Найдена совместная плотность вероятностей смежных интервалов между соседними событиями в наблюдаемом потоке (10).

Безусловно, нерекуррентность потока осложняет задачу оценивания параметров потока по наблюдениям за потоком, в частности, при использовании метода моментов необходимо учитывать совместную плотность распределения интервалов между соседними событиями [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горцев А. М., Нежельская Л. А. Оптимальная нелинейная фильтрация марковского потока событий с переключениями // Техника средств связи. Серия: Системы связи. 1989. Вып. 7 С. 46-54.

2. Васильева Л. А., Горцев А. М. Оценивание длительности мертвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2003. № 12. С. 69-79.

3. Курочкин С. С. Многомерные статистические анализаторы. М.: Атомиздат, 1968.

4. Апанасович В. В., Коляда А. А., Чернявский А. Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск: Университетское, 1988.

5. Горцев А. М., Ниссенбаум О. В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с инициированием лишнего события // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 284. С. 139-147.

6. Горцев А. М., Ниссенбаум О. В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Изв. вузов. Физика. 2005. № 10. С. 35-49.

7. Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н. Теория массового обслуживания. М.: Высшая школа, 1982.

8. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Физматгиз, 1963.

9. Горцев А. М., Климов И. С. // Радиотехника. 1991. № 12. С. 3.

10. Ниссенбаум О. В. Построение плотности вероятностей интервала между соседними событиями асинхронного альтернирующего потока событий при непродлевающемся мертвом времени. Тюмень: Вектор-Бук, 2006

11. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.

Владислав Олегович БЫТЕВ —
зав. кафедрой математического моделирования,
доктор физико-математических наук, профессор

УДК 532.135+517.9

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА ОДНОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МОДЕЛЕЙ ЖИДКОСТИ ТИПА РИВЛИНА

АННОТАЦИЯ. Исследованы групповые свойства одномерных нестационарных движений жидкости типа Ривлина, в частности, найдены преобразования эквивалентности. В массовых лагранжевых координатах система уравнений баротропных движений сведена к одному сильно нелинейному уравнению третьего порядка. Для него получены все точечные и касательные преобразования в зависимости от уравнения состояния и построены точные решения.

The groops propertys movement for one-dimensional of nonnewtonian liqnids had been recieved.

1. *Преобразование эквивалентности.* Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающую нестационарные одномерные движения сплошной среды со степенным реологическим законом [1,2]

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \tag{1}$$

$$\rho[u_t + uu_x] - \mu\left(u_x^k\right)_x + p_x = 0, \tag{2}$$

$$p_t + up_x + Gu_x + \mu H u_x^{k+1} = 0, \tag{3}$$

$$G = G(p,\rho), H = H(p,\rho). \tag{4}$$

Здесь ρ — плотность, u — единственная ненулевая компонента скорости, p — давление. G и H — функции, задающие уравнение состояний, k — постоянная, μ — вязкость, которая считается постоянной, t — время, x — пространственная координата. Поскольку при $\mu = 0$ данная система сводится к уравнениям газовой динамики, групповые свойства которых хорошо известны [3], всюду в дальнейшем можно считать, что $\mu \equiv 1$.

Модель сплошной среды, описываемая уравнениями (1)-(4), относится к широкому классу простых неполярных нетеплопроводных сред, получивших название чисто механического континуума [4]. Замыкающее уравнение, взятое в виде (4), может быть получено из уравнения состояния в форме Мизеса [5], подробный вывод которого есть, например, в [6,7].

Особый интерес, вызываемый предложенной моделью, обусловлен двумя причинами. Во-первых, экспериментальные исследования, проведенные различными авторами и в разное время, указывают на то, что степенной реологический закон хорошо аппроксимирует экспериментальные кривые [8,9], во-вторых, было доказано, что расширение группового ядра для систем типа (1)-(4), но с произвольным реологическим соотношением и произвольным уравнением состояния, происходит только при степенном реологическом законе [10].

