

8. Астарита Дж., Марручи Дж., Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978.
9. Чанг Дей Хан. Реология в процессах переработки полимеров. М.: Химия, 1979.
10. Bytev, V. O. Building of Mathematical Models of continuum Media on the Basis of the invariance Principle, Acta Applicanda Mathematica 16 (1989), Kluwer Academic Publishers, 117-142. (Netherlands).
11. Маслов И. П., Мосолов П. П., Уравнения одномерного баротропного газа. М.: Наука, 1990.
12. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. М.: Наука, 1970. 800.
13. Жданов С. К., Трубников Б. А. Квазигазовые неустойчивые среды. М.: Наука, 1991.
14. Овсянников Л. В., Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
15. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
16. Ньюэл А., Табор М. Интегрируемость. В кн. Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Киев: Наукова думка, 1990.

Владислав Олегович БЫТЕВ —
зав. кафедрой математического моделирования
доктор физико-математических наук, профессор

Ирина Викторовна СЛЕЗКО —
старший преподаватель кафедры
математического моделирования

Дмитрий Евгеньевич НИКОЛАЕВ —
студент 3 курса Института математики
и компьютерных наук

УДК 539.31

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ АСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

АННОТАЦИЯ. В статье рассмотрена двумерная модель деформации асимметрично-упругого тела, приведены точные решения некоторых задач плоской асимметричной теории упругости, проведен сравнительный анализ полученных решений с классическими.

The two-dimension model of the deformation of asymmetrical elastic solid is considered in the article. The exact solutions of some problems in flat asymmetrical elasticity and comparative analysis of the received solutions with classical ones are given.

Асимметричной упругостью названа теория, в которой симметричный тензор напряжений и симметричный тензор деформаций связаны несимметричным тензором преобразования. Структура преобразующего тензора установлена посредством группового анализа законов сохранения механики сплошных сред. Эта теория устраняет неоднозначность вырождения трехмерной задачи упругости в двумерную. В рамках новой теории даны постановки двумерных и трехмерных линейных краевых задач и точные решения, обобщающие классические полиномиальные решения, решения А. Лява, Н. И. Мусхелишвили и устраняющие некоторые их парадоксы.

Групповой анализ динамических уравнений классического (неполярного) континуума, являющихся следствием интегральных законов сохранения и классической двухпараметрической термодинамики, обнаружил, что преобразование эквивалентности этих уравнений не содержит группы SO_3 [1, 3]. В результате получены конститутивные (определяющие) уравнения, решения которых позволяют строить неклассические замкнутые модели жидких и твердых сред. В частности, изучена линейная зависимость симметричного тензора напряжений от симметричного тензора деформаций в предположении, что вся модель среды допускает один оператор вращения (вращательная симметрия). Доказано, что в наиболее общем случае эти тензоры связаны несимметричным тензором преобразования с одиннадцатью независимыми компонентами. Полученная таким образом модель твердой среды названа здесь «асимметричной упругостью».

Двумерная модель деформации асимметрично-упругого тела.

В декартовой системе координат x, y, z рассмотрим плоскую линейную задачу теории упругости для тела с несимметричным тензором жесткости. Полагаем, что деформация параллельна плоскости Oxy , а ось z — это ось вращательной симметрии материала. Пусть σ_{ij} — компоненты симметричного тензора напряжений, e_{ij} — компоненты симметричного тензора деформаций ($i, j = 1, 2$).

Общий вид линейной зависимости тензора напряжений от тензора деформаций установлен В. О. Бытевым [1, 3]. В двумерном пространстве эта зависимость такова:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (\lambda_0 + \mu)e_{11} + (\lambda_0 - \mu)e_{22} + 2\mu_0e_{12}, \\ \sigma_{22} &= (\lambda_0 - \mu)e_{11} + (\lambda_0 + \mu)e_{22} - 2\mu_0e_{12}, \\ \sigma_{12} &= -\mu_0e_{11} + \mu_0e_{22} + 2\mu e_{12}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Эти конститутивные уравнения, в отличие от классических, содержат три кинетических параметра — λ_0, μ_0, μ , причем $\lambda_0 > 0, \mu > 0$, а параметр μ_0 может иметь любое вещественное значение. Здесь уместно заметить, что замена $\lambda_0 = \lambda + \mu$ при $\mu_0 = 0$ сводит (1.1) к классической системе конститутивных уравнений с параметрами λ и μ [4].

Введем несимметричную матрицу коэффициентов системы (1.1):

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 + \mu & \lambda_0 - \mu & 2\mu_0 \\ \lambda_0 - \mu & \lambda_0 + \mu & -2\mu_0 \\ -\mu_0 & \mu_0 & 2\mu \end{pmatrix}$$

и вычислим ее детерминант: $\det A = 8\lambda_0\kappa_1^2 \neq 0, \kappa_1^2 = \mu^2 + \mu_0^2$.

Несимметричная матрица вида:

$$A^{-1} = \frac{2}{\det A} \begin{pmatrix} \kappa_1^2 + \lambda_0\mu & \kappa_1^2 - \lambda_0\mu & -2\lambda_0\mu_0 \\ \kappa_1^2 - \lambda_0\mu & \kappa_1^2 + \lambda_0\mu & 2\lambda_0\mu_0 \\ \lambda_0\mu_0 & -\lambda_0\mu_0 & 2\lambda_0\mu \end{pmatrix}$$

является обратной к A . Поэтому из (1.1) находим обратные зависимости

$$\begin{aligned}
 e^{11} &= \frac{2}{\det A} \left[(\kappa_1^2 + \lambda_0 \mu) \sigma_{11} + (\kappa_1^2 - \lambda_0 \mu) \sigma_{22} - 2\lambda_0 \mu_0 \sigma_{12} \right], \\
 e^{22} &= \frac{2}{\det A} \left[(\kappa_1^2 - \lambda_0 \mu) \sigma_{11} + (\kappa_1^2 + \lambda_0 \mu) \sigma_{22} + 2\lambda_0 \mu_0 \sigma_{12} \right], \\
 e^{12} &= \frac{2}{\det A} (\lambda_0 \mu_0 \sigma_{11} - \lambda_0 \mu_0 \sigma_{22} + 2\lambda_0 \mu \sigma_{12}).
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Наличие в (1.1) несимметричной матрицы A указывает на ассиметричную зависимость симметричного тензора напряжений от симметричного тензора деформаций.

