СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бляшке В. Введение в геометрию тканей. М., 1959.
2. Soreau, R. Nomographie ou Traite des Abaques, tome premier, p. 345. Paris, 1921.
3. Рудаков Б. П. О представлении уравнений с четырьмя переменными некоторыми видами составных номограмм второго и четвертого жанров // Вестник Тюменского гос. университета, 2005. № 4. С. 121-130.
4. Рудаков Б. П. Условия и методы спрямляемости некоторых пространственных тканей, номографирования уравнений и приведения их к каноническим формам. Тюмень: Вектор Бук, 2003. 246 с.
5. Дураков (Рудаков) Б. П. О приведении уравнений с четырьмя переменными к каноническим формам пятого номографического порядка // Номографич. сб. № 6. М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1969. С. 190-199.
6. Дураков (Рудаков) Б. П. Составные номограммы первого жанра с четырьмя переменными // Уч. зап. Свердл. гос. пед. ин-та. Вып. 31. 1965. С. 50-72.
7. Дураков (Рудаков) Б. П. О представлении уравнений с четырьмя переменными составными номограммами первого жанра с прямолинейной ответной шкалой // Тез. докл. I межвуз. конф. М., 1965. С. 24-25.
8. Рудаков Б. П. О приведении уравнений с четырьмя переменными к некоторым каноническим формам, допускающих представление составными шкальными номограммами первого жанра // Вестник Тюменского гос. университета, 2005. № 4. С. 112-121.
9. Дураков (Рудаков) Б. П. К вопросу единственности спрямляемости некоторых пространственных нешестиугольных тканей // Тр. Тюменского индустр. ин-та «Бурение скважин и трубопроводный транспорт нефти и газа». Тюмень, 1969. С. 264-280.

Татьяна Владимировна МАЛЬЦЕВА —
зав. кафедрой математики и информатики,
доктор физико-математических наук

Татьяна Викторовна САЛТАНОВА —
ассистент кафедры математики и информатики

УДК 519.6

*СОПОСТАВЛЕНИЕ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ ПРИ РАСЧЕТЕ ДВУХФАЗНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ**

АННОТАЦИЯ. При нагружении дневной поверхности двухфазной полуплоскости вертикальными нагрузками определяющими перед горизонтальными являются вертикальные перемещения частиц скелета грунта. При наличии соизмеримых горизонтальных нагрузок перемещения становятся равноправными. В статье рассматриваются два варианта матриц жесткости метода конечных элементов. Первый отвечает случаю равноправности вертикальных и горизонтальных перемещений частиц скелета грунта, второй — более детальному описанию вертикальных, по сравнению с горизонтальными, перемещений частиц скелета грунта.

At loading to halfplane the vertical loadings determining before horizontal movings vertical movings particles of a skeleton of a ground are biphase. At presence commensurable horizontal load movings become equal in rights.

* Работа выполнена при поддержке гранта для молодых ученых и аспирантов ТюмГУ, 2006 г.

In article it is considered two kinds of matrixes of rigidity of a of final elements method. The first answers a case of equal in rights vertical and horizontal movings of particles of a skeleton of a ground. The second to more detailed description vertical in comparison with horizontal movings of particles of a skeleton of a ground.

Основной задачей при проектировании сооружений на водонасыщенных грунтах является анализ напряженно-деформированного состояния оснований в стабилизированном состоянии с учетом избыточных остаточных поровых давлений.

Рассмотрим модель напряженно-деформированного состояния двухфазного тела (скелет грунта + поровая вода) в стабилизированном состоянии, не зависящем от времени, представляющую собой систему дифференциальных уравнений, относительно вектора перемещений частиц твердой фазы $\boldsymbol{u}=(u_1;u_2)$ [1]:

$$-\left(\left((G+\lambda)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+G\Delta u_i+b_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}+c_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\right)=F_i,\ i=1,2,\quad (1)$$

$$G=\frac{E_s}{2(1+\nu)},\ \lambda=\frac{E_s\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\ b_i=\frac{E_{li}}{\aleph_i^2},\ c_i=\frac{E_{li}}{\aleph_i h_i},\ \theta=div\,\boldsymbol{u}$$

с неоднородными смешанными граничными условиями

$$\boldsymbol{u}\big|_{S_1}=0,\ \boldsymbol{t}^{(\nu)}\big|_{S_2}=\boldsymbol{Q}.$$

В отличие от уравнений Ламе каждое уравнение системы (1) содержит дополнительные слагаемые в виде производных второго и первого порядков, отражающие влияние жидкой фазы на твердую.