Преобразования эквивалентности системы (1)-(4) находятся стандартным способом [3]. Дополним уравнения (1)-(4) соотношениями, отражающими зависимость G и H:

$$\begin{gathered}\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x} = 0,\\ \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial t} = 0,\\ \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Далее, вводя оператор

получаем
$$X = \xi^t\partial_t + \xi^x\partial_x + \eta^\rho\partial_\rho + \eta^p\partial_p + \eta^u\partial_u + \theta\partial_G + \theta^2\partial_H, \tag{6}$$

Утверждение. *Преобразование эквивалентности системы (1)-(5) задается инфинитезимальными операторами, коэффициенты которых определяются следующими формулами:*

$$\xi^t = b_1 t + b_2,$$

$$\xi^x = a_1 x + a_2 t + a_3,$$

$$\eta^p = \left\{2(1-k)a_1 - \left[(k-1)^2 + 1\right]b_1\right\}p + s_0,$$

$$\eta^u = a_1u - b_1u + a_2,$$
$$\eta^\rho = [(2-k)b_1 - 2a_1]\rho,$$
$$\theta^1 = \{2(1-k)a_1 - [(k-1)^2+1]b_1\}G,$$
$$\theta^2 = \{2(1-k)a_1 - [(k-1)^2+1]b_1 + kb_1\}H.$$

Здесь a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 — групповые постоянные. Кроме того, система (1)-(4) инвариантна относительно некоторых дискретных преобразований переменных, например, при $k=2m$

$$t \to -t, x \to -x;$$
$$t \to -t, u \to -u.$$

2. *Модели баротропных движений.*

Пусть H=0, тогда из (4) следует

$$p = -\varphi(v),$$

где $v = \rho^{-1}$ — удельный объем.

Система (1)-(3) для баротропных течений

$$G = -vp_v$$

принимает вид

$$v_t + uv_x - vu_x = 0, \tag{7}$$
$$u_t + uu_x = -vp_x + v\partial x\left(u_x^k\right) \tag{8}$$

Переходя в (7), (8) к лагранжевым переменным, а затем к массовым по правилу

$$v\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial q},$$

получим систему

$$v_t = uq, \tag{9}$$
$$u_t + p_q = \partial_q\left(v^{-k}u_q^k\right) \tag{10}$$

Полагая

$$v = w_q, u = w_t,$$

сведем (9), (10) к одному уравнению третьего порядка на функцию

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial q}\varphi(w_q) = \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\partial}{\partial t}\ln w_q\right]^k, \tag{11}$$

которые при k=1 совпадают с уравнением из [11].

Исследуем групповые свойства уравнения (11). Подействуем трижды продолженным оператором

$$\underset{3}{X} = \xi^t\frac{\partial}{\partial t} + \xi^q\frac{\partial}{\partial_q} + \eta\frac{\partial}{\partial w} + \varsigma_q\frac{\partial}{\partial w_q} + \sigma_{tt}\frac{\partial}{\partial w_{tt}} + \sigma_{tq}\frac{\partial}{\partial w_{tq}} + \sigma_{qq}\frac{\partial}{\partial w_{qq}} + \theta_{tqq}\frac{\partial}{\partial w_{tqq}}$$

на многообразие M, заданное уравнением (11). В результате достаточно длинных вычислений найдем координаты X

$$\xi^t = ct + d, \tag{12}$$
$$\xi^t = ct + d, \tag{13}$$
$$\eta = [(2-k)c - a]w + c_2t + c_3, \tag{14}$$

$$2(c-a)\varphi'_{wq}+w_q\varphi''_{w_qw_q}\left[(2-k)c-2a\right]=0. \qquad (15)$$

Результаты анализа классифицирующего уравнения (15) с учетом (12)-(13) представлены в табл. 1.

