ЗАМЕЧАНИЕ 2. В качестве следствия доказанного утверждения легко вытекает уже упомянутая ранее теорема Бэра о точках непрерывности функций первого класса. Для этого достаточно заметить, что множество всех частичных пределов предельной функции $f(x)=\lim_{j\to 0} f_j(x)$ при $x\to x_0$, $x\in A$, входит в предельное множество последовательности функций $C((f_j)_{j=1}^{\infty}, A, x_0)$.

В заключение автор выражает благодарность профессору В.И. Кругликову за постановку задачи и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кругликов В. И. Предельные множества последовательности функций // Докл. РАН. 1997. Т. 357. № 1. С. 16-18.
2. Кокорева С. И., Куфарев Б. П. Замечания о строении множества простых концов последовательности плоских областей, сходящейся к ядру // Вопросы геометрической теории функций. Томск, 1965. Вып. 3. С. 27-31.
3. Stoilow, S. Asupra convergentei continue // Studii si cercetari mat. 1956. 7. № 3-4. S. 247-250.
4. Суворов Г. Д. Семейства плоских топологических отображений. Новосибирск, СО АН, 1965. 265 с.
5. Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966. 594 с.
6. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
7. Бэр Р. Теория разрывных функций. М.-Л.: ГТТИ, 1932. 134 с.

Александр Юрьевич АЛЕКСАНДРОВ —
зав. кафедрой управления
медико-биологическими системами,
доктор физико-математических наук, профессор
Алексей Викторович ПЛАТОНОВ —
доцент кафедры управления
медико-биологическими системами,
кандидат физико-математических наук
Санкт-Петербургский государственный университет

УДК 517.935.4

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

АННОТАЦИЯ. В работе предлагается способ построения функции Ляпунова специального вида для некоторого класса систем нелинейных дифференциальных уравнений. Доказывается, что если рассматриваемая система абсолютно устойчива, то тогда для нее обязательно существует указанная функция Ляпунова. Показано, что для решения некоторых задач предложенный способ построения функции Ляпунова является более эффективным по сравнению с уже известным.

The method of construction of Lyapunov's function of special type for a class of nonlinear systems is suggested. It is proved that the systems considered are absolutely stable if for these systems there exist such Lyapunov's functions. It is shown that for the solution of some problems the method suggested for the construction of Lyapunov's functions is more effective then known ones.

1. **Постановка задачи**. Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = a_i f_i(x_i) + \sum_{j=1}^{k_i} b_{ij} f_1^{\alpha_{i1}^{(j)}}(x_1) \dots f_n^{\alpha_{in}^{(j)}}(x_n) \quad i = 1, \dots, n. \qquad (1)$$

Здесь $x_i \in R^1$, a_i и b_{ij} — постоянные коэффициенты; скалярные функции $f_i(x_i)$ определены и непрерывны при $|x_i| < \Delta$, $0 < \Delta \le +\infty$ и обладают следующим свойством: $x_i f_i(x_i) > 0$ при $x_i \ne 0$, $\alpha_{is}^{(j)}$ — неотрицательные рациональные числа с нечетными знаменателями.

Пусть выполнены неравенства $\sum_{s=1}^{n} \alpha_{is}^{(j)} > 0$, $j = 1, \dots, k_i$, $i = 1, \dots, n$. Тогда система (1) имеет нулевое решение.

Предположим, что коэффициенты b_{ij} удовлетворяют условиям

$$b_{ij} > 0, \quad j = 1, \dots, k_i, \quad i = 1, \dots, n. \qquad (2)$$

Например, соотношения (2) будут иметь место, если система (1) получена как система сравнения для некоторой сложной (многосвязной) системы [1].

Определение 1. Систему (1) назовем абсолютно устойчивой, если ее нулевое решение асимптотически устойчиво при любых допустимых функциях $f_i(x_i)$.

Определение 2. Будем говорить, что система (1) удовлетворяет условию Мартынюка-Оболенского [2] (МО-условию), если для любого $\delta > 0$ существует решение $\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_n$ системы неравенств

$$a_i \theta_i + \sum_{j=1}^{k_i} b_{ij} \theta_1^{\alpha_{i1}^{(j)}} \dots \theta_n^{\alpha_{in}^{(j)}} < 0, \quad i = 1, \dots, n, \qquad (3)$$

такое, что $0 < \tilde{\theta}_i < \delta$, $i = 1, \dots, n$.

Абсолютная устойчивость системы (1) исследовалась в работе [3]. Была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1 [3]. Система (1) является абсолютно устойчивой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет МО-условию.