Положительные коэффициенты G, λ, b_i, c_i, отражают механические свойства среды. ν, E_s, E_{li} — механические характеристики твердой (индекс s) и жидкой (индекс l) фаз. $\aleph_i$ — безразмерная величина $(0<\aleph_i<1)$, показывающая долю перемещения твердой частицы от соответствующего перемещения жидкой частицы. h_i — геометрические характеристики сжимаемой толщи, $\boldsymbol{t}^{(\nu)}$ — оператор, позволяющий записать напряжения через узловые перемещения. $\boldsymbol{Q}=(Q_1;Q_2)$ — заданный вектор внешних сил, приложенных к дренирующей дневной поверхности тела S_2, вектор $\boldsymbol{\nu}$ — нормаль к поверхности.

Для решения задачи используется метод конечных элементов (МКЭ). При рассмотрении треугольных конечных элементов [2] распределение деформаций и напряжений однородно в пределах треугольного элемента, что приводит к погрешностям. Разобьем двухфазную среду на прямоугольные конечные элементы.

Перемещения каждой вершины прямоугольника *ijmn* (рис. 1) выражаются компонентами $\{\delta\}=(u_1^i,\ u_2^i,\ u_1^j,\ u_2^j,\ u_1^m,\ u_2^m,\ u_1^n,\ u_2^n)$, которые являются искомыми величинами.