Таблица 1

I. $k=1$

Функция ц	Уравнение	Инфинитезимальные операторы
1.1. $\varphi=0$	$w_{tt}=\partial_q\left[\partial_t \ln w_q\right]$	$\partial_t, \partial_q, \partial_w, t\partial_w, q\partial_q - w\partial_w, t\partial_t + w\partial_w$
1.2. $\varphi=\varphi_0 \ln w_q$	$w_{tt}-\varphi_0\dfrac{w_{qq}}{w_q}=\partial_q\left[\partial_t \ln w_q\right]$	$\partial_t, \partial_q, \partial_w, t\partial_w, q\partial_q - w\partial_w$
1.3. $\varphi=\varphi_0 w^{1+\alpha}$ $(\alpha\neq -1)$	$w_{tt}-\varphi_0 w_q^{\alpha} w_{qq}=\partial_q\left[\partial_t \ln w_q\right]$	$\partial_t, \partial_q, \partial_w, t\partial_w, t\partial_t + \dfrac{2+\alpha}{2(1+\alpha)}q\partial_q+\dfrac{\alpha}{2(1+\alpha)}w\partial_w$
1.4 $\varphi=\varphi(w_q)$	$w_{tt}-\partial_q\varphi(w_q)=\partial_q\left[\partial_t \ln w_q\right]$	$\partial_t, \partial_q, \partial_w, t\partial_w,$

II. $k\neq 1$

2.1. $\varphi=0$	$w_{tt}=\partial_q\left[\partial_t w_q\right]^k$	$\partial_t, \partial_q, \partial_w, t\partial_w, t\partial_t + \dfrac{2-k}{2}q\partial_q+\dfrac{2-k}{2}w\partial_w$
2.2. $\varphi=\varphi(w_q)$	$w_{tt}-\partial_q\varphi(w_q)=\partial_q\left[\partial_t \ln w_q\right]^k,$	$\partial_t, \partial_q, \partial_w, t\partial_w$

Из приведенной классификации следует, что расширение группового ядра G_0, порожденного операторами $\partial_t, \partial_q, \partial_w, t\partial_w$, происходит при степенной и логарифмической зависимостях φ от w_q.

3. Некоторые точные решения. Пусть

$$\varphi(w_q)=-c^2 w_q^{-\gamma},$$

случай 1.4 из табл. 1, где $\sigma=-\gamma-1, \varphi_0=\gamma c^2$. Такой выбор функции $\varphi(w_q)$ соответствует уравнению состояния

$$pv^{\gamma}=c^2, v=\rho^{-1},$$

поскольку, по определению, $w_q=v$, а $\varphi(w_q)=-p$. Подставляя эти выражения в уравнение (11), получаем

$$w_{tt}-\gamma c^2 w_q^{-\gamma-1}w_{qq}=\partial_q\left(\partial_t \ln w_q\right)^k. \qquad (16)$$

Уравнение (16) допускает разделение переменных

$$w(t,q)=U(t)Z(q). \qquad (17)$$

Очевидно, что получаемые уравнения имеют первые интегралы вида

$$\frac{1}{2}U_t^2\pm\frac{\lambda^2}{1-\gamma}U^{1-\gamma}=U_0, \gamma\neq 1,$$

$$\frac{\gamma c^2}{1-\gamma} Z_q^{1-\gamma} \pm \frac{\lambda^2}{2} Z^2 = Z_0, \gamma \neq 1, \tag{18}$$

$$\frac{1}{2} U_t^2 \pm \lambda^2 \ln U = U_0, \gamma = 1,$$

$$Z_g = Z_0 \exp\left(\pm \frac{\lambda^2 Z^2}{2c^2}\right), \gamma = 1, \tag{19}$$

здесь Z_0 и U_0 — постоянные.

Согласно теореме Чебышева [12], интегралы для определения U(t) и $Z(g)$ из (18) вычисляются в элементарных функциях тогда и только тогда, когда

$$\gamma = \frac{k-1}{k}, k = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

или

$$\gamma = \frac{2k-1}{2k+1}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

в частности, при $\gamma = -1, 3/2, 5/3, 3$.

