При таких начальных условиях диапазон влияния параметра μ_0:

$$10^{10} < \mu_0 < 10^{12}.$$

Из приведенных выше примеров можно сделать вывод о том, что диапазон влияния μ_0 варьируется в зависимости от начальных данных и от того, какой материал рассматривается. Также можно высказать предположение о том, что «появление» нового кинетического параметра позволяет учесть некоторые свойства материалов, которые в классических моделях не выявляются и при расчете смещений не учитываются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашев С. И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука, 1985. 144 с.

2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Ленинград: Изд-во академии наук, 1933. 381 с.

3. Андреев В. К., Бублик В. В., Бытев В. О. Симметрии неклассических моделей гидродинамики. Новосибирск: Наука, 2003. 350 с.

Бронислав Петрович РУДАКОВ —
доцент кафедры математики
Тюменского государственного
архитектурно-строительного университета,
кандидат физико-математических наук

УДК 519.675, 514.763.7, 517.518.32, 517.518.43

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ УРАВНЕНИЙ С ЧЕТЫРЬМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ НЕКОТОРЫМИ ВИДАМИ СОСТАВНЫХ НОМОГРАММ ТРЕТЬЕГО ЖАНРА

АННОТАЦИЯ. В статье рассматриваются составные шкальные номограммы из выравненных точек третьего жанра специального вида для уравнений с четырьмя переменными. В терминах геометрии тканей изучены специальные классы нешестиугольных тканей, указаны условия их спрямляемости, определены соответствующие им канонические формы, образующие полную и несовместную группу.

In clause are considered compound slide-rule nomograms of the third genres of special kind for the equations with four variable. In the terms of geometry of webs the special classes of non-hexagonal webs are allocated, the conditions of their straightening are specified, appropriate canonical equations, formative complete and incompatible group are determined.

Пусть совокупность четырех семейств поверхностей

$$t_j(x,y,z) = t_j = Const., \ (j = 1-4) \tag{1}$$

определяет ткань трехмерного пространства [1]. Исключение x, y, z из (1) приводит к уравнению ткани; возьмем его в виде

$$t_4 = f(t_1,t_2,t_3). \tag{2}$$

Представляют интерес те случаи, когда ткань (1) с известным уравнением (2) является спрямляемой, т. е. когда существуют топологические преобразования пространства, переводящие каждое из семейств поверхностей (1) в семейство плоскостей. Как известно [1], в этих случаях коррелятивное преобразование пространства преобразует ткань из плоскостей в номограмму из выравненных точек, определяемую уравнением

$$\left|f_{i1}(t_i);f_{i2}(t_i);f_{i3}(t_i);1\right|=0\ \ (i=1-4) \tag{3}$$

В работе рассматривается случай, когда коррелятивный образ спрямленной пространственной ткани дает номограмму из четырех плоских шкал, лежащих попарно в двух плоскостях. Для определенности считаем, что шкалы t_1,t_2 принадлежат координатной плоскости $y=0$, а шкалы t_3,t_4 — плоскости $z=0$, чего, очевидно, можно достигнуть надлежащим проективным преобразованием пространства. При этих условиях, как показал R. Soreau [2], детерминантное уравнение номограммы имеет вид

$$\begin{vmatrix} f_{i1}(t_i), & 0, & f_{i2}(t_i), & 1 \\ f_{k1}(t_k), & f_{k2}(t_k), & 0, & 1 \end{vmatrix}=0\ \ (i=1,2;\ k=3,4), \tag{4}$$

и пространственная номограмма с этим уравнением допускает плоский эквивалент — составную номограмму из двух подномограмм с общей прямолинейной немой шкалой α:

$$\begin{vmatrix} f_{i1}, & f_{i2}, & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} f_{k1}, & f_{k2}, & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix}=0, \tag{4*}$$

где f_{jr} — сокращенное обозначение функции $f_{jr}(t_j)$ $(j=1-4;\ r=1,2)$.

Что касается теоретико-функциональных условий, то в проводимых исследованиях считаем, что однозначная функция $f(t_1,t_2,t_3)$ уравнения (2), определенного в некоторой прямоугольной области G:

$$\alpha_i<t_i<\beta_i\ ,\ (i=1-3),$$

обладает в этой области непрерывными частными производными достаточно высокого порядка и отличными от нуля производными $\dfrac{\partial f}{\partial t_i}\equiv f_i',\ (i=1-3)$.

