, а также последовательность точек $(y_k)_{k=1}^{\infty}$, $|y_{k+1} - y_k| \geq \varepsilon_0 / 4$, $k = 1, 2, ...$, и подпоследовательность функций $(f_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ так, что для всех $x \in \overline{V_k \cap A}$, $k = 1, 2, ...$, выполнено

$$|f_{j_k}(x) - y_k| < 1/k.$$

Рассматривая, наконец, множество $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{V_k \cap A}$, состоящее из одной точки $\alpha \in A$, согласно неравенствам $|y_{k+1} - y_k| \geq \varepsilon_0 / 4$\$ и $|f_{j_k}(\alpha) - y_k| < 1/k$ заключаем, что числовая подпоследовательность $(f_{j_k}(\alpha))_{k=1}^{\infty}$ (а вместе с нею и вся последовательность $(f_j(\alpha))_{j=1}^{\infty}$) расходится, а это противоречие мы и хотели получить.

Итак, в заключительной части доказательства теоремы мы считаем, что для отмеченного нами множества A из $[a,b]$ при всяком числе $\varepsilon > 0$ и в каждом интервале U, $U \cap A \neq \varnothing$, найдется интервал $V \subset U$, $V \cap A \neq \varnothing$, такой, что $\operatorname{diam} C(x) < \varepsilon$ для всех точек $x \in V \cap A$.

Ясно, что упомянутый интервал V можно выбрать еще и сколь угодно малой длины и так, чтобы неравенство $\operatorname{diam} C(x) < \varepsilon$ имело место не только для всех точек $x \in V \cap A$, но также и для точек x из замыкания $\overline{V \cap A}$.

Теперь совсем уж просто указать искомую точку $x_0 \in A$, в которой предельное множество $C(x_0) = C(F, A, x_0)$ вырожденно. Рассмотрим убывающую последовательность пересекающихся с A интервалов $V_1 \subset V_2 \subset ...$, длины которых стремятся к нулю, и таких, что при всех $x \in \overline{V_k \cap A}$, $k = 1, 2, ...$, выполнено $\operatorname{diam} C(x) < 1/k$.

Эти условия обеспечивают одноточечность пересечения $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{V_k \cap A}$. В представляющей его точке x_0 (принадлежащей, разумеется, множеству A) выполнено $\operatorname{diam} C(x_0) < 1/k$ при любом $k = 1, 2, ...$, т.е. $\operatorname{diam} C(x_0) = 0$, а это и означает вырожденность данного предельного множества. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Устанавливаемое теоремой свойство характерно именно для процесса сходимости последовательностей непрерывных функций. Уже для последовательностей функций первого класса Бэра теорема оказывается неверной, как показывает следующий простой пример. Пусть $(q_j)_{j=1}^{\infty}$ — последовательность всех рациональных точек отрезка $[a,b]$. Определим последовательность функций $F = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ посредством равенств

$$f_j(x) = \begin{cases} 1, & x = q_j \\ 0, & x \neq q_j \end{cases}, \quad x \in [a,b].$$

Эта последовательность сходится к нулю в каждой точке отрезка $[a,b]$, но, как нетрудно видеть, предельное множество $C(F, [a,b], x_0)$ состоит при любом $x_0 \in [a,b]$ из двух точек -0 и 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В качестве следствия доказанного утверждения легко вытекает уже упомянутая ранее теорема Бэра о точках непрерывности функций первого класса. Для этого достаточно заметить, что множество всех частичных пределов предельной функции $f(x)=\lim\limits_{j\to 0} f_j(x)$ при $x \to x_0$, $x \in A$, входит в предельное множество последовательности функций $C((f_j)_{j=1}^{\infty}, A, x_0)$.

В заключение автор выражает благодарность профессору В.И. Кругликову за постановку задачи и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кругликов В. И. Предельные множества последовательности функций // Докл. РАН. 1997. Т. 357. № 1. С. 16-18.
2. Кокорева С. И., Куфарев Б. П. Замечания о строении множества простых концов последовательности плоских областей, сходящейся к ядру // Вопросы геометрической теории функций. Томск, 1965. Вып. 3. С. 27-31.
3. Stoilow, S. Asupra convergentei continue // Studii si cercetari mat. 1956. 7. № 3-4. S. 247-250.
4. Суворов Г. Д. Семейства плоских топологических отображений. Новосибирск, СО АН, 1965. 265 с.
5. Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966. 594 с.
6. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
7. Бэр Р. Теория разрывных функций. М.-Л.: ГТТИ, 1932. 134 с.

Александр Юрьевич АЛЕКСАНДРОВ —
зав. кафедрой управления
медико-биологическими системами,
доктор физико-математических наук, профессор
Алексей Викторович ПЛАТОНОВ —
доцент кафедры управления
медико-биологическими системами,
кандидат физико-математических наук
Санкт-Петербургский государственный университет

УДК 517.935.4

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

АННОТАЦИЯ. В работе предлагается способ построения функции Ляпунова специального вида для некоторого класса систем нелинейных дифференциальных уравнений. Доказывается, что если рассматриваемая система абсолютно устойчива, то тогда для нее обязательно существует указанная функция Ляпунова. Показано, что для решения некоторых задач предложенный способ построения функции Ляпунова является более эффективным по сравнению с уже известным.

The method of construction of Lyapunov's function of special type for a class of nonlinear systems is suggested. It is proved that the systems considered are absolutely stable if for these systems there exist such Lyapunov's functions. It is shown that for the solution of some problems the method suggested for the construction of Lyapunov's functions is more effective then known ones.