Как было отмечено в [13], сюда попадают модели, описывающие одномерный нестационарный вязкий газ Чаплыгина, двумерный стационарный поток такого газа, Бунемановскую неустойчивость плазмы, тиринг-неустойчивость плазмы, неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, ямки плотности слабо неидеального Бозе-газа, обобщенный газ Чаплыгина и пр.

В зависимости от сходимости или расходимости соответствующих интегралов решения могут существовать как на ограниченных, так и на неограниченных по t, q промежутках.

В общей ситуации уравнение (11) при подстановке в него представления (17) дает

$$Z(q) U''(t) = \partial_q \varphi\left(U Z_q'\right).$$

Дифференцируя его по q и вводя новую искомую функцию V

$$U(t) Z_q'(q) \equiv w_q = v, \tag{20}$$

получим нелинейное уравнение

$$v_{tt} - \partial_{qq}\varphi(v) = 0, (21)$$

описывающее динамику удельного объема в переменных (t, q). Пусть уравнение состояния имеет вид

$$p = p_0 - v_0 e^{-1/v}, v_0 > 0. \tag{22}$$

Оно обладает свойствами

$$p \to p_0, v \to +0,$$

$$p \to p_0 - v_0, v \to +\infty,$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{v_0}{v^2} e^{-1/v} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = \left(\frac{2v_0}{v^3} - \frac{v_0}{v^4}\right) e^{-1/v}.$$

В точке $v_* = 1/2$ имеем (точка перегиба). Далее

$$p_v \to 0, v \to +0; p_v\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4v_0}{e^2}; p_v \to 0, v \to +\infty.$$

Замечание. *Для нормального газа должны выполняться неравенства [14]*

$$p_v < 0; p_{vv} > 0, p \to \infty, v \to 0.$$

Неравенство $p_v < 0$ является условием устойчивости термодинамического равновесия и выполняется почти для всех реальных веществ в стабильном состоянии.

Из (22) следует, что

$$p \equiv -\varphi(v) = p_0 - v_0 e^{-1/v},$$

и уравнение (21) примет вид

$$v_{tt} + v_0 \partial_{qq}\left(e^{-1/v}\right) = 0, \tag{23}$$

где $v = U(t) Z'_q(q)$.

Если уравнение состояния выбрать в виде

$$-\varphi(v) \equiv p(v) = p_0 - \varphi_0^2 \ln v, \tag{24}$$

то

$$p_v = -\frac{\varphi_0^2}{v} < 0, p_{vv} = \frac{\varphi_0^2}{v^2} > 0, 0 < v < e^{p_0/\varphi_0^2} \equiv v_*.$$

Подставляя (24) в (21), получаем

$$v_{tt} + \varphi_0^2\left(v_q^2 - v v_{qq}\right) = 0. \tag{25}$$

Учитывая представление (17), получаем

$$U''(t) U^2(t) Z_q^3(q) + \varphi_0^2 U^2(t)\left(Z_{qq}^2 - Z_q Z_{qqq}\right) = 0.$$

Из этого уравнения следует, что

$$U(t) = \pm\frac{1}{2}\lambda^2 t^2 + \mu t + \nu, \tag{26}$$

λ, μ, ν — постоянные. Положив

$$Z_q(q) \equiv A(q), \tag{27}$$

получим

$$\varphi_0^2\left(-A_q^2 + A A_{qq}\right) \pm \lambda^2 A^3 = 0. \tag{28}$$

Пусть

$$\beta^2 = \frac{\lambda^2}{\varphi_0^2} \neq 0, \tag{29}$$

тогда, вводя функцию

$$A_q(q)=f(A) \tag{30}$$

и переменную

$$\xi=ln\left(\frac{A}{2}\right), \tag{31}$$

приходим к уравнению

$$\partial_\xi\left(f^2\right)-f^2\mp 8\beta^2e^{3\xi}=0$$

с общим решением

$$f^2(\xi)=e^\xi\left[h_0\pm 4\beta^2e^{2\xi}\right]$$

или в старых переменных

$$2A_q^2=\pm\beta^2A^3+h_0A. \tag{32}$$

Замена $A=\alpha\tilde{A}$ с выбором $\alpha=\pm\delta/\beta^2$ приводит (32) к каноническому виду