Проведем проективную классификацию рассматриваемых номограмм и найдем ассоциированные с ними канонические формы уравнения (2).

Случай А. Конике принадлежат шкалы t_3,t_4

Пусть в номограмме с уравнением (4) шкала t_2 криволинейна, t_1 — прямолинейна, а шкалы переменных t_3,t_4 лежат на одном и том же коническом сечении. Такую номограмму третьего жанра обозначим $T_{(2)}^{(34)}$. Этой номограмме поставим в соответствие граф (его также обозначим $T_{(2)}^{(34)}$), состоящий из одного конического сечения — носителя шкал переменных t_3,t_4 и двух прямых: прямой, являющейся носителем переменного t_1, и оси α пересечения плоскостей $y=0$, $z=0$. Абсциссы точек пересечения коники и прямой с осью α обозначим, соответственно, a_{34},α_{34}, a_1.

Граф $T_{(2)}^{(34)}$ имеет три ветви. Вкладывая в понятия «узла» и «индекса» узла графа тот же смысл, что и в работе [3], нетрудно видеть, что возможны лишь графы с символами:

$$[(3)],\ [(2),(1)],\ [(1),(1),(1)]. \qquad (5)$$

Теорема 1. *Номограммы $T_{(2)}^{(34)}$ с уравнением (4) с графами символов (5) образуют в точности четыре проективно различных (с точностью до параметризации шкал) типов.*

Два графа с различными символами, очевидно, непроективны. В зависимости же от того, какие из ветвей t_1, t_{34} выходят из каждого узла оси α, графы с данным символом разбиваются на проективно различные типы.

С символом $[(3)]$ существует один тип графа

$$[(t_1, t_{34}, t_{34})]; \qquad (6)$$

он получается при $a_1 = a_{34} = \alpha_{34}$.

С символом $[(2),(1)]$ возможны графы двух проективно различных типов:

$$[(t_1, t_{34}), (t_{34})] \text{ при } a_1 = a_{34} \neq \alpha_{34}, \qquad (7)$$

$$[(t_{34}, t_{34}), (t_1)] \text{ при } a_{34} = \alpha_{34} \neq a_1. \qquad (8)$$

Существует один тип графа с символом $[(1),(1),(1)]$, а именно:

$$[(t_1,), (t_{34}), (t_{34})] \text{ при } a_1 \neq a_{34} \neq \alpha_{34},\ a_1 \neq \alpha_{34}. \qquad (9)$$

Таким образом, существует по меньшей мере четыре типа непроективных графов.

Покажем, что их в точности четыре.

Пусть имеются два графа одного и того же типа: $T_{(2)}^{(34)}$ с ветвями t_1, t_{34} и $\bar{T}_{(2)}^{(34)}$ с ветвями $\bar{t}_1$, $\bar{t}_{34}$. Существует проективное преобразование пространства, совмещающее оси координатных систем, при этом в плоскости $y = 0$ окажутся ветви t_1, $\bar{t}_1$ а в плоскости $z = 0$ — ветви t_{34}, $\bar{t}_{34}$. Поскольку на оси Ox (оси $\bar{\alpha}$ графа $\bar{T}_{(2)}^{(34)}$, совпавшей с осью α графа $T_{(2)}^{(34)}$) имеется не более трех точек пересечения ветвей t_1, t_{34} и трех точек пересечения ветвей $\bar{t}_1$, $\bar{t}_{34}$, то после подходящей коллинеации можем считать, что $\bar{a}_1 \equiv a_1$, $\bar{a}_{34} \equiv a_{34}$, $\bar{\alpha}_{34} \equiv \alpha_{34}$. Последующей гомологией с осевой плоскостью $z = 0$ можно совместить прямые $\bar{t}_1$ и t_1, что и доказывает теорему.