Уравнения статики упругого тела в случае плоской деформации имеют вид:

$$\sigma_{11,x} + \sigma_{12,y} + F_1 = 0, \quad \sigma_{12,x} + \sigma_{22,y} + F_2 = 0, \tag{1.3}$$

где (F_1, F_2) — вектор объемных сил, индекс после запятой обозначает производную по соответствующей координате.

Введем вектор $w = (u, v)$ смещений и компоненты линейного тензора деформаций

$$\varepsilon_{11} = u_{,x}, \quad \varepsilon_{22} = v_{,y}, \tag{1.4}$$

Разрешимость этой системы относительно функций u, v обеспечивается классическим уравнением совместности деформаций

$$e_{11,yy} + e_{22,xx} - 2e_{12,xy} = 0.$$

Конститутивные уравнения (1.1) в совокупности с (1.4) могут быть записаны в матричном виде:

$$T = I\lambda_0 \operatorname{div} w + 2M\gamma, \tag{1.5}$$

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \mu & \mu_0 \\ -\mu_0 & \mu \end{pmatrix}, \quad 2\gamma = \begin{pmatrix} u_{,x} - v_{,y} & u_{,y} + v_{,x} \\ v_{,x} + u_{,y} & v_{,y} - u_{,x} \end{pmatrix},$$

где I — единичный вектор, T — тензор напряжений, M — тензор кинетических параметров, γ — тензор-девиатор деформаций. Формула (1.5) раскрывает физический смысл параметров μ и μ_0 — это модули сдвига твердого тела в условиях плоской деформации с одним допустимым оператором поворота.

При отсутствии в (1.3) объемных сил ($F = 0$) система уравнений (1.2), (1.3), (1.4) примет вид:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11,x} + \sigma_{12,y} &= 0, \quad \sigma_{12,x} + \sigma_{22,y} = 0, \\
 u_{,x} &= \frac{1}{4} \left[\lambda_0^{-1} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \mu \kappa_1^{-2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) - 2\mu_0 \kappa_1^{-2} \sigma_{12} \right], \\
 v_{,y} &= \frac{1}{4} \left[\lambda_0^{-1} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \mu \kappa_1^{-2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + 2\mu_0 \kappa_1^{-2} \sigma_{12} \right], \\
 u_{,y} + v_{,x} &= \frac{1}{2} \kappa_1^{-2} \left[\mu_0 (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + 2\mu \sigma_{12} \right].
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Вводя функцию Эри U по формулам $\sigma_{11} = U_{,yy}$, $\sigma_{12} = -U_{,xy}$, $\sigma_{22} = U_{,xx}$, обнаружим, что $\Delta\Delta U = 0$, т. е. U — бигармоническая функция, как и в классическом случае [2]. С помощью обозначений

$Q = \sigma_{11} + \sigma_{22} = \Delta U$, $\sigma_{11} = U_{,yy} = Q - U_{,xx}$, $\sigma_{22} = U_{,xx} = Q - U_{,yy}$
преобразуем средние уравнения (1.6) к виду

$$u_{,x} = \frac{1}{4}(\lambda_0^{-1} + \mu\kappa_1^{-2})Q - \frac{1}{2}\mu\kappa_1^{-2}U_{,xy} + \frac{1}{2}\mu_0\kappa_1^{-2}U_{,xy}, \quad (1.7)$$

$$v_{,y} = \frac{1}{4}(\lambda_0^{-1} + \mu\kappa_1^{-2})Q - \frac{1}{2}\mu\kappa_1^{-2}U_{,yy} - \frac{1}{2}\mu_0\kappa_1^{-2}U_{,xy}.$$

Далее, действуя так же, как в [2], найдем что $\Delta Q = 0$. Следовательно, Q — гармоническая функция. Пусть R — гармоническая сопряженная с Q функция, так что

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial R}{\partial x}$$

и $Q + iR = f(z)$, где f — некоторая аналитическая функция аргумента $z = x + iy$.

Введем теперь аналитическую функцию. Из условий Коши-Римана следуют равенства [2]:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{4}Q, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{4}R.$$

С их помощью уравнения (1.7) преобразуются к виду:

$$u_{,x} = (\lambda_0^{-1} + \mu\kappa_1^{-2})p_{,x} - \frac{1}{2}\mu\kappa_1^{-2}U_{,xx} + \frac{1}{2}\mu_0\kappa_1^{-2}U_{,xy},$$

$$v_{,y} = (\lambda_0^{-1} + \mu\kappa_1^{-2})q_{,y} - \frac{1}{2}\mu\kappa_1^{-2}U_{,yy} - \frac{1}{2}\mu_0\kappa_1^{-2}U_{,xy}.$$

После интегрирования получаем следующие представления для компонент вектора смещений:

$$u = (\lambda_0^{-1} + \mu\kappa_1^{-2})p - \frac{1}{2}\mu\kappa_1^{-2}U_{,x} + \frac{1}{2}\mu_0\kappa_1^{-2}U_{,y} + f_1(y), \quad (1.8)$$

$$v = (\lambda_0^{-1} + \mu\kappa_1^{-2})q - \frac{1}{2}\mu\kappa_1^{-2}U_{,y} - \frac{1}{2}\mu_0\kappa_1^{-2}U_{,x} + f_2(x).$$