$$\tilde{A}_q^2=4\tilde{A}^3+a\tilde{A}, a=h_0/8\beta^2. \tag{33}$$

Следовательно, решением (32) является функция Вейерштрасса

$$\tilde{A}(q)=\rho(q+c_0) \tag{34}$$

с инвариантами $g_2=a, g_3=0$.

Если $\beta^2=0$, то и $\lambda^2=0$, а тогда

$$U(t)=\mu t+\nu, A(q)=A_0e^{\pm f_0q}, \tag{35}$$

(μ,ν,A_0,f_0 — постоянные). Следовательно, формулы (20), (26), (34), (35) дают описание динамики удельного объема v в переменных (t,q).

Рассмотрим вновь уравнение (11). Дифференцируя его по q и переходя к удельному объему v, получим

$$v_{tt}-\partial_{qq}^2\varphi(v)=\mu\partial_{qq}^2\left(\frac{v_t}{v}\right)^k. \tag{36}$$

Введем переменную $\xi=q-ct$, тем самым разыскиваем решение типа бегущей волны у уравнения (36). Нетрудно показать, что

$$c^2v^{k+1}-\varphi(v)v^k+(-1)^{k+1}|c|^kv_\xi^k-(\alpha\xi+\beta)v^k=0. \tag{37}$$

Если $\alpha=0$, то на фазовой плоскости (v,v_ξ) уравнение (37) определяет семейство траекторий, дающих решение (11) в виде бегущих волн

$$(-1)^{k+1}|c|^kv_\xi^k+v^k\left[c^2v-\varphi(v)-\beta\right]=0 \tag{38}$$

При четных k=2m среди траекторий (38) имеются и периодические.

4. *Касательные преобразования*. Вычислим группу касательных преобразований, допускаемую уравнением (11). Как известно (см., например, [15]), нетри-

виальная группа касательных преобразований, не совпадающая с продолженной точечной, может быть построена тогда и только тогда, когда в операторе

$$X = \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \xi^q \frac{\partial}{\partial q} + \eta \frac{\partial}{\partial w} + \zeta_t \frac{\partial}{\partial w_t} + \zeta_q \frac{\partial}{\partial w_q}$$

коэффициенты выражаются через функцию $K(t,q,w,w_t,w_q)$ по формулам

$$\xi^t = -\frac{\partial K}{\partial w_t}, \xi^q = -\frac{\partial K}{\partial w_q}, \eta = K - w_t \frac{\partial K}{\partial w_t} - w_q \frac{\partial K}{\partial w_q},$$

$$\zeta_t = \frac{\partial K}{\partial t} + w_t \frac{\partial K}{\partial w}, \zeta_q = \frac{\partial K}{\partial q} + w_q \frac{\partial K}{\partial w}.$$

Проделав необходимые вычисления, получаем

$$K(t,q,w,w_t,w_q) = (a_1 t + a_2)w_t + (b_1 q + b_2)w_q + c_1 t + c_2 w + c_3,$$

$$\zeta_t = c_1 + (a_1 + c_2)w_t, \xi^t = -(a_1 t + a_2),$$

$$\zeta_g = (b_1 + c_2)w_q, \xi^q = -(b_1 q + b_2),$$

$$\eta = c_1 t + c_2 w + c_3,$$

$$(b_1 + c_2)w_q \varphi''(w_q) + 2(b_1 - a_1)\varphi'(w_q) = 0.$$

Результаты анализа полученного классифицирующего уравнения приведены в табл. 2.

