янные $\tilde{\theta}_1,\ldots,\tilde{\theta}_n$, η ($0<\tilde{\theta}_i<\delta$, $i=1,\ldots,n$, $\eta>0$) можно выбрать так, чтобы при всех $t\geq 0$ имели место соотношения

$$a_i(t)\tilde{\theta}_i+\sum_{j=1}^{k_i}\left|b_{ij}(t)\right|\tilde{\theta}_1^{\alpha_{i1}^{(j)}}\ldots\tilde{\theta}_n^{\alpha_{in}^{(j)}}\leq-\eta\lambda(t)\leq 0,\ i=1,\ldots,n.$$

Тогда система (7) абсолютно устойчива.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Груйич Л. Т., Мартынюк А. А., Риббенс-Павелла М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. Киев: Наукова Думка. 1984. 308 с.

2. Мартынюк А. А., Оболенский А. Ю. Об устойчивости решений автономных систем Важевского // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 8. С. 1392-1407.

3. Aleksandrov, A. Yu., Platonov, A. V. Construction of Lyapunov's functions for a class of nonlinear systems // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 2006. Vol. 6, № 1. P. 17-30.

4. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир. 1980. 300 с.

Ольга Владимировна НИССЕНБАУМ —
старший преподаватель кафедры
информационной безопасности

УДК 519:389.1.001.5

НЕРЕКУРРЕНТНОСТЬ АСИНХРОННОГО АЛЬТЕРНИРУЮЩЕГО ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ С ИНИЦИИРОВАНИЕМ ЛИШНИХ СОБЫТИЙ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ИЗ СОСТОЯНИЯ В СОСТОЯНИЕ

АННОТАЦИЯ. Рассмотрен асинхронный альтернирующий дважды стохастический поток событий с мертвым временем, порождаемый случайным процессом с двумя состояниями. Показана нерекуррентность потока с инициированием лишних событий при переходе из состояния в состояние. Получена совместная плотность вероятностей между соседними событиями в наблюдаемом потоке.

The problem of recurrence of the asynchronous alternating doubly stochastic event flow with extra event initiation is considered. The case of unrelenting dead time is investigated. The non-recurrence of flow with extra event initiation when state transition occurs is proved. The join density function for adjacent periods between events of observed flow is formulated.

Системы и сети массового обслуживания (СМО, СеМО) находят широкое применение в качестве математической модели реальных технических, физических и экономических систем. Случайные потоки событий являются, в свою очередь, математической моделью информационных потоков, функционирующих в СМО и СеМО. Например, случайными потоками событий достаточно адекватно описываются информационные потоки заявок, циркулирующих в цифровых сетях интегрального обслуживания (Integrated Service Digital

Networks — ISDN), в измерительных системах, а также потоки элементарных частиц (фотонов, электронов), поступающих на регистрирующую аппаратуру в физических экспериментах.

В реальных объектах и системах, как правило, интенсивность потока событий меняется со временем, и часто эти изменения носят случайный характер, что приводит к рассмотрению математических моделей дважды стохастических потоков событий. Такие потоки описаны в [1, 2].

Со стороны регистрирующего прибора также может быть внесена некоторая неопределенность, в частности, прибор может обладать так называемым «мертвым временем», то есть не регистрировать входящие события в течение некоторого времени с момента наступления или регистрации очередного события [3, 4]. Это может быть вызвано тем, что прибор не может регистрировать новые события до тех пор, пока предыдущее не будет обработано, или прибор может быть «оглушен», выведен из строя на некоторое время после регистрации очередного события.

В настоящей работе произведено исследование рекуррентности для асинхронного альтернирующего дважды стохастического потока событий с инициированием лишнего события при смене состояний и периодом ненаблюдаемости фиксированной длительности, связанным с наступлением событий.

Постановка задачи. Рассматривается поток с инициированием лишнего события, интенсивность которого есть кусочно-постоянный стационарный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями: $\lambda(t)=\lambda$, $\lambda(t)=0$. Будем говорить, что имеет место первое состояние процесса (потока), если $\lambda(t)=\lambda$, и наоборот, имеет место второе состояние процесса (потока), если $\lambda(t)=0$. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии есть случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону $F_1(t)=1-\exp(-\alpha_1 t)$, во втором $F_2(t)=1-\exp(-\alpha_2 t)$ — , где α_1, α_2 — интенсивности перехода процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе и из второго в первое соответственно. В течение временного интервала, когда $\lambda(t)=\lambda$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ. Во втором состоянии процесса $\lambda(t)$ генерация событий не производится. Переход процесса из второго состояния в первое вызывает инициирование лишнего события в первом состоянии в момент перехода; переход процесса из первого состояния во второе вызывает инициирование лишнего события во втором состоянии в момент перехода (рис. 1). Возможная интерпретация этого следующая: момент перехода процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе «отключает» источник событий от их генерации; другими словами, источник событий в этот момент времени «ломается» (выходит из строя), и необходимо некоторое случайное время либо на его восстановление, либо на его замену; его (источника) хватает только на инициирование лишнего события в момент поломки. В момент восстановления источник событий инициирует «лишнее» событие, после чего начинает работать в обычном режиме. Так как переходы из состояния в состояние не связаны с наступлением событий потока, то поток называется асинхронным.

Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий в схеме с непродлевающимся мертвым временем: 1,2 — состояния случайного процесса ; штриховка — периоды мертвого времени; t1, t2, ... — моменты наступления событий в наблюдаемом потоке.

После каждого зарегистрированного в момент времени события наступает время фиксированной длительности (мертвое время), в течение которого другие события исходного потока недоступны наблюдению. События, наступившие в течение мертвого времени, не вызывают продления его периода. По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T и т. д. Вариант возникающей ситуации приведен на рис. 1.

Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования наблюдаемого потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t), где t_0 — начало наблюдений, t — окончание наблюдений, пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить $t_0 = 0$. Так как процесс $\lambda(t)$ является ненаблюдаемым, а наблюдаемыми являются только временные моменты $t_1, t_2, \ldots$ наступления событий в наблюдаемом потоке, то необходимо по этим наблюдениям оценить (в момент окончания наблюдений) параметры λ, α_1, α_2 случайного процесса $\lambda(t)$ и длительность мертвого времени T. В настоящей работе доказана нерекуррентность рассматриваемого потока событий, каковая значительно усложняет процесс нахождения оценок для указанных параметров потока, и найдена совместная плотность вероятностей для смежных интервалов между событиями в наблюдаемом потоке.

Плотность вероятностей интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке. В [10] было показано, что плотность вероятностей интервала между соседними событиями в рассматриваемом потоке с непродлевающимся фиксированным мертвым временем T есть:

$$p(\tau)=\begin{cases}0, \text{ если } 0 \le \tau < T,\\ \gamma(\lambda+\alpha_1)e^{-(\lambda+\alpha_1)(\tau-T)}+(1-\gamma)\alpha_2 e^{-\alpha_2(\tau-T)}, \text{ если } \tau \ge T,\end{cases} \quad (1)$$

$$\lambda > 0,\ \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ \gamma = \pi_1 + \pi_2 \frac{\lambda+\alpha_1-\alpha_2}{\lambda+\alpha_1+\alpha_1 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}} e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}$$

Здесь и далее π_1, π_2 — априорные вероятности состояний процесса [5], [6], [10], заданные формулами

$$\pi_1 = \alpha_2/(\alpha_1+\alpha_2), \quad \pi_2 = \alpha_1/(\alpha_1+\alpha_2), \quad \pi_1+\pi_2=1. \quad (2)$$

Нерекуррентность наблюдаемого потока событий. Получим совместную плотность вероятностей $p(\tau_1,\tau_2)$ для смежных интервалов между событиями в наблюдаемом потоке [7], [8]. Для этого рассмотрим эволюцию процесса, начиная с некоторого события в наблюдаемом потоке и присваивая моменту наступления этого события момент времени $t=0$. Интервал между первым и вторым событиями обозначим τ_1, а интервал между вторым и третьим событиями обозначим τ_2 (рис. 2). Поскольку после наступления каждого события потока наступает период ненаблюдаемости фиксированной длительности T, то каждый из интервалов между событиями длительности τ_i, $i=1,2$, является суммой двух интервалов: первый — длительности T, второй — длительности $\tau_i - T$.

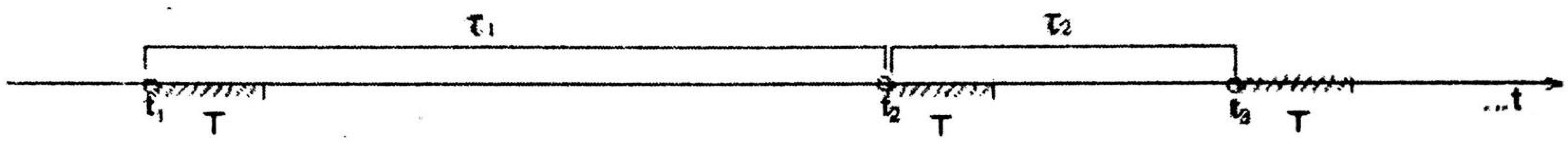

Рис. 2. Смежные интервалы между событиями в наблюдаемом потоке в схеме с непродлевающимся мертвым временем: штриховка — периоды мертвого времени; t_1, t_2, t_3 — моменты наступления событий в наблюдаемом потоке.