Последнее уравнение системы (1.6) преобразуется к виду:

$$u_{,y} + v_{,x} = \frac{1}{2}\mu_0\kappa_1^{-2}(U_{,yy} - U_{,xx}) - \mu\kappa_1^{-2}U_{,xy} \quad (1.9)$$

Вычисляя соответствующие производные функций (1.8) —

$$u_{,y} = (\lambda_0^{-1} + \mu\kappa_1^{-2})p_{,y} - \frac{1}{2}\mu\kappa_1^{-2}U_{,xy} + \frac{1}{2}\mu_0\kappa_1^{-2}U_{,yy} + f_{1,y},$$

$$v_{,x} = (\lambda_0^{-1} + \mu\kappa_1^{-2})q_{,x} - \frac{1}{2}\mu\kappa_1^{-2}U_{,xy} - \frac{1}{2}\mu_0\kappa_1^{-2}U_{,xx} + f_{2,x},$$

находим их сумму в сравнении с (1.9):

$$\begin{aligned} u_{,y} + v_{,x} &= \frac{1}{2}\mu_0\kappa_1^{-2}(U_{,yy} - U_{,xx}) - \mu\kappa_1^{-2}U_{,xy} = \\ &= (\lambda_0^{-1} + \mu\kappa_1^{-2})(p_{,y} + q_{,x}) - \mu\kappa_1^{-2}U_{,xy} + \frac{1}{2}\mu_0\kappa_1^{-2}(U_{,yy} - U_{,xx}) + f_{1,y} + f_{2,x}. \end{aligned}$$

Учитывая соотношение $q_{,x} = -p_{,y}$, приходим к равенствам

$$u_{,y} + v_{,x} = f_{1,y} + f_{2,x} = 0.$$

Это значит, что

$$f_1(y) = c(-\varepsilon y + \alpha_1), \quad f_2(x) = c(\varepsilon x + \alpha_2) \quad (1.10)$$

где $c, \alpha_1, \alpha_2, \varepsilon$ — постоянные.

Возвращаясь к (1.8) и учитывая, что дополнительные слагаемые вида (1.10) задают жесткое смещение, устраняемое переходом в новую систему координат, приходим к более простым выражениям для компонент вектора смещений:

$$u = (\lambda_0^{-1} + \mu\kappa_1^{-2})p - \frac{1}{2}\mu\kappa_1^{-2}U_{,x} + \frac{1}{2}\mu_0\kappa_1^{-2}U_{,y}, \quad (1.11)$$

$$v = (\lambda_0^{-1} + \mu\kappa_1^{-2})q - \frac{1}{2}\mu\kappa_1^{-2}U_{,y} - \frac{1}{2}\mu_0\kappa_1^{-2}U_{,x}.$$

Здесь $p = p(x, y)$, $q = q(x, y)$.

Вводя комплексную формулировку соотношений (1.11) —

$$u + iv = (\lambda_0^{-1} + \mu\kappa_1^{-2})(p + iq) - \frac{1}{2}\kappa\kappa_1^{-2}(U_{,x} + iU_{,y}),$$

обозначение $\kappa_1 = \mu + i\mu_0$ и учитывая, что $p + iq = \varphi(z)$, а U — бигармоническая функция, получаем комплексное представление вектора смещений

$$2\kappa_1^2(u + iv) = (2\lambda_0^{-1}\kappa_1^2 + \bar{\kappa})\varphi(z) - \kappa z \overline{\varphi'(z)} - \kappa \overline{\psi(z)}, \quad (1.12)$$

которое является обобщением классических формул Лява [2] (штрих обозначает производную по z).

Что касается комплексного представления компонентов напряжения при помощи тех же функций φ и ψ , участвующих в выражении для бигармонической функции Эри, то оно ничем не отличается от классического [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4\operatorname{Re}[\varphi'(z)], \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + i\sigma_{12} &= 2[z\varphi''(z) + \overline{\psi''(z)}]. \end{aligned}$$

Краевое условие во второй основной задаче теории упругости — о нахождении упругого равновесия при заданных смещениях точек границы — примет вид:

$$(2\lambda_0^{-1}\kappa_1^2 + \bar{\kappa})\phi(z) - \kappa z \overline{\phi'(z)} - \kappa \overline{\psi(z)} = 2\kappa_1^2(q_1 + iq_2),$$

где q_1 и q_2 — заданные смещения граничных точек.

Пусть заданы две комплексные плоскости Z, G и определено конформное отображение $z = \omega(\zeta)$ области $S \subset Z$ на область $\Sigma \subset G$. Введем на плоскости G полярные координаты (r, θ) , так что $\zeta = re^{i\theta}$. Тогда любой вектор (w_x, w_y) преобразуется по формуле $w_r + iw_\theta = e^{-i\theta}(w_x + iw_y)$. С ее помощью найдем из (1.12) полярное представление вектора смещений $w = (u_r, u_\theta)$:

$$2\kappa_1^2[u_r + iu_\theta] = e^{-i\theta} \left((2\lambda_0^{-1}\kappa_1^2 + \bar{\kappa})\phi(\zeta) - \kappa\zeta \overline{\phi'(\zeta)} - \kappa \overline{\psi(\zeta)} \right). \quad (1.13)$$

Для демонстрации новых эффектов и в качестве примера плоской деформации асимметрично-упругих пластин рассмотрим следующие задачи.

1. Труба, подверженная равномерному внутреннему давлению.

