Используя данную методику, можно задавать более сложную аппроксимацию для перемещений. Если взять все слагаемые в исходном полиноме, то для прямоугольного элемента необходимо добавить еще два узла, например, расположенных по середине горизонтальных сторон.

Преимущество введения приоритета вертикальных перемещений частиц скелета грунта перед горизонтальными можно показать на численных примерах путем их сопоставления с известными из литературы аналитическими решениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мальцева Т. В. Введение функционала для решения обобщенной системы уравнений Ляме // Вестник ТюмГУ. 2003. № 5. С. 196-201.
2. Мальцев Л. Е., Мальцева Т. В., Салтанова Т. В. Анализ обобщенного оператора Ламе и отвечающий оператору конечный элемент // Проблемы прочности и пластичности. 2006. Вып. 68. Нижний Новгород: НГУ. С. 181-189.
3. Мальцев Л. Е., Бай В. Ф., Мальцева Т. В. Кинематическая модель грунта и биоматериалов. СПб.: Стройиздат, 2002. 320 с.

Алексей Викторович ТАТОСОВ —
доцент кафедры математического моделирования

УДК 539.3

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С ПРИМЕСЬЮ ЧАСТИЦ В ПОРИСТОМ КАНАЛЕ

АННОТАЦИЯ. Изучаются особенности движения вязкой смеси в канале с проницаемыми стенками. Проведено численное моделирование процесса подачи проппанта в трещину гидроразрыва.

The forming process of hydraulic fractures is considered. The model of crack development is moved.

Введение

Процесс движения вязкой жидкости с примесью частиц в пористом канале имеет место в технологии проведения гидроразрыва нефтяного пласта. В основополагающих работах [1-3] обоснованы формы и построены математические теории развития трещины. В [4] предложена модель, учитывающая влияние примеси частиц в подаваемой жидкости. Цель данного исследования состоит в численном моделировании процесса подачи проппанта в трещину гидроразрыва.

1. Математическая постановка задачи

Математическая модель развития трещины [4] включает в себя уравнения неразрывности, импульсов, фильтрации и кинематическое соотношение:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}=-\frac{2\beta}{1-\alpha}\frac{kb}{\eta}\frac{\delta}{Y},$$

$$u=-\frac{b}{12\eta}\delta^2\frac{\partial \delta}{\partial x}, \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial Y^2}{\partial t}=\frac{2kb}{\eta}\delta.$$

Здесь: δ — средняя ширина трещины; $\varepsilon = s/h$ — «ширина» свободной области (отношение площади поперечного сечения свободной области к высоте трещины); u — скорость жидкости гидроразрыва в трещине; η — вязкость; k, b — постоянные; α — объемное содержание частиц в закачиваемой смеси; β — пористость грунта (рис. 1).

Система (1.1) дополняется граничным условием на носике трещины

$$x = L(t):\ \delta = 0 \qquad (1.2)$$

и граничным условием на входе в трещину.

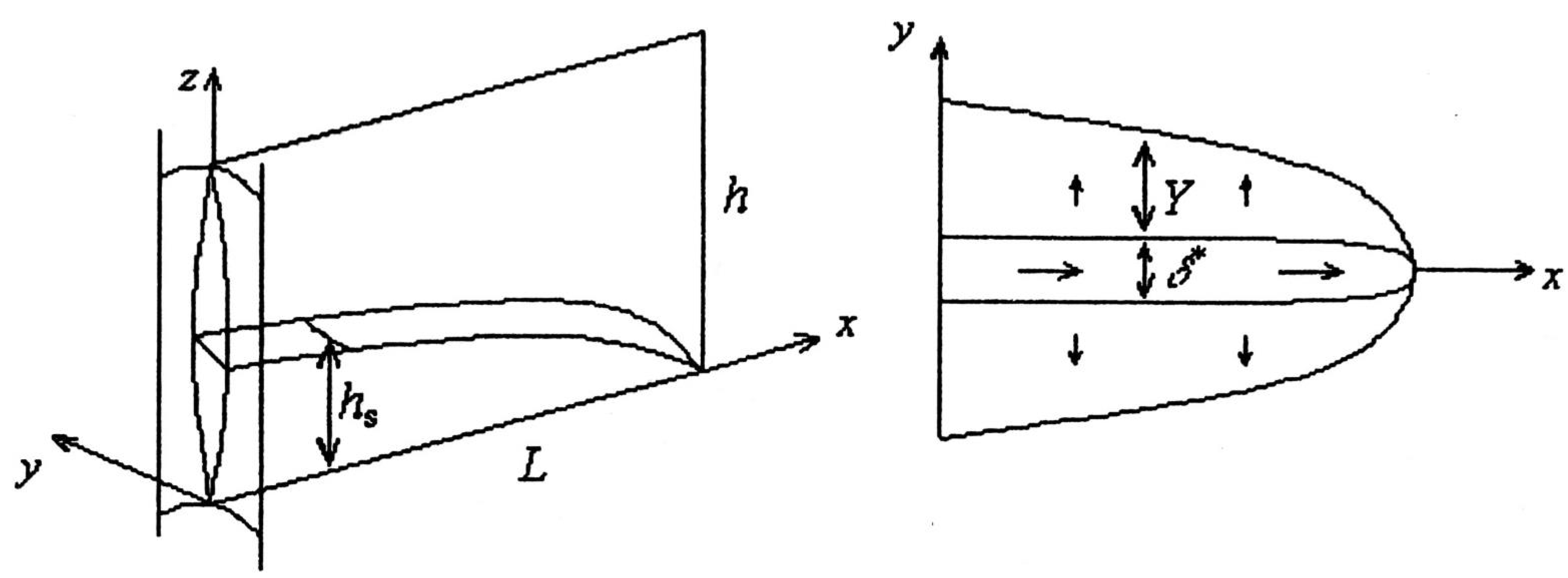

Рис. 1. Общий вид вертикальной трещины и сечение в горизонтальной плоскости; h, L, δ^* — высота, длина и ширина трещины, h_s — высота слоя осевших частиц, Y — глубина зоны пропитки