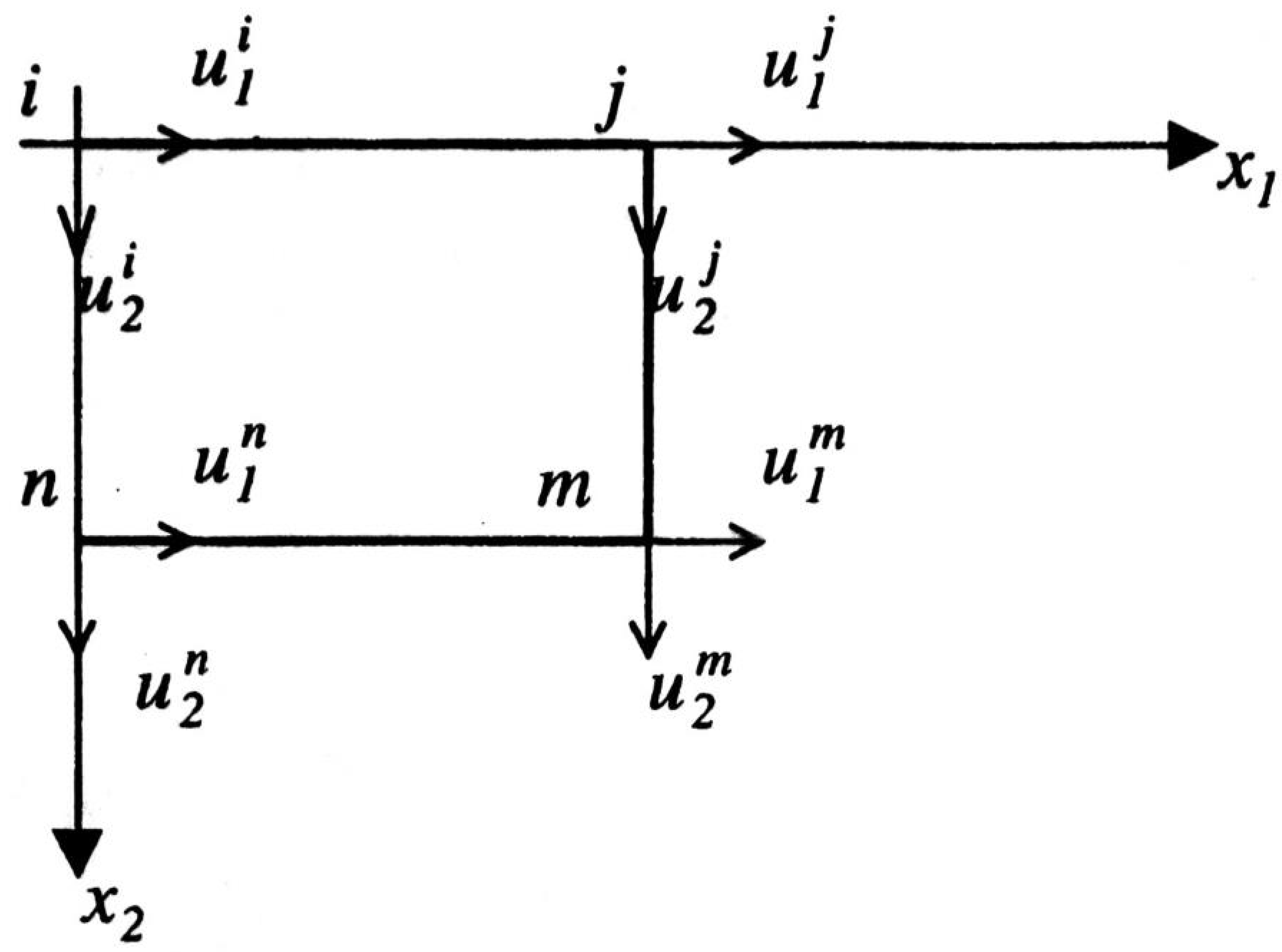

Рис. 1

Перемещения прямоугольного элемента можно задавать в виде полинома второй степени:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1 x_2 + \alpha_5 x_1^2 + \alpha_6 x_2^2.$$

Если в рассматриваемом конечном элементе использовать только четыре узла $ijmn$, то в пределах рассматриваемого конечного элемента останутся два варианта сокращенной записи аппроксимирующего полинома:

$$u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1 x_2, \qquad u_2 = \alpha_5 + \alpha_6 x_1 + \alpha_7 x_2 + \alpha_8 x_1 x_2,$$

где $\alpha_1,..,\alpha_8$ — постоянные коэффициенты, подлежащие определению.

Рассмотрим два случая аппроксимации. Слагаемое $\alpha_4 x_1 x_2$ описывает случай равноправия перемещений вдоль каждой из осей. Ниже будет рассмотрен случай, когда будет оставлено слагаемое $\alpha_6 x_2^2$. В этом варианте вертикальное перемещение имеет приоритет перед горизонтальным.

Для искомых горизонтальных перемещений вершин прямоугольника u_1^i, u_1^j, u_1^m, u_1^n справедливы уравнения:

$$u_1^i = \alpha_1 + \alpha_2 x_1^i + \alpha_3 x_2^i + \alpha_4 x_1^i x_2^i, \qquad u_1^j = \alpha_1 + \alpha_2 x_1^j + \alpha_3 x_2^j + \alpha_4 x_1^j x_2^j,$$

$$u_1^m = \alpha_1 + \alpha_2 x_1^m + \alpha_3 x_2^m + \alpha_4 x_1^m x_2^m, \qquad u_1^n = \alpha_1 + \alpha_2 x_1^n + \alpha_3 x_2^n + \alpha_4 x_1^n x_2^n.$$

Разрешая эту систему уравнений относительно $\alpha_1,...,\alpha_4$ получим выражение для u_1:

$$u_1 = \frac{1}{\Delta}\Big[\big(d_i + f_i x_1 + p_i x_2 + q_i x_1 x_2\big)u_1^i + \big(d_j + f_j x_1 + p_j x_2 + q_j x_1 x_2\big)u_1^j +$$

$$+ \big(d_m + f_m x_1 + p_m x_2 + q_m x_1 x_2\big)u_1^m + \big(d_n + f_n x_1 + p_n x_2 + q_n x_1 x_2\big)u_1^n\Big].$$