Пусть внешняя и внутренняя окружности подвергаются равномерно распределенным нормальным давлениям p_1 и p_2 , так что $\sigma_{\rho\rho} = -p_1$ на L_1 и $\sigma_{\rho\rho} = -p_2$ на L_2 , где L_1, L_2 — внутренняя и внешняя границы соответственно. Тогда, согласно [2], функции напряжений будут иметь вид:

$$\phi(z) = \frac{1}{2} \frac{p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} z, \quad \psi(z) = \frac{(p_2 - p_1) R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2) z}.$$

Полярное представление компонентов напряжения:

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(p_2 - p_1) R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2) \rho^2},$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{(p_2 - p_1) R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2) \rho^2},$$

$$\sigma_{\rho\theta} = 0.$$

Подставляя выражения функций $\phi(z), \psi(z)$ в уравнение (1.12), и отделяя действительную и мнимую части, получим выражения для компонент вектора смещений в полярных координатах:

$$u_\rho = \frac{1}{2} \frac{(p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2) \rho}{(R_2^2 - R_1^2) \lambda_0} - \frac{1}{2} \frac{\mu (p_2 - p_1) R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2) \kappa_1^2 \rho},$$

$$u_\theta = -\frac{1}{2} \mu_0 \frac{(p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2) \rho}{(R_2^2 - R_1^2) \kappa_1^2} - \frac{1}{2} \mu_0 \frac{(p_2 - p_1) R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2) \kappa_1^2 \rho}.$$

При $\mu_0 = 0$ последние формулы дают классическое решение:

$$u_{\rho}^{cl} = \frac{1}{2} \frac{(p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2) \rho}{(R_2^2 - R_1^2) \lambda_0} - \frac{1}{2} \frac{(p_2 - p_1) R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2) \mu \rho},$$

$$u_{\vartheta}^{cl} = 0.$$

Одной из задач является выяснить, как влияет значение μ_0 на решение и определить диапазон влияния этого параметра.

Для того чтобы попытаться ответить на этот вопрос, рассмотрим решение задачи на примере разных материалов.

Пусть в качестве материала для трубы используется сталь легированная. Зададим следующие начальные условия:

- радиусы трубы $R_1=0,29$ м, $R_2=0,3$ м;
- давления $p_1=70$ атм, $p_2=2$ атм;
- табличные значения модуля Юнга (E), модуля сдвига (μ) и коэффициента Пуассона (σ) соответственно равны: $E=20600 \cdot 10^7$ н/м², $\mu=8000 \cdot 10^7$ н/м², $\sigma=0,25$.

При таких начальных условиях компоненты вектора смещения остаются постоянными при изменении ϑ и при $\mu_0=10^{11}$ н/м² имеем:

$$U_{\rho}^{cl}=0,000243 \text{ м}, U_{\rho}=0,000089 \text{ м}, U_{\vartheta}=0,69 \cdot 10^{-5}.$$

При малых значениях μ_0 радиальная составляющая не отличается от классической и начинает уменьшаться при $\mu_0=10^3$ н/м². Изменение продолжается до $\mu_0=10^{16}$ н/м². Для разных начальных условий эти значения μ_0 варьируются, но ширина диапазона влияния этого параметра остается примерно одинаковой.

Пусть теперь имеется резиновая труба диаметром 0,03 м и шириной 0,004 м. Давления равны соответственно $p_1=1,5$ атм, $p_2=1$ атм. Для резины мягкой вулканизированной имеем $E=0,4 \cdot 10^7$ н/м², $\mu=0,1 \cdot 10^7$ н/м², $\sigma=0,47$.

Компоненты вектора смещения также остаются постоянными при изменении ϑ и при $\mu_0=10^{11}$ н/м² получаем:

$$U_{\rho}^{cl}=0,0023 \text{ м}, U_{\rho}=0,000096 \text{ м}, U_{\vartheta}=0,84 \cdot 10^{-8}.$$

Здесь различия между классическим и неклассическим решениями наблюдаются при $\mu_0=10^2$ н/м² и уменьшение значений компонент вектора смещения продолжается до $\mu_0=10^{12}$ н/м².

Заметим, что U_{ρ}^{cl} принимает достаточно высокое значение в отличие от U_{ρ} . Это может означать, что неклассическое решение более физично.

2. Сосредоточенная сила в точке неограниченной плоскости.

Рассмотрим задачу, когда сосредоточенная сила с компонентами (X, Y) действует в точке O неограниченной плоскости. В этом случае функции напряжений будут иметь вид [2]:

$$\varphi(z) = -\frac{(X + iY) \ln(z)}{2\pi(1 + \kappa)}, \quad \psi(z) = \frac{\kappa(X - iY) \ln(z)}{2\pi(1 + \kappa)z}.$$

Выражения для компонентов напряжений в полярных координатах:

$$\sigma_{\rho\rho} = -\frac{(2\lambda_0 + \mu)(X \cos \vartheta + Y \sin \vartheta)}{2\pi\rho(\lambda_0 + \mu)},$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{\mu}{2\pi\rho(\lambda_0 + \mu)}(X \cos \vartheta + Y \sin \vartheta),$$

$$\sigma_{\rho\vartheta} = \frac{\mu}{2\pi\rho(\lambda_0 + \mu)} (X \sin \vartheta - Y \cos \vartheta).$$

Компоненты вектора смещений в полярных координатах имеют вид:

$$u_\rho = \frac{1}{4\pi|\kappa_1|^2(\lambda_0\mu + |\kappa_1|^2)} \left\{ (2|\kappa_1|^2 \ln \rho + \mu\lambda_0 \ln \rho + \lambda_0\mu_0\vartheta)(\mu_0 Y - \mu X) \cos \vartheta - \right. \\ \left. (2|\kappa_1|^2 \ln \rho + \mu\lambda_0 \ln \rho + \lambda_0\mu_0\vartheta)(\mu_0 Y - \mu X) \sin \vartheta \right\},$$

$$u_\vartheta = -\frac{1}{4\pi|\kappa_1|^2(\lambda_0\mu + |\kappa_1|^2)} \left\{ (2|\kappa_1|^2 \ln \rho + \mu\lambda_0 \ln \rho + \lambda_0\mu_0\vartheta)(\mu_0 X + \mu Y) \cos \vartheta + \right. \\ \left. + \ln \rho (\mu\lambda_0 + 2|\kappa_1|^2 \lambda_0\mu_0\vartheta)(\mu_0 Y - \mu X) \sin \vartheta \right\}.$$