Теорема 2. *Существует точно четыре канонические формы уравнений (2), представимых номограммами $T_{(2)}^{(34)}$ с уравнением (3).*

В работе [4] показано, что уравнения (4) номограмм $T_{(2)}^{(34)}$ приводятся к каноническим формам:

$$F_1 \cdot F_2 + \Phi_2 = F_3 + F_4,\ I_{(2)} \qquad F_1 \cdot F_2 + \Phi_2 = F_3 \cdot F_4,\ II_{(2)}$$

$$F_1 \cdot F_2 + \Phi_2 = \frac{1}{F_3 + F_4}, \quad III_{(2)} \qquad F_1 \cdot F_2 + \Phi_2 = \frac{1}{F_3 \cdot F_4 + 1}, \quad IV_{(2)}$$

причем к этим формам приводятся уравнения (4), соответственно, типов (6), (7), (8), (9).

Следовательно, если уравнение (2) представимо номограммой $T_{(2)}^{(34)}$, то оно обязательно приводится к одной из указанных канонических форм. В работе [5] доказана несовместность уравнений $I_{(2)} - IV_{(2)}$, что говорит о существовании точно четырех канонических уравнений $I_{(2)} - IV_{(2)}$ для уравнений (2), представимых номограммой $T_{(2)}^{(34)}$. Отсюда также следует, что уравнение (2), представимое номограммой $T_{(2)}^{(34)}$, приводится к одной и только одной из этих канонических форм. Условия представимости уравнения (2) номограммой $T_{(2)}^{(34)}$ указаны в [6-8].

Замечание. Аналогичные результаты можно было бы получить для случая, когда в номограмме (4) шкала t_1 криволинейная, t_2 — прямолинейная, а шкалы t_3, t_4 принадлежат одной конике (обозначим их как $T_{(1)}^{(34)}$). Сформулируем эти результаты.

1. Существует в точности четыре проективно различных (с точностью до параметризации шкал) типов номограмм.

2. Существует точно четыре канонические формы уравнений (2), представимых номограммами типа $T_{(1)}^{(34)}$, а именно:

$$F_1 \cdot F_2 + \Phi_1 = F_3 + F_4, \quad I_{(1)} \qquad F_1 \cdot F_2 + \Phi_1 = F_3 \cdot F_4, \quad II_{(1)}$$

$$F_1 \cdot F_2 + \Phi_1 = \frac{1}{F_3 + F_4}, \quad III_{(1)} \qquad F_1 \cdot F_2 + \Phi_1 = \frac{1}{F_3 \cdot F_4 + 1}, \quad IV_{(1)}$$

Случай В. Конике принадлежат шкалы t_1, t_2

Пусть в номограмме с уравнением (4) одна из шкал $t_j \; (j = 3,4)$ криволинейна, другая — прямолинейна, а шкалы t_1, t_2 лежат на общей конике. Такую номограмму третьего жанра обозначим $T_{(j)}^{(12)}$. Как и в случае А), нетрудно было бы получить следующие результаты [3]:

1. Существует в точности по четыре проективно различных (с точностью до параметризации шкал) типов номограмм $T_{(j)}^{(12)}$ (для $j=3$, $j=4$), а именно:

$[(t_{12}, t_{12}, t_j)]$ при $a_{12} = \alpha_{12} = a_j$; (10)

$[(t_{12}, t_j)(t_{12})]$ при $a_{12} = a_j \neq \alpha_{12}$; (11)

$[(t_{12}, t_{12})(t_j)]$ при $a_{12} = \alpha_{12} \neq a_j$; (12)

$[(t_{12})(t_{12})(t_j)]$ при $a_{12} \neq \alpha_{12} \neq a_j$, $a_{12} \neq a_j$. (13)

2. Существует точно по четыре канонических форм уравнений (2), представимых номограммами $T_{(j)}^{(12)}$ (для $j=3$, $j=4$), а именно:

$$F_3 \cdot F_4 + \Phi_j = F_1 + F_2, \; I_{(j)} \qquad F_3 \cdot F_4 + \Phi_j = F_1 \cdot F_2, \; II_{(j)}$$

$$F_3 \cdot F_4 + \Phi_j = \frac{1}{F_1 + F_2}, \; III_{(j)} \qquad F_3 \cdot F_4 + \Phi_j = \frac{1}{F_1 \cdot F_2 + 1}, \; IV_{(j)}$$

причем к ним приводятся уравнения (4) номограмм $T_{(j)}^{(12)}$, соответственно типов (10), (11), (12), (13).