Аналогично получаем формулы для искомых вертикальных перемещений u_2:

$$u_2 = \frac{1}{\Delta}\Big[\big(d_i + f_i x_1 + p_i x_2 + q_i x_1 x_2\big)u_2^i + \big(d_j + f_j x_1 + p_j x_2 + q_j x_1 x_2\big)u_2^j +$$

$$+ \big(d_m + f_m x_1 + p_m x_2 + q_m x_1 x_2\big)u_2^m + \big(d_n + f_n x_1 + p_n x_2 + q_n x_1 x_2\big)u_2^n\Big],$$

где $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1^i & x_2^i & x_1^i \cdot x_2^i \\ 1 & x_1^j & x_2^j & x_1^j \cdot x_2^j \\ 1 & x_1^m & x_2^m & x_1^m \cdot x_2^m \\ 1 & x_1^n & x_2^n & x_1^n \cdot x_2^n \end{vmatrix}, \quad d_i = \begin{vmatrix} x_1^j & x_2^j & x_1^j \cdot x_2^j \\ x_1^m & x_2^m & x_1^m \cdot x_2^m \\ x_1^n & x_2^n & x_1^n \cdot x_2^n \end{vmatrix},$$

$$f_i = -\begin{vmatrix} 1 & x_2^j & x_1^j \cdot x_2^j \\ 1 & x_2^m & x_1^m \cdot x_2^m \\ 1 & x_2^n & x_1^n \cdot x_2^n \end{vmatrix}, \quad p_i = \begin{vmatrix} 1 & x_1^j & x_1^j \cdot x_2^j \\ 1 & x_1^m & x_1^m \cdot x_2^m \\ 1 & x_1^n & x_1^n \cdot x_2^n \end{vmatrix}, \quad q_i = -\begin{vmatrix} 1 & x_1^j & x_2^j \\ 1 & x_1^m & x_2^m \\ 1 & x_1^n & x_2^n \end{vmatrix}.$$

Коэффициенты d, f, p, q с соответствующими индексами имеем путем циклической перестановки.

Выразим деформации внутри прямоугольного элемента $ijmn$ через искомые узловые перемещения:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\Delta}\left[(f_i + q_i x_2)u_1^i + (f_j + q_j x_2)u_1^j + (f_m + q_m x_2)u_1^m + (f_n + q_n x_2)u_1^n\right],$$

$$\varepsilon_2 = \left[(p_i + q_i x_1)u_2^i + (p_j + q_j x_1)u_2^j + (p_m + q_m x_1)u_2^m + (p_n + q_n x_1)u_2^n\right], \quad (2)$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{\Delta}\left[(p_i + q_i x_1)u_1^i + (p_j + q_j x_1)u_1^j + (p_m + q_m x_1)u_1^m + +(p_n + q_n x_1)u_1^n + \right.$$

$$\left. + (f_i + q_i x_2)u_2^i + (f_j + q_j x_2)u_2^j + (f_m + q_m x_2)u_2^m + (f_n + q_n x_2)u_2^n\right].$$

Перепишем выражения (2) в матричном виде, в которых через $\{\delta\}$ обозначены искомые узловые перемещения (u_1, u_2):

$$\{\varepsilon\} = [N]\{\delta\}, \text{ где } \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix},$$

$$[N] = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} f_i + q_i x_2 & 0 & f_j + q_j x_2 & 0 & f_m + q_m x_2 & 0 & f_n + q_n x_2 & 0 \\ 0 & p_i + q_i x_1 & 0 & p_j + q_j x_1 & 0 & p_m + q_m x_1 & 0 & p_n + q_n x_1 \\ p_i + q_i x_1 & f_i + q_i x_2 & p_j + q_j x_1 & f_j + q_j x_2 & p_m + q_m x_1 & f_m + q_m x_2 & p_n + q_n x_1 & f_n + q_n x_2 \end{pmatrix}$$

Матрица $[N]$ описывает геометрию прямоугольного элемента и его местоположение.

Для перехода от деформаций к напряжениям используем обобщенный закон Гука для скелета грунта с учетом поровой воды за счет введения слагаемых $E_{li} / \aleph_i^2$ [3]:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\},$$

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{(1-\nu)E_s}{(1+\nu)(1-2\nu)}+\frac{E_{11}}{\aleph_1^2} & \frac{\nu E_s}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0\\ \frac{\nu E_s}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)E_s}{(1+\nu)(1-2\nu)}+\frac{E_{12}}{\aleph_2^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{E_s}{2(1+\nu)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{pmatrix}.$$

Матрица $[D]$ определяет механические характеристики двухфазного тела.