При $\mu_0=0$ получим классическое решение:

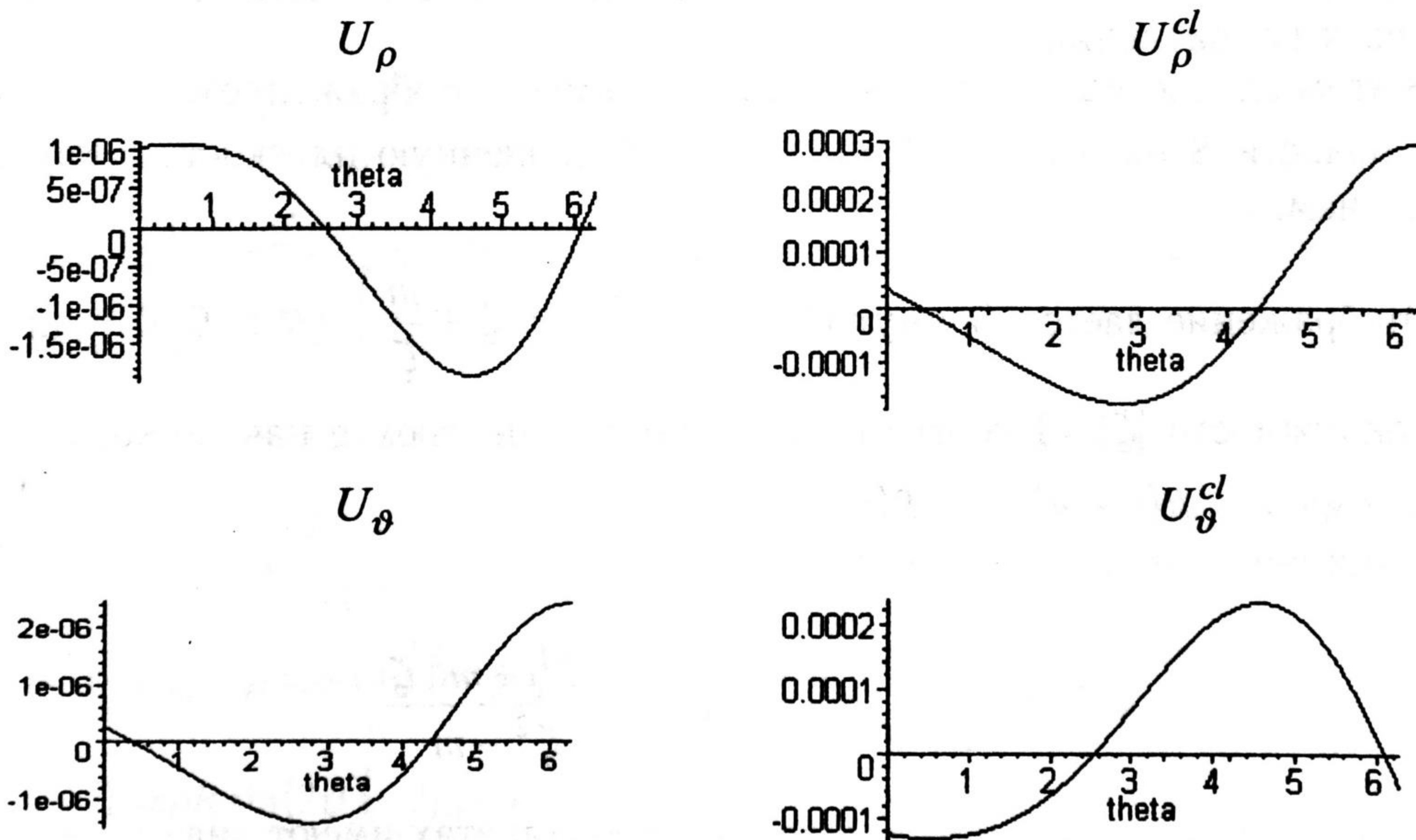
$$u_\rho^{cl} = -\frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} (X \cos \vartheta + Y \sin \vartheta) \ln \rho,$$

$$u_\vartheta^{cl} = -\frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} (Y \cos \vartheta - X \sin \vartheta) \ln \rho.$$

Сравним классическое и неклассическое решения при значении $\mu_0=10^{11}$ н/м² вблизи от точки приложения силы и на достаточном удалении от нее.