3. Несовместность канонических форм $I_{(j)}$-$IV_{(j)}$ показана в работе [4,8]. Следовательно, если уравнение (2) представимо номограммой $T_{(j)}^{(12)}$, то оно обязательно приводится к каноническим формам $I_{(j)}$-$IV_{(j)}$, и только к одной из них. Условия приводимости при $j=3$ получены в [5], при $j=4$ — в [9].

Из изложенных результатов имеют место два следствия.

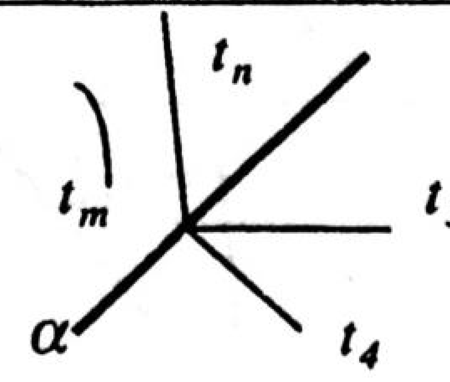
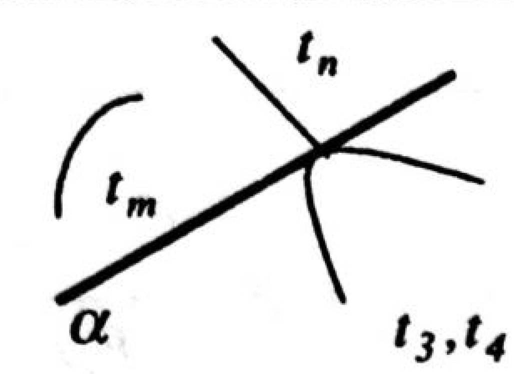
Следствие 1. *Одно и то же уравнение (2) может быть представимо номограммами (4) как первого жанра $T_{(k)}$ $(k=1-4)$, так и третьего жанра $\left(T_{(1)}^{(34)}, T_{(2)}^{(34)}, T_{(j)}^{(12)} \left(j=3,4\right)\right)$, относящихся к какой-либо одной из канонических форм $I_{(j)}-IV_{(j)}$ $(j=1-4)$.*

Следствие 2. *Если уравнение (2) допускает номограмму (4) первого жанра с криволинейной шкалой t_j,$\left(j=1,2\right)$ (номограмму $T_{(j)}$), то оно допускает и номограмму третьего жанра, получающуюся из $T_{(j)}$ заменой пары прямолинейных носителей t_3, t_4, принадлежащих одной полуплоскости номограммы (4'), одним коническим сечением, удовлетворяющим условию: число точек пересечения с осью носителей шкал переменных t_1, t_3, t_4 сохраняется.*

Аналогично производятся замены при переходе от номограмм первого жанра $T_{(3)}$, $T_{(4)}$ к номограммам, соответственно, $T_{(3)}^{(12)}$, $T_{(4)}^{(12)}$.

Заметим, что для случаев, когда одна из шкал t_1, t_4 — криволинейная, результаты получаются аналогичные, стоит только поменять ролями переменные t_2,t_1 — в первом случае, t_3,t_4 — во втором. Результаты исследований отражены в таблицах 12, 13.

Таблица 12

№№	Каноническая форма	Допускаемые проективно различные типы номограмм	
		I жанра	III жанра
1	2	3	4
$I_{(m)}$	$F_m F_n + \Phi_m = F_3 + F_4$ $\left(m,n=1,2;\ m \neq n\right)$		