Наступившее событие может произойти как в первом состоянии процесса с вероятностью $\tilde{\pi}_1(T)$, так и во втором с вероятностью $\tilde{\pi}_2(T)$. $\tilde{\pi}_i(T)$, $i=1,2$ — апостериорные вероятности состояний процесса при наличии мертвого времени фиксированной длительности T. Из [10],

$$\tilde{\pi}_1(T)=\frac{\lambda/\alpha_1+\pi_2+\pi_1 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}}{\lambda/\alpha_1+1+e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}},\quad \tilde{\pi}_2(T)=\frac{\pi_1+\pi_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}}{\lambda/\alpha_1+1+e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}}. \qquad (3)$$

После того как в потоке произошло событие, наступает период мертвого времени фиксированной длительности, во время которого новых событий в наблюдаемом потоке не происходит. После окончания периода мертвого времени процесс может находиться как в первом состоянии, так и во втором. Вероятность того, что после наступления события потока в i-м состоянии процесс за время T перейдет в j-е состояние, есть $q_{ij}(T)$. В [10] получены выражения

$$\begin{aligned} q_{11}(\tau)&=\pi_1+\pi_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau}, & q_{21}(\tau)&=\pi_1-\pi_1 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau},\\ q_{12}(\tau)&=\pi_2-\pi_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau}, & q_{22}(\tau)&=\pi_2+\pi_1 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau}. \end{aligned} \qquad (4)$$

После окончания периода мертвого времени события потока вновь становятся доступны для наблюдения. Второе событие может быть событием первого типа, то есть событием пуассоновского потока с интенсивностью в первом состоянии процесса $\lambda(t)$, второго типа, то есть лишним событием, произошедшим во втором состоянии процесса $\lambda(t)$ при переходе из первого состояния во второе, либо событием третьего типа, то есть лишним событием, произошедшим в первом состоянии при переходе из второго состояния в первое. Плотность вероятностей интервала (T,τ_1) длительности $\tau_1 - T$ есть $\tilde{p}_{jj'}(\tau_1 - T)$ — плотность вероятностей интервала (T,τ_1) от окончания периода мертвого времени при j-м состоянии процесса $\lambda(t)$ до наступления события j'-го типа в наблюдаемом потоке.

Из [10],

$$\widetilde{p}_{11}(t)=\lambda e^{-(\lambda+\alpha_1)t},\ \ \widetilde{p}_{12}(t)=\alpha_1 e^{-(\lambda+\alpha_1)t},\ \ \widetilde{p}_{23}(t)=\alpha_2 e^{-\alpha_2 t},$$
$$\widetilde{p}_{13}(t)=\widetilde{p}_{21}(t)=\widetilde{p}_{22}(t)=0. \qquad (5)$$

Рассматривая аналогично интервал $(\tau_1,\tau_1+\tau_2)$, получим

$$p(\tau_1,\tau_2)=\sum_{i=1}^{2}\widetilde{\pi}_i(T)\cdot\sum_{j=1}^{2}q_{ij}(T)\cdot\sum_{j'=1}^{3}\widetilde{p}_{jj'}(\tau_1-T)\cdot\sum_{k=1}^{2}q_{j'k}(T)\cdot\sum_{k'=1}^{3}\widetilde{p}_{kk'}(\tau_2-T) \qquad (6)$$

Заметим, что из (1), (3), (4)

$$\widetilde{\pi}_1(T)q_{11}(T)+\widetilde{\pi}_2(T)q_{21}(T)=\gamma(T) \qquad (7)$$

Подставляя в (6) плотности вероятностей (5), учитывая (7) и выполняя достаточно трудоемкие преобразования, получаем

$$p(\tau_1,\tau_2)=p_{11}(\tau_1-T)p_{11}(\tau_2-T)(\lambda+\alpha_1)\gamma(T)[\lambda q_{11}(T)+\alpha_1 q_{21}(T)]+$$
$$+p_{11}(\tau_1-T)p_{22}(\tau_2-T)\alpha_2\gamma(T)[\lambda q_{12}(T)+\alpha_1 q_{22}(T)]+ \qquad (8)$$
$$+p_{22}(\tau_1-T)p_{11}(\tau_2-T)(\lambda+\alpha_1)(1-\gamma(T))\alpha_2 q_{11}(T)+$$
$$+p_{22}(\tau_1-T)p_{22}(\tau_2-T)\alpha_2(1-\gamma(T))\alpha_2 q_{12}(T).$$

Из (2) следует, что

$$p(\tau_1)p(\tau_2)=p_{11}(\tau_1-T)p_{11}(\tau_2-T)(\lambda+\alpha_1)^2(\gamma(T))^2+$$
$$+p_{11}(\tau_1-T)p_{22}(\tau_2-T)(\lambda+\alpha_1)\alpha_2\gamma(T)(1-\gamma(T))+$$
$$+p_{22}(\tau_1-T)p_{11}(\tau_2-T)(\lambda+\alpha_1)\alpha_2\gamma(T)(1-\gamma(T))+$$
$$+p_{22}(\tau_1-T)p_{22}(\tau_2-T)\alpha_2^2(1-\gamma(T))^2. \qquad (9)$$