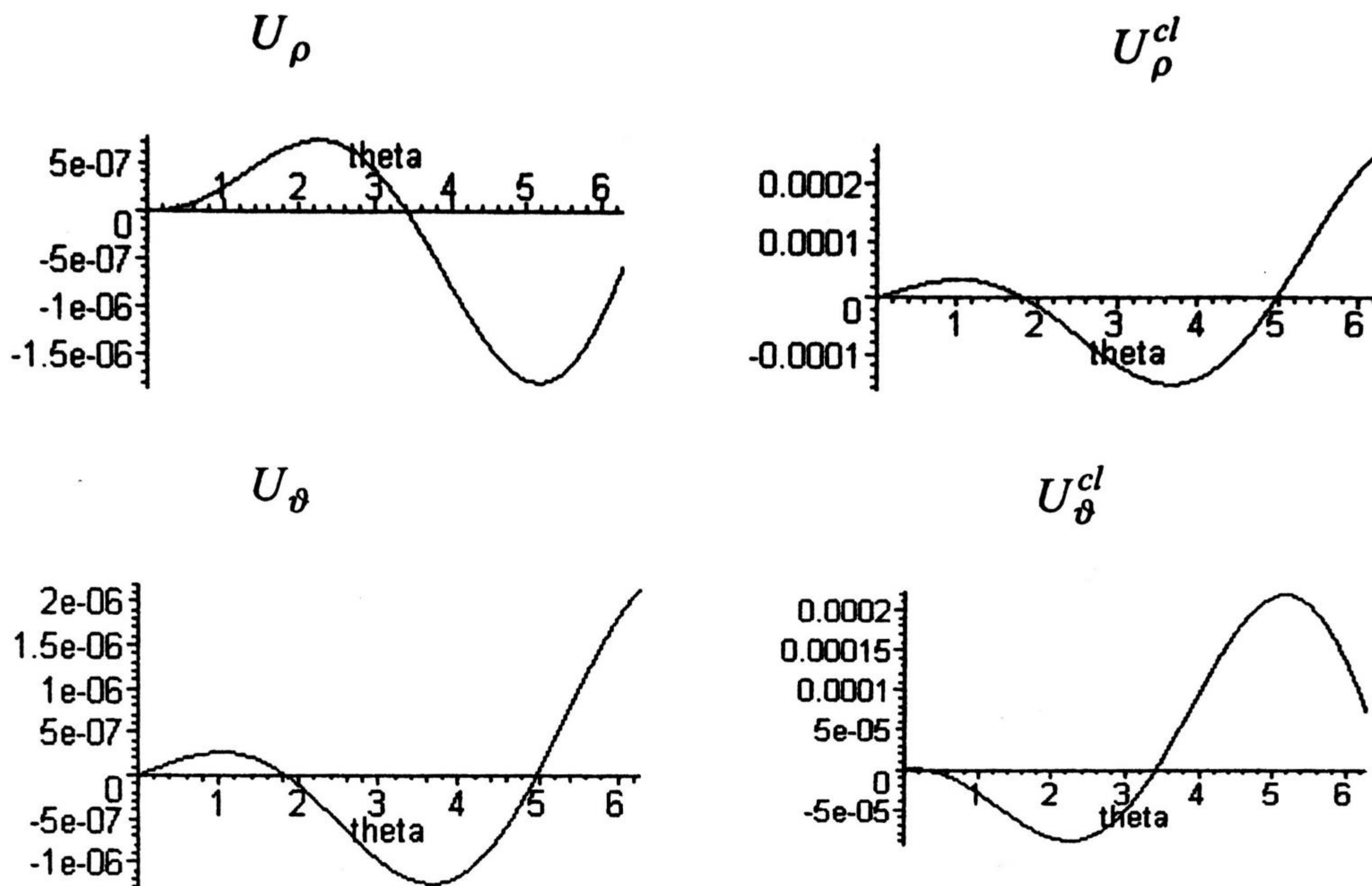
Зададим начальные условия для случая, когда сила действует в точке стальной пластинки:

- $X=12 \cdot 10^3$ н/м², $Y=-43 \cdot 10^3$ н/м²;
- $E=20600 \cdot 10^7$ н/м², $\mu=8000 \cdot 10^7$ н/м², $\sigma=0,25$;
- $\rho=0,05$ м.



Как видно из графиков, вблизи точки приложения силы характер изменения составляющих вектора смещения в зависимости от угла ϑ классического и неклассического решений почти одинаков.

Такая же картина наблюдается и на достаточном удалении от точки ($\rho=1\text{ м}$).



По мере удаления текущей точки от точки приложения силы, смещения сначала уменьшаются (при удалении до 1,5 м), а затем начинают незначительно увеличиваться.

Диапазон влияния μ_0 при данных начальных условиях меняется в пределах от 10^{11} до 10^{21} н/м².

Следует отметить, что в данной задаче существенных различий в поведении компонент вектора смещений в зависимости от характеристик материала не наблюдается.

3. Всестороннее растяжение пластинки с эллиптическим отверстием.

Пусть контур отверстия свободен от внешних напряжений и пусть напряженное состояние на бесконечности представляет собой растяжение величины p во всех направлениях.

В этом случае мы воспользуемся конформным отображением рассматриваемой области S на область $|\zeta| > 1$, т. е. на бесконечную плоскость с круговым отверстием.

Отображение дается формулой $z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right)$, ($R > 0$, $0 \leq m < 1$).

Т. о. окружности $|\zeta| = 1$ соответствует эллипс с центром в начале координат и полуосями $a = R(1+m)$, $b = R(1-m)$.

Функции напряжений имеют вид [2]:

$$\phi(\zeta) = \frac{pR}{2} \left(\zeta - \frac{m}{\zeta} \right), \quad \psi(\zeta) = \frac{pR(1+m^2)}{\zeta^2 - m} \zeta.$$

Компоненты напряжений в полярных координатах имеют вид:

$$\sigma_{\rho\theta} = \frac{mRpsin(2\theta)}{\rho^2 [2\rho^2 m \cos(2\theta) - (\rho^4 + m^2)]^2} \{ 4\rho^4 m^2 \cos^2(2\theta) +$$

$$+ 2m\rho^2 \left[\rho^2(1+m^2) - 2(\rho^4 + m^2) \right] \cos(2\vartheta) + \rho^2(1+m^2) \left(m^2 - 3\rho^4 \right) + (\rho^4 + m^2)^2 \Big\},$$

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{Rp}{\rho^2 \left[2\rho^2 m \cos(2\vartheta) - (\rho^4 + m^2) \right]^2} \left\{ 64m^3 \rho^4 \cos^6 \vartheta - 8\rho^2 m^2 \left[m^2(\rho^2 + 4) + \right. \right. \\ \left. \left. + 12m\rho^2 + \rho^2(1 + 2\rho^2) \right] \cos^4 \vartheta + \left[m^4(-2\rho^2 + 4) + \rho^2(2m^3(4\rho^2 + 16) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2m^2(\rho^4 + 24\rho^2 - 1) + 2\rho^2 m(8\rho^2 + 4) + 2\rho^4(-2\rho^2 + 1) \right] m \cos^2 \vartheta + \right. \\ \left. + m^5(\rho^2 - 2) + m\rho^2 \left[m^3(\rho^2 - 7) + m^2(-\rho^4 - 8\rho^2 + 1) + m\rho^2(-\rho^4 - 2\rho^2 + 1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \rho^4(2\rho^2 - 1) \right] + \rho^8(\rho^2 - 1) \right\},$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{Rp}{\left[2\rho^2 m \cos(2\vartheta) - (\rho^4 + m^2) \right]^2} \left\{ 8\rho^2 m^2 (2\rho^2 + m^2 + 1) \cos^4 \vartheta + \rho^6(\rho^2 + 1) + \right. \\ \left. + m \left[2m^3(m - 4\rho^2) + 2m^2(-\rho^4 - 4\rho^2 + 1) - 2\rho^4(4\rho^2 + 1) \right] \cos^2 \vartheta - m^5 + \right. \\ \left. + m^4(-\rho^2 + 1) + m^3(\rho^4 + 4\rho^2 - 1) + m^2 \rho^2(\rho^4 + 6\rho^2 - 1) + m\rho^4(4\rho^2 + 1) \right\}.$$