Замечание 1. Критерий абсолютной устойчивости, сформулированный в теореме 1, аналогичен критерию асимптотической устойчивости нулевого решения автономных систем Важевского, полученному в [2]. Однако по сравнению с ним в теореме 1 на систему (1) не накладывается дополнительных предположений, имеющихся в [2], таких как единственность решений, изолированность положения равновесия, неубывание функций $f_i(x_i)$. В частности, система (1) может не быть системой Важевского.

Доказательство необходимости условий теоремы 1 основывалось на том факте, что при определенном выборе допустимых функций $f_i(x_i)$ для системы (1) будут выполнены предположения работы [2], и тогда требуемое будет следовать из результатов этой работы. Для доказательства достаточности в [3] строилась функция Ляпунова вида

$$V = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_0^{x_i} f_i^{\gamma_i}(\tau) d\tau, \qquad (4)$$

где γ_i — положительные рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, $\lambda_i > 0$, $i = 1,\ldots,n$. „ Было доказано [3], что если для системы (1) выполнено МО-условие, то параметры $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$, можно выбрать так, чтобы функция (4) удовлетворяла требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Таким образом, при выполнении неравенств (2) существование функции Ляпунова вида (4) является необходимым и достаточным условием абсолютной устойчивости системы (1). Однако для решения ряда задач и для некоторых модификаций системы (1) функцию Ляпунова бывает удобнее строить в другом виде.

В настоящей работе предлагается еще один способ построения функции Ляпунова для системы (1) и определяются условия существования такой функции.

2. Построение функции Ляпунова специального вида. Далее будем считать, что функции $f_i(x_i)$ в системе (1) удовлетворяют дополнительным предположениям: $f_i(x_i)$ непрерывно дифференцируемы при $|x_i| < \Delta$, $f_i'(x_i) > 0$ при $0 < |x_i| < \Delta$, $f_i'(0) \geq 0$, $i = 1,\ldots,n$.

Построим функцию Ляпунова для системы (1) в форме

$$V_1 = \max_{i=1,\ldots,n} \left(\frac{f_i(x_i)}{\theta_i} \right)^{\gamma_i + 1}, \tag{5}$$

где $\theta_1,\ldots,\theta_n$ — положительные постоянные, $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ — положительные рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями. Функция V_1 положительно определена. Обозначим через $D^+V_1(x)$ правую верхнюю производную Дини [4] от функции V_1, вычисленную в силу системы (1). Здесь $x = (x_1,\ldots,x_n)^*$

ТЕОРЕМА 2. Система (1) абсолютно устойчива тогда и только тогда, когда для нее существует функция Ляпунова вида (5) такая, что в некоторой окрестности начала координат $\|x\| < H$ ($H > 0$) имеет место неравенство

$$D^+V_1(x) \leq W(x), \tag{6}$$

где $W(x)$ — отрицательно определенная функция.

Доказательство. Достаточность условий теоремы очевидна (см. [4]). Покажем необходимость.

Предположим, что система (1) абсолютно устойчива. Тогда для нее выполнено МО-условие. В работе [3] доказано, что в этом случае система неравенств

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\alpha_{is}^{(j)}}{\gamma_s + 1} \geq \frac{1}{\gamma_i + 1}, \qquad j = 1,\ldots,k_i, \quad i = 1,\ldots,n,$$

имеет положительное решение $\tilde{\gamma}_1,\ldots,\tilde{\gamma}_n$. Без потери общности можно считать, что $\tilde{\gamma}_1,\ldots,\tilde{\gamma}_n$ — рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями.

Пусть $\tilde{\theta}_1,\ldots,\tilde{\theta}_n$ — некоторые положительные постоянные, удовлетворяющие системе (3). Тогда найдется число $\eta > 0$ такое, что

$$a_i\tilde{\theta}_i + \sum_{j=1}^{k_i} b_{ij}\tilde{\theta}_1^{\alpha_{i1}^{(j)}} \ldots \tilde{\theta}_n^{\alpha_{in}^{(j)}} < -\eta, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{V}_1 = \max_{i=1,\ldots,n}\left(\frac{f_i(x_i)}{\tilde{\theta}_i}\right)^{\tilde{\gamma}_i+1}.$$

Пусть $0<H<\Delta$. Обозначим через $x(t)$ некоторое решение системы (1), определенное для всех $t\in[0,+\infty)$ и удовлетворяющее неравенству $\|x(t)\|<H$. Зафиксируем произвольный момент времени $\hat{t}\geq 0$. Найдем

$$\max_{i=1,\ldots,n}\left(\frac{f_i(x_i(\hat{t}))}{\tilde{\theta}_i}\right)^{\tilde{\gamma}_i+1}.$$