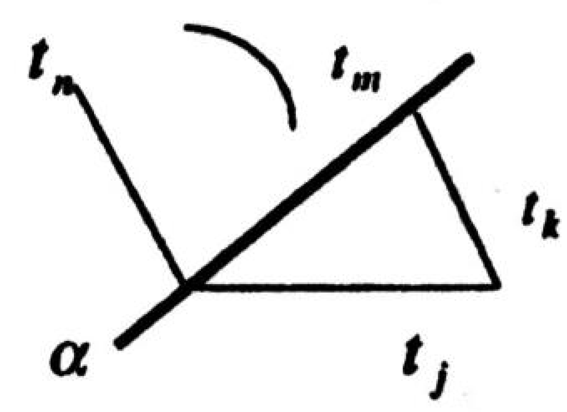
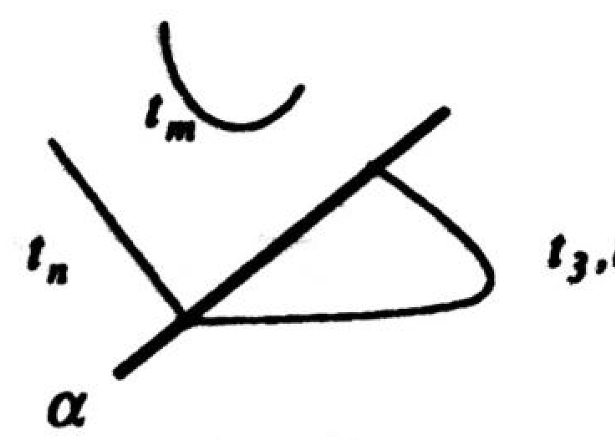
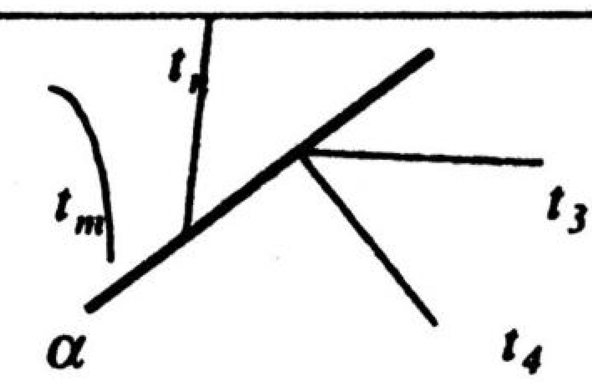
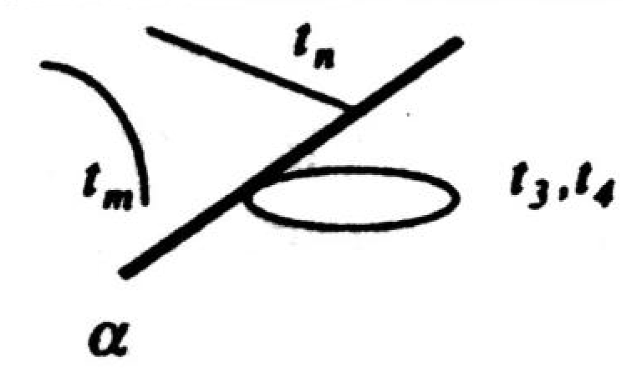
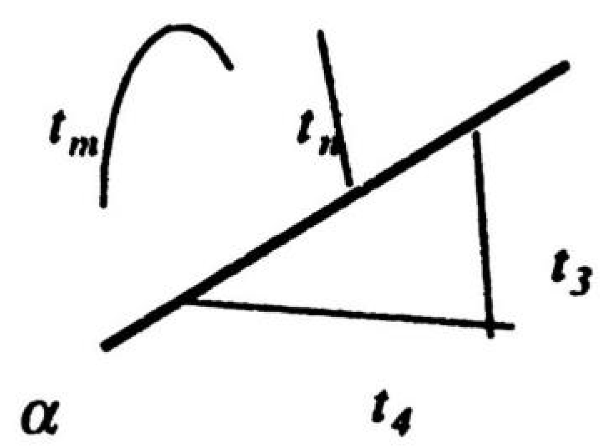
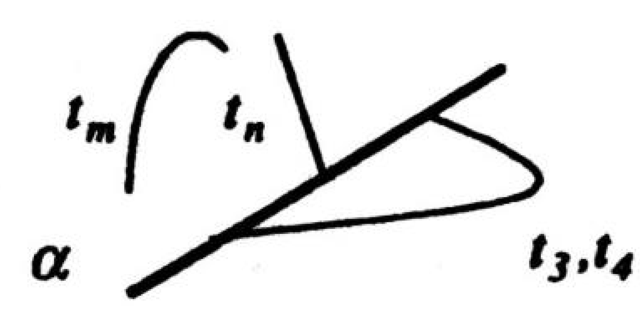
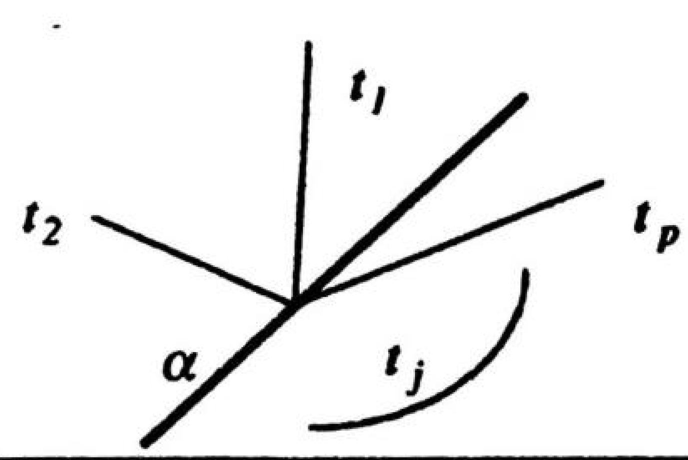