Компоненты вектора смещений в полярных координатах имеют вид:

$$u_\rho = \frac{-Rp}{2\rho\lambda_0|\kappa_1|^2 \left(-2m\rho^2 \cos(2\vartheta) + \rho^4 + m^2 \right)} \left\{ m|\kappa_1|^2(m^2 + 3\rho^4) + \right. \\ \left. + \lambda_0\mu m(1 + \rho^2)(m^2 + \rho^2) \right\} \cos(2\vartheta) + \mu_0\lambda_0 m \left[\rho^2(1 + m^2) - (\rho^4 + m^2) \right] \sin(2\vartheta) \Big\} + \\ + m^2 \rho^2 (\mu\lambda_0 + |\kappa_1|^2) \cos(4\vartheta) - \mu_0\lambda_0 m^2 \rho^2 \sin(4\vartheta) + \rho^2 |\kappa_1|^2 (\rho^4 + 2m^2) + \\ + \mu\lambda_0 (m^2(1 + \rho^2) + \rho^2) \Big\},$$

$$u_\vartheta = \frac{Rp}{2\rho\lambda_0|\kappa_1|^2 \left(-2m\rho^2 \cos(2\vartheta) + \rho^4 + m^2 \right)} \left\{ \mu_0\lambda_0 m \rho^2 (2\rho^2 - m^2 - 1) \cos(2\vartheta) + \right. \\ \left. + |\kappa_1|^2 (\rho^4 + m^2) + \lambda_0\mu \rho^2 (1 + m^2) \right\} m \sin(2\vartheta) - m^2 \rho^2 |\kappa_1|^2 \sin(4\vartheta) + \\ + \mu_0\lambda_0 \rho^2 \left[\rho^4 + m^2 - \rho^2(1 + m^2) \right] \Big\}.$$

При $\mu_0 = 0$ последние формулы дают классическое решение:

$$u_\rho^{cl} = \frac{-Rp}{2\rho\lambda_0\mu \left(-2m\rho^2 \cos(2\vartheta) + \rho^4 + m^2 \right)} \left\{ \mu(m^2 + 3\rho^4) + \lambda_0(1 + \rho^2)(m^2 + \rho^2) \right\} m \cos(2\vartheta) - \\ - m^2 \rho^2 (\lambda_0 + \mu) \cos(4\vartheta) \Big\} + \rho \left\{ \mu(\rho^4 + 2m^2) + \lambda_0(m^2(1 + \rho^2) + \rho^2) \right\},$$

$$u_\vartheta^{cl} = \frac{1}{2} \frac{mpR \sin(2\vartheta) \left[-2\mu\rho^2 m \cos(2\vartheta) + \mu(\rho^4 + m^2) + \lambda_0\rho^2(1 + m^2) \right]}{\lambda_0\mu\rho \left[-2\rho^2 m \cos(2\vartheta) + (\rho^4 + m^2) \right]}.$$

На границе, при $\rho = R$, компоненты вектора смещения преобразуются следующим образом:

$$u_{\rho}^{gr} = \frac{-P}{2\lambda_0|\kappa_1|^2(-2mR^2 \cos(2\vartheta) + R^4 + m^2)} \left\{ m|\kappa_1|^2(m^2 + 3R^4) + \lambda_0\mu m(1 + R^2)(m^2 + R^2)\cos(2\vartheta) + \mu_0\lambda_0 m[R^2(1 + m^2) - (R^4 + m^2)]\sin(2\vartheta) \right\} + m^2 R^2(\mu\lambda_0 + |\kappa_1|^2)\cos(4\vartheta) - \mu_0\lambda_0 m^2 R^2 \sin(4\vartheta) + R^2|\kappa_1|^2(R^4 + 2m^2) + \mu\lambda_0(m^2(1 + R^2) + R^2) \Big\|,$$