Перепишем систему уравнений (1) в операторном виде и скалярно умножим уравнение на вектор возможных перемещений $\boldsymbol{v}$, что равносильно применению принципа Лагранжа: сумма работ внешних сил, приложенных в узлах прямоугольного элемента, равна работе внутренних сил в объеме прямоугольного параллелепипеда при единичной толщине в предположении, что напряжения и деформации по толщине остаются постоянными:

$$-\left((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=(\boldsymbol{F},\boldsymbol{v}), \qquad (3)$$

где $\boldsymbol{A}=(G+\lambda)graddiv+G\Delta$ — оператор Ламе, операторы $\boldsymbol{B}\left(b_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2},b_2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)$, $\boldsymbol{C}\left(c_1\frac{\partial}{\partial x_1},c_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ описывают влияние жидкой фазы, в которой действуют избыточные остаточные поровые давления. Отрицательные операторы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ являются положительно определенными в рассматриваемом объеме параллелепипеда [1].

Рассмотрим частный случай, когда вектор возможных перемещений совпадает с вектором искомых перемещений $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$. Тогда можно ввести удельную работу внутренних сил для скелета грунта по формуле [2]:

$$2\left(W^A+W^B\right)=\{\varepsilon\}^T\{\sigma\},\ \{\varepsilon\}^T=\{\delta\}^T[N]^T,$$

индекс T обозначает операцию транспонирования.

$$2W^A=c\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)+2\lambda\varepsilon_1\varepsilon_2+\frac{1}{2}(c-\lambda)\gamma_{12}^2=\varepsilon_1\sigma_1+\varepsilon_2\sigma_2+\gamma_{12}\tau_{12},\ c=\frac{(1-\nu)E_s}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$2W^B=b_1\varepsilon_1^2+b_2\varepsilon_2^2 \qquad W^C=-c_1\varepsilon_1-c_2\varepsilon_2.$$

От удельной работы перейдем к работе внутренних сил, интегрируя по площади прямоугольного элемента и умножая на единичную толщину:

$$\int_S\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}dS=\int_S\{\delta\}^T[N]^T\{\sigma\}dS=\{\delta\}^T\int_S[N]^T[D]\{\varepsilon\}dS=\{\delta\}^T\int_S[N]^T[D][N]dS\{\delta\}.$$

После интегрирования получаем:

$$\{\delta\}^T\int_S[N]^T[D][N]dS\{\delta\}=\{\delta\}^T[k_s]\{\delta\},$$

где $[k_s]$ — матрица жесткости для скелета грунта с учетом поровой воды, зависящая от механических и геометрических характеристик элемента.

Работа внешних сил, приложенных в узлах элемента, равна $\{\delta\}^T\{F\}$. Используя принцип Лагранжа, запишем равенство работ внутренних и внешних сил:

$$\{\delta\}^T[k_s]\{\delta\}+(-\boldsymbol{Cu},\boldsymbol{u}) = \{\delta\}^T\{F\}. \tag{4}$$

Запишем в матричном виде второе слагаемое, которое описывает работу избыточных остаточных поровых давлений на перемещении $\boldsymbol{u}$

$$(-\boldsymbol{Cu},\boldsymbol{u})=\int\limits_S\left(\frac{E_{11}}{\aleph_1 h_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}u_1+\frac{E_{12}}{\aleph_2 h_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}u_2\right)dS=\int\limits_S\left(\frac{E_{11}}{\aleph_1 h_1}\varepsilon_1+\frac{E_{12}}{\aleph_2 h_2}\varepsilon_2\right)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}dS=$$

$$=\int\limits_S\{P_l\}[M]\{\delta\}dS=\int\limits_S\{\varepsilon\}^T[D_l][M]\{\delta\}dS=\int\limits_S\{\delta\}^T[N]^T[D_l][M]\{\delta\}dS=\{\delta\}^T\int\limits_S[N]^T[D_l][M]dS\{\delta\}=$$