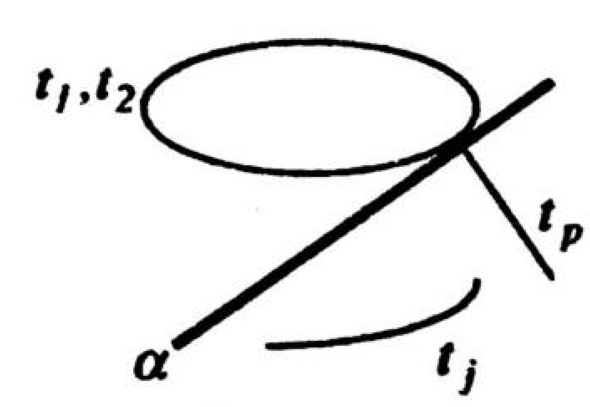
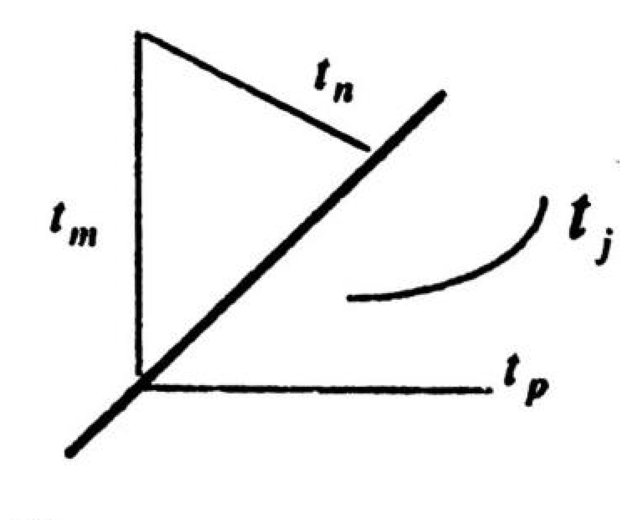
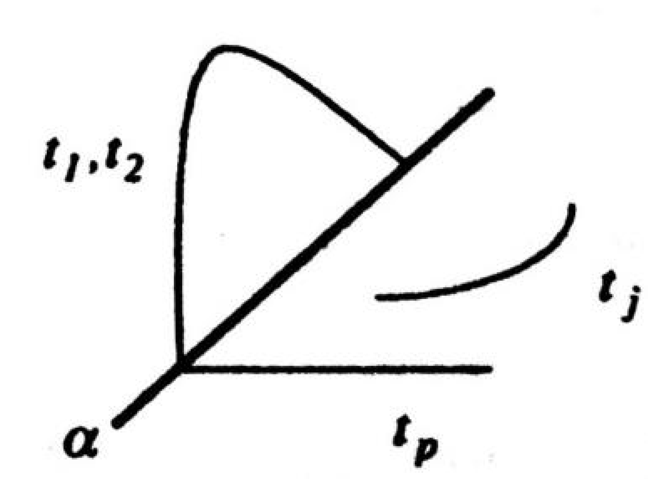
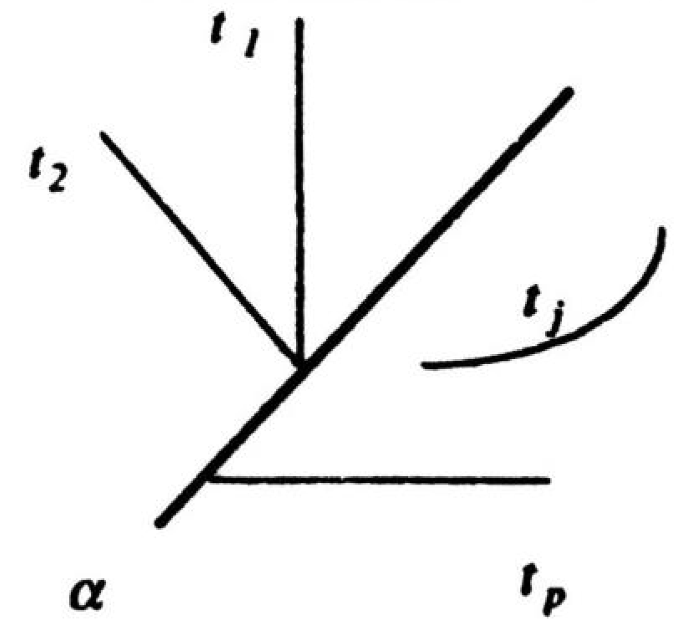
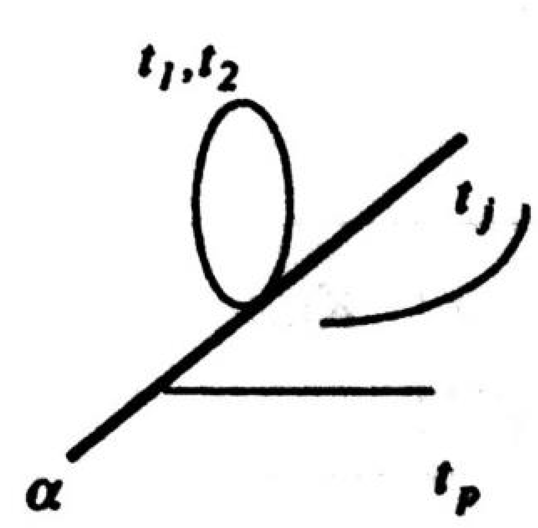
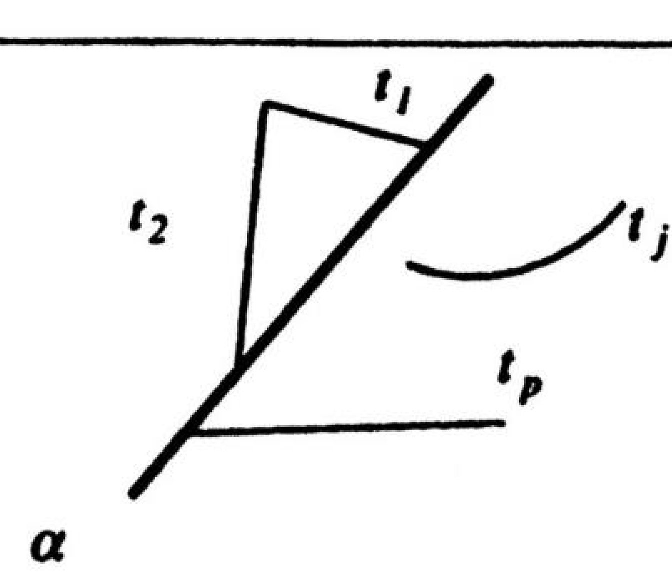