Предположим, что этот максимум достигается на индексах $i\in A\subseteq\{1,\ldots,n\}$ и равен числу B, т. е.

$$\left(\frac{f_i(x_i(\hat{t}))}{\tilde{\theta}_i}\right)^{\tilde{\gamma}_i+1}=B, \text{ если } i\in A; \left(\frac{f_i(x_i(\hat{t}))}{\tilde{\theta}_i}\right)^{\tilde{\gamma}_i+1}<B, \text{ если } i\notin A.$$

Тогда если положительная постоянная достаточно мала, то для каждого $i\in A$ имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{f_i(x_i(t))}{\tilde{\theta}_i}\right)^{\tilde{\gamma}_i+1}\right)\Bigg|_{t=\hat{t}}=\frac{\tilde{\gamma}_i+1}{\tilde{\theta}_i^{\tilde{\gamma}_i+1}}f_i^{\tilde{\gamma}_i}(x_i(\hat{t}))f_i'(x_i(\hat{t}))\Big(a_i f_i(x_i(\hat{t}))+$$

$$+\sum_{j=1}^{k_i}b_{ij}f_1^{\alpha_{i1}^{(j)}}(x_1(\hat{t}))\ldots f_n^{\alpha_{in}^{(j)}}(x_n(\hat{t}))\Big)\leq$$

$$\leq\frac{\tilde{\gamma}_i+1}{\tilde{\theta}_i}Bf_i'(x_i(\hat{t}))\left(a_i\tilde{\theta}_i+\sum_{j=1}^{k_i}b_{ij}\tilde{\theta}_1^{\alpha_{i1}^{(j)}}\ldots\tilde{\theta}_n^{\alpha_{in}^{(j)}}\right)\leq-\frac{\tilde{\gamma}_i+1}{\tilde{\theta}_i}Bf_i'(x_i(\hat{t}))\eta.$$

Значит,

$$D^+\tilde{V}_1(x(\hat{t}))\leq-B\eta\min_{i\in A}\left(\frac{\tilde{\gamma}_i+1}{\tilde{\theta}_i}f_i'(x_i(\hat{t}))\right).$$

Отсюда следует требуемое. Теорема доказана.

Замечание 2. Постоянная W и функция $W(x)$ в формулировке теоремы 2 зависят, вообще говоря, от вида функций $f_1(x_1),\ldots,f_n(x_n)$.

Замечание 3. Теорему, аналогичную теореме 2, можно сформулировать и если функции $f_i(x_i)$ не дифференцируемы в точках $x_i=0$, $i=1,\ldots,n$. В этом случае для абсолютной устойчивости системы (1) необходимо и достаточно существования функции Ляпунова вида (5), удовлетворяющей соотношению (6) в области $0<\|x\|<H$ ($H>0$), где $W(x)$ — непрерывная и отрицательная в данной области функция.

3. Условия абсолютной устойчивости неавтономных систем. В этом разделе рассмотрим одно обобщение системы (1), для которого использование функции Ляпунова вида (5) более эффективно, чем использование функции Ляпунова вида (4).

Пусть коэффициенты a_i и b_{ij} в системе (1) являются функциями времени, определенными и непрерывными при всех $t \geq 0$. Таким образом, будем исследовать систему

$$\dot{x}_i = a_i(t)f_i(x_i) + \sum_{j=1}^{k_i} b_{ij}(t) f_1^{\alpha_{i1}^{(j)}}(x_1)\ldots f_n^{\alpha_{in}^{(j)}}(x_n),\ i = 1,\ldots,n. \qquad (7)$$

Строя функцию Ляпунова для системы (7) в форме (4) и проводя те же рассуждения, что и в работе [3], придем к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $a_i(t) \leq \bar{a}_i$, $\left|b_{ij}(t)\right| \leq \bar{b}_{ij}$ при всех $t \geq 0$, где $\bar{a}_i < 0$, $\bar{b}_{ij} \geq 0$ — постоянные величины, и для любого $\bar{b}_{ij} \geq 0$ существует решение $\tilde{\theta}_1,\ldots,\tilde{\theta}_n$ системы неравенств

$$\bar{a}_i\theta_i + \sum_{j=1}^{k_i} \bar{b}_{ij}\theta_1^{\alpha_{i1}^{(j)}} \ldots \theta_n^{\alpha_{in}^{(j)}} < 0, \qquad i = 1,\ldots,n,$$

такое, что $0 < \tilde{\theta}_i < \delta$, $i = 1,\ldots,n$. Тогда система (7) абсолютно устойчива.