Таблица 2

Функция ц	Инфинитезимальные операторы
1. $\varphi = \varphi(w_q)$	$t\partial_t + q\partial_q + w\partial_w, \partial_t, \partial_q, \partial_w, t\partial_w + \partial_{w_t}$
2. $\varphi = \varphi_0 \ln w_q$	$\partial_t, \partial_q, \partial_w, t\partial_w + \partial_{w_t} - t\partial_t - 2q\partial_q + w_t\partial_{w_t} + 2w_q\partial_{w_q}, t\partial_t + w_t\partial_{w_t} + 2w_q\partial_{w_q} + 2w\partial_w$
3. $\varphi = \varphi_0 w_q^{1+\alpha} (\alpha \neq -1)$	$\partial_t, \partial_q, \partial_w, t\partial_w + \partial_{w_t}, -(\alpha+2)t\partial_t - 2q\partial_q + (\alpha+2)w_t\partial_{w_t} + 2w_q\partial_{w_q}, -\alpha t\partial_t + (\alpha+2)w_t\partial_{w_t} + 2w_q\partial_{w_q} + 2w\partial_w$

Продолженные точечные преобразования из табл. 1 задаются операторами

I. k=1

1.1.

$$\underset{1}{X_1} = t\partial_t + w\partial_w + w_q\partial_{w_q}, \underset{1}{X_2} = q\partial_q - w\partial_w - w_t\partial_{w_t} - 2w_q\partial_{w_q}, \underset{1}{X_3} = t\partial_w + \partial_{w_t};$$

1.2.

$$\underset{1}{X_1} = q\partial_q - w\partial_w - w_t\partial_{w_t} - w_q\partial_{w_q}, \underset{1}{X_2} = t\partial_w + \partial_{w_t}$$

1.3. $\alpha \neq -1$:

$$\underset{1}{X_1} = t\partial_t + \frac{2+\alpha}{2(1+\alpha)} q\partial_q + \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} w\partial_w - \frac{2+\alpha}{2(1+\alpha)} w_t\partial_{w_t} - \frac{1}{1+\alpha} w_q\partial_{w_q};$$

$$\underset{1}{X_2} = t\partial_w + \partial_{w_t};$$

1.4.

$$\underset{1}{X_1} = t\partial_w + \partial_{w_t}.$$

II. k≠1

2.1. $\varphi = 0;$

$$\underset{1}{X_1} = t\partial_t + \frac{2-k}{2} q\partial_q + \frac{2-k}{2} w\partial_w - \frac{k}{2} w_t\partial_{w_t}, \underset{1}{X_2} = t\partial_w + \partial_{w_t};$$

2.2. $\varphi = \varphi(w_q);$

$$\underset{1}{X_1} = t\partial_w + \partial_{w_t}.$$

Рассмотрим оператор

$$t\partial_t + 2w\partial_w + w_t\partial_{w_t} + 2w_q\partial_{w_q}$$

и уравнение состояния

$$\varphi = \varphi_0 \ln w_q.$$

Инвариантное решение уравнения (11) с таким уравнением состояния будем искать в виде

$$w = t^2 f(q). \tag{39}$$

Тогда

$$2f(q) = \varphi_0 \frac{f''_{qq}}{f'_q}$$

с общим решением

$$\varphi_0 \int \frac{df}{f_0 + f^2} = q.$$

Если $f_0 = -a^2 < 0$, то

$$f = -a\,cth\left(\frac{a}{\varphi_0} q\right). \tag{40}$$

При $f_0 = a^2 > 0$ находим

$$f = a\,tg\left(\frac{a}{\varphi_0} q\right). \tag{41}$$

Рассмотрим оператор

$$t\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial w_t},$$

который действует в пространстве $E(t, q, w, w_t, w_q)$. Его базис инвариантов состоит из следующих величин:

$$J_1 = w - tw_t, J_2 = t, J_3 = q, J_4 = w_q,$$

поэтому можно положить для дифференциально-инвариантного решения

$$w_q = f(t,q), tw_t - w = h(t,q). \tag{42}$$

Записывая условие совместности последней системы, получаем

$$tf_t - f = h_q(t,q).$$

Далее

$$tw_{tt} = h_t, w_{qt} = f_t, w_q = f,$$

и уравнение (11) перепишется в следующем виде

$$h_t = t\partial_q\left\{\varphi(f) + \left(\frac{\partial_t f}{f}\right)^k\right\}.$$