$$=\{\delta\}^T[k_l]\{\delta\},$$

$$\{P_l\}^T=\begin{pmatrix}\dfrac{E_{11}}{\aleph_1 h_1}\varepsilon_1\\ \dfrac{E_{12}}{\aleph_2 h_2}\varepsilon_2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{E_{11}}{\aleph_1 h_1} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{E_{12}}{\aleph_2 h_2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{pmatrix}=[D_l]\{\varepsilon\},$$

$$[M]=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\xi_i & 0 & \xi_j & 0 & \xi_m & 0 & \xi_n & 0\\ 0 & \xi_i & 0 & \xi_j & 0 & \xi_m & 0 & \xi_n\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad \xi_i=d_i+f_i x_1+p_i x_2+q_i x_1 x_2.$$

Тогда формула (3) примет вид:

$$\{\delta\}^T[k_s]\{\delta\}+\{\delta\}^T[k_l]\{\delta\} = \{\delta\}^T\{F\}.$$

Сократив на $\{\delta\}^T$, получим

$$([k_s]+[k_l])\{\delta\} = \{F\}.$$

На основании матрицы жесткости $[k_s]+[k_l]$ записана система линейных алгебраических уравнений для определения искомых узловых перемещений $\{\delta\}$, отвечающая случаю равноправия вертикальных и горизонтальных перемещений.

Рассмотрим случай, когда аппроксимация задана в виде преимущества вертикальных перемещений перед горизонтальными:

$$u_1=\alpha_1+\alpha_2 x_1+\alpha_3 x_2+\alpha_4 x_2^2,\ u_2=\alpha_5+\alpha_6 x_1+\alpha_7 x_2+\alpha_8 x_2^2,$$

потому что в задаче Фламана внешние силы приложены к двухфазному полупространству вдоль вертикальной оси.

Построение матрицы жесткости проводится аналогично. Приведем отличительные формулы, для которых используем индекс (*).

$$u_1 = \frac{1}{\Delta}\Big[\big(d_i^* + f_i^* x_1 + p_i^* x_2 + q_i^* x_2^2\big)u_1^i + \big(d_j^* + f_j^* x_1 + p_j^* x_2 + q_j^* x_2^2\big)u_1^j +$$

$$+\big(d_m^* + f_m^* x_1 + p_m^* x_2 + q_m^* x_2^2\big)u_1^m + \big(d_n^* + f_n^* x_1 + p_n^* x_2 + q_n^* x_2^2\big)u_1^n\Big],$$

$$u_2 = \frac{1}{\Delta}\Big[\big(d_i^* + f_i^* x_1 + p_i^* x_2 + q_i^* x_2^2\big)u_2^i + \big(d_j^* + f_j^* x_1 + p_j^* x_2 + q_j^* x_2^2\big)u_2^j +$$

$$+\big(d_m^* + f_m^* x_1 + p_m^* x_2 + q_m^* x_2^2\big)u_2^m + \big(d_n^* + f_n^* x_1 + p_n^* x_2 + q_n^* x_2^2\big)u_2^n\Big],$$

где $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1^i & x_2^i & (x_2^i)^2 \\ 1 & x_1^j & x_2^j & (x_2^j)^2 \\ 1 & x_1^m & x_2^m & (x_2^m)^2 \\ 1 & x_1^n & x_2^n & (x_2^n)^2 \end{vmatrix}, \quad d_i^* = \begin{vmatrix} x_1^j & x_2^j & (x_2^j)^2 \\ x_1^m & x_2^m & (x_2^m)^2 \\ x_1^n & x_2^n & (x_2^n)^2 \end{vmatrix}, \quad f_i^* = -\begin{vmatrix} 1 & x_2^j & (x_2^j)^2 \\ 1 & x_2^m & (x_2^m)^2 \\ 1 & x_2^n & (x_2^n)^2 \end{vmatrix},$$

$$p_i^* = \begin{vmatrix} 1 & x_1^j & (x_2^j)^2 \\ 1 & x_1^m & (x_2^m)^2 \\ 1 & x_1^n & (x_2^n)^2 \end{vmatrix} \qquad q_i^* = -\begin{vmatrix} 1 & x_1^j & x_2^j \\ 1 & x_1^m & x_2^m \\ 1 & x_1^n & x_2^n \end{vmatrix}.$$