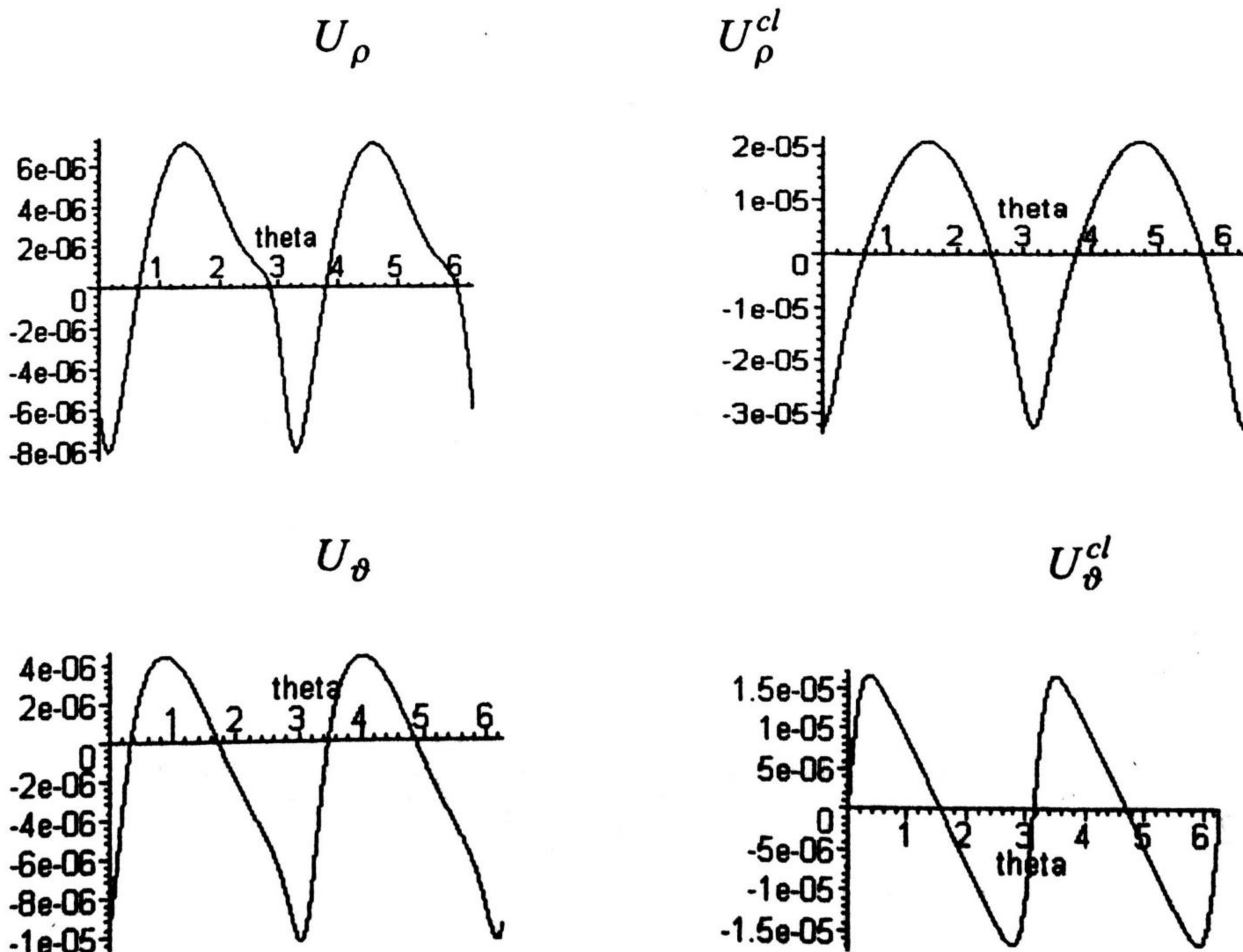
$$u_{\vartheta}^{gr} = \frac{P}{2\lambda_0|\kappa_1|^2(-2mR^2 \cos(2\vartheta) + R^4 + m^2)} \left\{ \mu_0\lambda_0 m R^2(2R^2 - m^2 - 1)\cos(2\vartheta) + |\kappa_1|^2(R^4 + m^2) + \lambda_0\mu R^2(1 + m^2) \right\} m \sin(2\vartheta) - m^2 R^2 |\kappa_1|^2 \sin(4\vartheta) + \mu_0\lambda_0 R^2 [R^4 + m^2 - R^2(1 + m^2)] \Big\|.$$

Для примера рассмотрим растяжение медной пластины с отверстием, контур которого является эллипсом с центром в начале координат и следующими параметрами: $m = 0,5$, $R = 0,5$ (м).

Начальные данные задаются следующим образом:

- $E = 11000 \cdot 10^7$ н/м²,
- $\mu = 4200 \cdot 10^7$ н/м²,
- $\sigma = 0,33$,
- $p = 0,146885 \cdot 10^7$ н/м².

Компоненты вектора смещения в классическом и неклассическом случаях приведены на следующих графиках при $\mu_0 = 10^{11}$:



При таких начальных условиях диапазон влияния параметра μ_0 :

$$10^{10} < \mu_0 < 10^{12}.$$

Из приведенных выше примеров можно сделать вывод о том, что диапазон влияния μ_0 варьируется в зависимости от начальных данных и от того, какой материал рассматривается. Также можно высказать предположение о том, что «появление» нового кинетического параметра позволяет учесть некоторые свойства материалов, которые в классических моделях не выявляются и при расчете смещений не учитываются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашев С. И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука, 1985. 144 с.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Ленинград: Изд-во академии наук, 1933. 381 с.
3. Андреев В. К., Бублик В. В., Бытев В. О. Симметрии неклассических моделей гидродинамики. Новосибирск: Наука, 2003. 350 с.

Бронислав Петрович РУДАКОВ —

доцент кафедры математики

Тюменского государственного

архитектурно-строительного университета,

кандидат физико-математических наук

УДК 519.675, 514.763.7, 517.518.32, 517.518.43

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ УРАВНЕНИЙ С ЧЕТЫРЬМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ НЕКОТОРЫМИ ВИДАМИ СОСТАВНЫХ НОМОГРАММ ТРЕТЬЕГО ЖАНРА

АННОТАЦИЯ. В статье рассматриваются составные шкальные номограммы из выравненных точек третьего жанра специального вида для уравнений с четырьмя переменными. В терминах геометрии тканей изучены специальные классы нешестиугольных тканей, указаны условия их спрямляемости, определены соответствующие им канонические формы, образующие полную и несовместную группу.

In clause are considered compound slide-rule nomograms of the third genres of special kind for the equations with four variable. In the terms of geometry of webs the special classes of non-hexagonal webs are allocated, the conditions of their straightening are specified, appropriate canonical equations, formative complete and incompatible group are determined.

Пусть совокупность четырех семейств поверхностей

$$t_j(x, y, z) = t_j = \text{Const.}, (j = 1 - 4) \quad (1)$$

определяет ткань трехмерного пространства [1]. Исключение x, y, z из (1) приводит к уравнению ткани; возьмем его в виде

$$t_4 = f(t_1, t_2, t_3). \quad (2)$$