Тем самым получаем систему уравнений

$$\begin{cases} h_q = tf_t - f, \\ h_t = t\partial_q\left[\varphi(f) + \left(\dfrac{f_t}{f}\right)^k\right] \end{cases} \tag{43}$$

для определения функций f и h.

Условие совместности системы (43) — дифференциальное следствие уравнения (11). Действительно, из (43) следует, что

$$f_{tt} = \partial^2_{qq}\left\{\varphi(f) + \left(\frac{f_t}{f}\right)^k\right\},$$

а из (11), если его продифференцировать по q,

$$(w_q)_{tt} = \partial^2_{qq}\left\{\varphi(w_q) + \left(\frac{w_{qt}}{w_q}\right)^k\right\},$$

что в точности совпадает с предыдущим, если учесть первое равенство $w_q = f(t,q)$.

Поэтому преобразование производных (42) задает автопреобразование Бэклунда по терминологии [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Trusdell, C., Noll., The non-linear field theories of mechanics, Encyclopedia of Physics (S. Flügge ed.), Chap E. N.-Y.: Springer-Verlag, 1965.

2. Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности (1985) Новосибирск: Наука, 1985.

3. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений (1978). М.: Наука, 1978.

4. Труcделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред (1975), М.: Мир, 1975.

5. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. (1961).М.: ИЛ, 1961.

6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика (1986). М.: Наука, 1986.

7. Дьярмати И., Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир, 1974.

8. Астарита Дж., Марручи Дж., Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978.

9. Чанг Дей Хан. Реология в процессах переработки полимеров. М.: Химия, 1979.

10. Bytev, V. O. Building of Mathematical Models of continuum Media on the Basis of the invariance Principle, Acta Applicandal Mathematical 16 (1989), Kluwer Academic Publishers, 117-142. (Netherlands).

11. Маслов И. П., Мосолов П. П., Уравнения одномерного баротропного газа. М.: Наука, 1990.

12. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. М.: Наука, 1970. 800.

13. Жданов С. К., Трубников Б. А. Квазигазовые неустойчивые среды. М.: Наука, 1991.

14. Овсянников Л. В., Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.

15. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.

16. Ньюэл А., Табор М. Интегрируемость. В кн. Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Киев: Наукова думка, 1990.

Владислав Олегович БЫТЕВ —
зав. кафедрой математического моделирования
доктор физико-математических наук, профессор

Ирина Викторовна СЛЕЗКО —
старший преподаватель кафедры
математического моделирования

Дмитрий Евгеньевич НИКОЛАЕВ —
студент 3 курса Института математики
и компьютерных наук

УДК 539.31

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ АСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

АННОТАЦИЯ. В статье рассмотрена двумерная модель деформации асимметрично-упругого тела, приведены точные решения некоторых задач плоской асимметричной теории упругости, проведен сравнительный анализ полученных решений с классическими.

The two-dimension model of the deformation of asymmetrical elastic solid is considered in the article. The exact solutions of some problems in flat asymmetrical elasticity and comparative analysis of the received solutions with classical ones are given.

Асимметричной упругостью названа теория, в которой симметричный тензор напряжений и симметричный тензор деформаций связаны несимметричным тензором преобразования. Структура преобразующего тензора установлена посредством группового анализа законов сохранения механики сплошных сред. Эта теория устраняет неоднозначность вырождения трехмерной задачи упругости в двумерную. В рамках новой теории даны постановки двумерных и трехмерных линейных краевых задач и точные решения, обобщающие классические полиномиальные решения, решения А. Лява, Н. И. Мусхелишвили и устраняющие некоторые их парадоксы.