С другой стороны, использование функции Ляпунова вида (5) приведет к более лучшему результату.

ТЕОРЕМА 4. Пусть для любого $\delta > 0$ найдутся постоянные $\tilde{\theta}_1,\ldots,\tilde{\theta}_n$, η ($0 < \tilde{\theta}_i < \delta$, $i = 1,\ldots,n$, $\eta > 0$), удовлетворяющие соотношениям

$$a_i(t)\tilde{\theta}_i + \sum_{j=1}^{k_i} \left|b_{ij}(t)\right| \tilde{\theta}_1^{\alpha_{i1}^{(j)}} \ldots \tilde{\theta}_n^{\alpha_{in}^{(j)}} < -\eta,\ i = 1,\ldots,n,$$

при всех $t \geq 0$. Тогда система (7) абсолютно устойчива.

Пример. Предположим, что система (7) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (c + 2\sin t)f_1(x_1) + \cos^2 t\, f_2^3(x_2), \\ \dot{x}_2 = -f_2(x_2) + f_1^{1/3}(x_1), \end{cases} \qquad (8)$$

где c — некоторая постоянная.

Согласно теореме 3, система (8) будет абсолютно устойчивой, если $c < -3$. Теорема 4 позволяет ослабить это условие. Получаем, что для абсолютной устойчивости системы (8) достаточно выполнения неравенства $c < -2$.

Условия абсолютной устойчивости системы (7), задаваемые теоремой 4, можно ослабить.

ТЕОРЕМА 5. Пусть существует непрерывная и неотрицательная на промежутке $[0,+\infty)$ функция $\lambda(t)$ такая, что $\int_0^{+\infty} \lambda(t)dt = +\infty$, и для любого $\delta > 0$ постоянные $\tilde{\theta}_1,\ldots,\tilde{\theta}_n$, η ($0<\tilde{\theta}_i<\delta$, $i=1,\ldots,n$, $\eta>0$) можно выбрать так, чтобы при всех $t\geq 0$ имели место соотношения

$$a_i(t)\tilde{\theta}_i+\sum_{j=1}^{k_i}\left|b_{ij}(t)\right|\tilde{\theta}_1^{\alpha_{i1}^{(j)}}\ldots\tilde{\theta}_n^{\alpha_{in}^{(j)}}\leq-\eta\lambda(t)\leq 0,\ i=1,\ldots,n.$$

Тогда система (7) абсолютно устойчива.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Груйич Л. Т., Мартынюк А. А., Риббенс-Павелла М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. Киев: Наукова Думка. 1984. 308 с.

2. Мартынюк А. А., Оболенский А. Ю. Об устойчивости решений автономных систем Важевского // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 8. С. 1392-1407.

3. Aleksandrov, A. Yu., Platonov, A. V. Construction of Lyapunov's functions for a class of nonlinear systems // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 2006. Vol. 6, № 1. P. 17-30.

4. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир. 1980. 300 с.

Ольга Владимировна НИССЕНБАУМ —
старший преподаватель кафедры
информационной безопасности

УДК 519:389.1.001.5

НЕРЕКУРРЕНТНОСТЬ АСИНХРОННОГО АЛЬТЕРНИРУЮЩЕГО ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ С ИНИЦИИРОВАНИЕМ ЛИШНИХ СОБЫТИЙ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ИЗ СОСТОЯНИЯ В СОСТОЯНИЕ

АННОТАЦИЯ. Рассмотрен асинхронный альтернирующий дважды стохастический поток событий с мертвым временем, порождаемый случайным процессом с двумя состояниями. Показана нерекуррентность потока с инициированием лишних событий при переходе из состояния в состояние. Получена совместная плотность вероятностей между соседними событиями в наблюдаемом потоке.

The problem of recurrence of the asynchronous alternating doubly stochastic event flow with extra event initiation is considered. The case of unrelenting dead time is investigated. The non-recurrence of flow with extra event initiation when state transition occurs is proved. The join density function for adjacent periods between events of observed flow is formulated.

Системы и сети массового обслуживания (СМО, СеМО) находят широкое применение в качестве математической модели реальных технических, физических и экономических систем. Случайные потоки событий являются, в свою очередь, математической моделью информационных потоков, функционирующих в СМО и СеМО. Например, случайными потоками событий достаточно адекватно описываются информационные потоки заявок, циркулирующих в цифровых сетях интегрального обслуживания (Integrated Service Digital