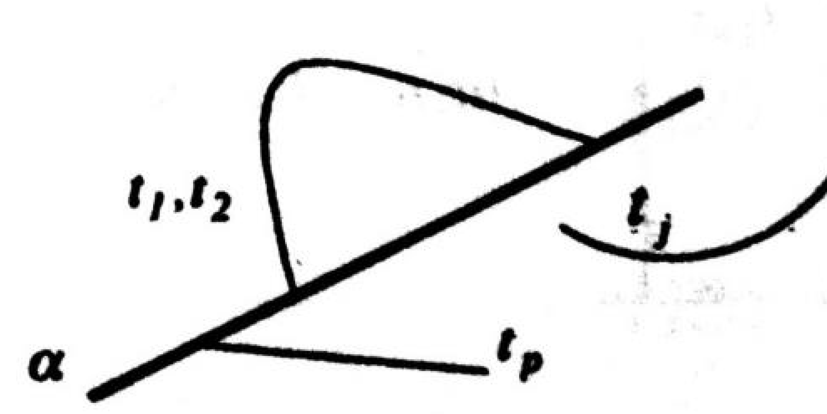
1	2	3	4
$II_{(m)}$	$F_mF_n + \Phi_m = F_3F_4$ $(m,n=1,2;\ m \neq n)$	$k, j = 3,4;\ k \neq j$ 	
$III_{(m)}$	$F_mF_n + \Phi_m = \dfrac{1}{F_3+F_4}$ $(m,n=1,2;\ m \neq n)$		
$IV_{(m)}$	$F_mF_n + \Phi_n = \dfrac{1}{F_3F_4+1}$ $(m,n=1,2;\ m \neq n)$		