Используя (8) и (9) и учитывая (3) и (4), запишем совместную плотность вероятностей для смежных интервалов в наблюдаемом потоке.

$$p(\tau_1,\tau_2)=p(\tau_1)p(\tau_2)+e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}f_1(\tau_1\,|\,T)f_2(\tau_2\,|\,T), \qquad (10)$$

где

$$f_1(\tau_1\,|\,T)=\gamma(T)[\lambda\widetilde{\pi}_2(T)-\alpha_1\widetilde{\pi}_1(T)]e^{-(\lambda+\alpha_1)(\tau_1-T)}+(1-\gamma(T))\alpha_2\widetilde{\pi}_2(T)e^{-\alpha_2(\tau_1-T)},$$
$$f_2(\tau_2\,|\,T)=(\lambda+\alpha_1)e^{-(\lambda+\alpha_1)(\tau_2-T)}-\alpha_2 e^{-\alpha_2(\tau_2-T)},$$

$\gamma(T)$ определено в (1), π_1, π_2 определены в (2), $\widetilde{\pi}_1(T)$, $\widetilde{\pi}_2(T)$ — в (3).

При этом если $\lambda+\alpha_1=\alpha_2$, то есть поток вырождается в пуассоновский поток с мертвым временем, разность $p(\tau_1,\tau_2)-p(\tau_1)p(\tau_2)$ в (10) равняется нулю, а значит, поток становится рекуррентным, что совпадает с результатами [9].

Таким образом, совместная плотность вероятностей смежных интервалов в наблюдаемом потоке не совпадает с произведением плотностей вероятностей этих интервалов. Это значит, что в отличие от потоков, рассмотренных в [5], [6] и [10], (асинхронных альтернирующих потоков с инициированием лишнего события при переходе из первого состояния во второе или с инициированием лишнего события при переходе из второго состояния в первое), рассматриваемый поток — нерекуррентный [7]. Это значит, что длительности смежных интервалов в наблюдаемом потоке являются зависимыми случайными величинами.

Заключение. Показана нерекуррентность асинхронного альтернирующего потока событий с инициированием лишнего события при переходе из состояния в состояние и непродлевающимся мертвым временем постоянной длительности.

Найдена совместная плотность вероятностей смежных интервалов между соседними событиями в наблюдаемом потоке (10).

Безусловно, нерекуррентность потока осложняет задачу оценивания параметров потока по наблюдениям за потоком, в частности, при использовании метода моментов необходимо учитывать совместную плотность распределения интервалов между соседними событиями [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горцев А. М., Нежельская Л. А. Оптимальная нелинейная фильтрация марковского потока событий с переключениями // Техника средств связи. Серия: Системы связи. 1989. Вып. 7 С. 46-54.

2. Васильева Л. А., Горцев А. М. Оценивание длительности мертвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2003. № 12. С. 69-79.

3. Курочкин С. С. Многомерные статистические анализаторы. М.: Атомиздат, 1968.

4. Апанасович В. В., Коляда А. А., Чернявский А. Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск: Университетское, 1988.

5. Горцев А. М., Ниссенбаум О. В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с инициированием лишнего события // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 284. С. 139-147.

6. Горцев А. М., Ниссенбаум О. В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Изв. вузов. Физика. 2005. № 10. С. 35-49.

7. Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н. Теория массового обслуживания. М.: Высшая школа, 1982.

8. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Физматгиз, 1963.

9. Горцев А. М., Климов И. С. // Радиотехника. 1991. № 12. С. 3.

10. Ниссенбаум О. В. Построение плотности вероятностей интервала между соседними событиями асинхронного альтернирующего потока событий при непродлевающемся мертвом времени. Тюмень: Вектор-Бук, 2006

11. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.

Владислав Олегович БЫТЕВ —
зав. кафедрой математического моделирования,
доктор физико-математических наук, профессор

УДК 532.135+517.9

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА ОДНОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МОДЕЛЕЙ ЖИДКОСТИ ТИПА РИВЛИНА

АННОТАЦИЯ. Исследованы групповые свойства одномерных нестационарных движений жидкости типа Ривлина, в частности, найдены преобразования эквивалентности. В массовых лагранжевых координатах система уравнений баротропных движений сведена к одному сильно нелинейному уравнению третьего порядка. Для него получены все точечные и касательные преобразования в зависимости от уравнения состояния и построены точные решения.

The groops propertys movement for one-dimensional of nonnewtonian liqnids had been recieved.