Матрица $[N^*]$ будет иметь вид:

$$[N^*] = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} f_i^* & 0 & f_j^* & 0 & f_m^* & 0 & f_n^* & 0 \\ 0 & p_i^*+2q_i^*x_2 & 0 & p_j^*+q_j^*x_2 & 0 & p_m^*+q_m^*x_2 & 0 & p_n^*+q_n^*x_2 \\ p_i^*+2q_i^*x_2 & f_i^* & p_j^*+q_j^*x_2 & f_j^* & p_m^*+q_m^*x_2 & f_m^* & p_n^*+q_n^*x_2 & f_n^* \end{pmatrix}.$$

Отличие от матрицы $[N]$ заключается в том, что в первой строке в элементах f_k отсутствуют слагаемые вида $q_k x_2$. Так как матрицы $[D]$ и $[D_l]$ определяют механические характеристики двухфазного тела, то они остаются неизменными.

Запишем матрицу $[M^*]$:

$$[M^*] = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \xi_i^* & 0 & \xi_j^* & 0 & \xi_m^* & 0 & \xi_n^* & 0 \\ 0 & \xi_i^* & 0 & \xi_j^* & 0 & \xi_m^* & 0 & \xi_n^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \xi_i^* = d_i^* + f_i^* x_1 + p_i^* x_2 + q_i^* (x_2)^2.$$

Таким образом, выражение (2) в матричном виде принимает вид:

$$\big([k_s^*] + [k_1^*]\big)\{\delta\} = \{F\},$$

где $[k_s^*] + [k_1^*]$ является матрицей жесткости.

Используя данную методику, можно задавать более сложную аппроксимацию для перемещений. Если взять все слагаемые в исходном полиноме, то для прямоугольного элемента необходимо добавить еще два узла, например, расположенных по середине горизонтальных сторон.

Преимущество введения приоритета вертикальных перемещений частиц скелета грунта перед горизонтальными можно показать на численных примерах путем их сопоставления с известными из литературы аналитическими решениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мальцева Т. В. Введение функционала для решения обобщенной системы уравнений Ляме // Вестник ТюмГУ. 2003. № 5. С. 196-201.

2. Мальцев Л. Е., Мальцева Т. В., Салтанова Т. В. Анализ обобщенного оператора Ламе и отвечающий оператору конечный элемент // Проблемы прочности и пластичности. 2006. Вып. 68. Нижний Новгород: НГУ. С. 181-189.

3. Мальцев Л. Е., Бай В. Ф., Мальцева Т. В. Кинематическая модель грунта и биоматериалов. СПб.: Стройиздат, 2002. 320 с.

Алексей Викторович ТАТОСОВ —
доцент кафедры математического моделирования

УДК 539.3

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С ПРИМЕСЬЮ ЧАСТИЦ В ПОРИСТОМ КАНАЛЕ

АННОТАЦИЯ. Изучаются особенности движения вязкой смеси в канале с проницаемыми стенками. Проведено численное моделирование процесса подачи проппанта в трещину гидроразрыва.

The forming process of hydraulic fractures is considered. The model of crack development is moved.

Введение

Процесс движения вязкой жидкости с примесью частиц в пористом канале имеет место в технологии проведения гидроразрыва нефтяного пласта. В основополагающих работах [1-3] обоснованы формы и построены математические теории развития трещины. В [4] предложена модель, учитывающая влияние примеси частиц в подаваемой жидкости. Цель данного исследования состоит в численном моделировании процесса подачи проппанта в трещину гидроразрыва.

1. Математическая постановка задачи

Математическая модель развития трещины [4] включает в себя уравнения неразрывности, импульсов, фильтрации и кинематическое соотношение:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}=-\frac{2\beta}{1-\alpha}\frac{kb}{\eta}\frac{\delta}{Y},$$

$$u=-\frac{b}{12\eta}\delta^2\frac{\partial\delta}{\partial x}, \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial Y^2}{\partial t}=\frac{2kb}{\eta}\delta.$$