Таблица 13

№№	Каноническая форма	Допускаемые проективно различные типы номограмм	
		I жанра	III жанра
$I_{(j)}$	$F_pF_j + \Phi_j = F_1 + F_2$ $(p, j = 3,4;\ p \neq j)$		
$II_{(j)}$	$F_pF_j + \Phi_j = F_1F_2$ $(p, j = 3,4;\ p \neq j)$	$m, n = 1,2;\quad m \neq n$ 	
$III_{(j)}$	$F_pF_j + \Phi_j = \dfrac{1}{F_1+F_2}$ $(p, j = 3,4;\ p \neq j)$		
$IV_{(j)}$	$F_pF_j + \Phi_j = \dfrac{1}{F_1F_2+1}$ $(p, j = 3,4;\ p \neq j)$		

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бляшке В. Введение в геометрию тканей. М., 1959.
2. Soreau, R. Nomographie ou Traite des Abaques, tome premier, p. 345. Paris, 1921.
3. Рудаков Б. П. О представлении уравнений с четырьмя переменными некоторыми видами составных номограмм второго и четвертого жанров // Вестник Тюменского гос. университета, 2005. № 4. С. 121-130.
4. Рудаков Б. П. Условия и методы спрямляемости некоторых пространственных тканей, номографирования уравнений и приведения их к каноническим формам. Тюмень: Вектор Бук, 2003. 246 с.
5. Дураков (Рудаков) Б. П. О приведении уравнений с четырьмя переменными к каноническим формам пятого номографического порядка // Номографич. сб. № 6. М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1969. С. 190-199.
6. Дураков (Рудаков) Б. П. Составные номограммы первого жанра с четырьмя переменными // Уч. зап. Свердл. гос. пед. ин-та. Вып. 31. 1965. С. 50-72.
7. Дураков (Рудаков) Б. П. О представлении уравнений с четырьмя переменными составными номограммами первого жанра с прямолинейной ответной шкалой // Тез. докл. I межвуз. конф. М., 1965. С. 24-25.
8. Рудаков Б. П. О приведении уравнений с четырьмя переменными к некоторым каноническим формам, допускающих представление составными шкальными номограммами первого жанра // Вестник Тюменского гос. университета, 2005. № 4. С. 112-121.
9. Дураков (Рудаков) Б. П. К вопросу единственности спрямляемости некоторых пространственных нешестиугольных тканей // Тр. Тюменского индустр. ин-та «Бурение скважин и трубопроводный транспорт нефти и газа». Тюмень, 1969. С. 264-280.

Татьяна Владимировна МАЛЬЦЕВА —
зав. кафедрой математики и информатики,
доктор физико-математических наук
Татьяна Викторовна САЛТАНОВА —
ассистент кафедры математики и информатики

УДК 519.6

*СОПОСТАВЛЕНИЕ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ ПРИ РАСЧЕТЕ ДВУХФАЗНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ**

АННОТАЦИЯ. При нагружении дневной поверхности двухфазной полуплоскости вертикальными нагрузками определяющими перед горизонтальными являются вертикальные перемещения частиц скелета грунта. При наличии соизмеримых горизонтальных нагрузок перемещения становятся равноправными. В статье рассматриваются два варианта матриц жесткости метода конечных элементов. Первый отвечает случаю равноправности вертикальных и горизонтальных перемещений частиц скелета грунта, второй — более детальному описанию вертикальных, по сравнению с горизонтальными, перемещений частиц скелета грунта.

At loading to halfplane the vertical loadings determining before horizontal movings vertical movings particles of a skeleton of a ground are biphase. At presence commensurable horizontal load movings become equal in rights.

* Работа выполнена при поддержке гранта для молодых ученых и аспирантов ТюмГУ, 2006 г.