2. Уравнения движения в безразмерной форме

Безразмерные переменные. Запишем уравнения движения жидкости гидроразрыва с примесью частиц (1.1) в безразмерной форме. В качестве масштаба измерения переменных величин возьмем их характерные значения:

$$\bar{x} = \frac{x}{L^*},\ \bar{t} = \frac{t}{t^*},\ \bar{\delta} = \frac{\delta}{\delta^*},\ \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^*},\ \bar{u} = \frac{u}{u^*},\ \bar{v} = \frac{v_r}{v^*},\ \bar{Y} = \frac{Y}{Y^*}. \qquad (2.1)$$

Учитывая вид уравнений, положим:

$$\delta^* = \varepsilon^* = \frac{P^*}{b},\ u^* = \frac{b}{12\eta}\frac{(\delta^*)^3}{L^*},\ v^* = \frac{k}{\eta}\frac{P^*}{Y^*},\ Y^* = v^* t^*. \qquad (2.2)$$

Здесь: δ^*, L^*, t^*, Y^*, u^*, v^* — характерные значения ширины трещины, ее длины, времени закачки смеси, глубины зоны пропитки, скорости жидкости гидроразрыва в трещине и грунте.

В безразмерных переменных система уравнений движения (1.1) принимает вид:

$$\frac{1}{G}\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \bar{t}} + \bar{\varepsilon}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \bar{x}} = -\frac{1}{B}\frac{\bar{\delta}}{\bar{Y}},$$

$$\bar{u} = -\bar{\delta}^2 \frac{\partial \bar{\delta}}{\partial \bar{x}},$$

$$\frac{1}{G}\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{G}\frac{\partial \bar{\delta}}{\partial \bar{t}} - \frac{\alpha}{B}\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{t}},$$

$$\frac{\partial \bar{Y}^2}{\partial \bar{t}} = 2\bar{\delta}\,; \tag{2.3}$$

где $G = u^* t^* / L^*$, $B = (1-\alpha) u^* \delta^* / (2\beta v^* L^*)$. Сумма обратных величин G и B:

$$\frac{1}{G} + \frac{1}{B} = \frac{(1-\alpha) L^* \delta^* h + 2\beta v^* t^* L^* h}{(1-\alpha) u^* t^* \delta^* h}. \tag{2.4}$$

В выражении (2.4): $(1-\alpha) u^* t^* \delta^* h$ — характерный объем закачанной в трещину жидкости гидроразрыва; $(1-\alpha) L^* \delta^* h$ — характерный объем жидкости гидроразрыва в трещине; $2\beta v^* t^* L^* h$ — характерный объем жидкости гидроразрыва, просочившейся в пласт. Таким образом, сумма величин $1/G$ и $1/B$ порядка единицы.

3. Заполнение проппантом трещины гидроразрыва

Постановка задачи. В [4] представлены автомодельные решения уравнений движения смеси в раскрывающейся трещине гидроразрыва. Граничное условие на входе в трещину соответствует линейному росту давления со временем. Если же, например, давление в начальной точке постоянно, то автомодельное движение с просачиванием жидкости гидроразрыва в грунт и осаждением частиц невозможно. Слой частиц за конечный промежуток времени заполнит полость, по крайней мере, во входном сечении.

Будем считать, что поток смеси вдоль трещины возможен только при условии $\varepsilon > 0$. Если же в некотором сечении $\varepsilon = 0$, а $\delta > 0$, то трещина перекрыта. В таком сечении движение смеси отсутствует, избыточное давление падает до нуля, просачивание приостанавливается. Раскрытая трещина при этом удерживается слоем частиц, находящимся в напряженном состоянии.

Для численного интегрирования выберем безразмерную форму уравнений движения (2.3), которую представим в виде (черта над безразмерными величинами опущена):

$$\frac{1}{G}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{1}{B} v,$$

$$q = -\varepsilon \delta^2 \frac{\partial \delta}{\partial x},$$

$$\frac{1}{G}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{G}\frac{\partial \delta}{\partial t} - \frac{\alpha}{B}\frac{\partial Y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = v;$$

где

$$q = \varepsilon u,\ v = \begin{cases} \dfrac{\delta}{Y}, & \varepsilon > 0 \\ 0, & \varepsilon = 0 \end{cases}.$$

Определим масштаб измерения переменных величин соотношениями (2.2), положив дополнительно:

$$P^* = P_0, \ \frac{1}{G}+\frac{1}{B}=1, \ B=2.$$

Таким образом, характерные значения:

$$L^* = \frac{(1-\alpha)}{4\beta}\sqrt{\frac{k}{6}\frac{P_0^2}{kb^2}}, \ t^* = \frac{(1-\alpha)^2}{4\beta^2}\frac{\eta P_0}{kb^2}, \ \delta^* = \varepsilon^* = \frac{P_0}{b},$$

$$q^* = \frac{2\beta}{(1-\alpha)}\sqrt{\frac{k}{6}\frac{P_0^2}{\eta b}}, \ Y^* = \frac{(1-\alpha)}{2\beta}\frac{P_0}{b}, \ v^* = \frac{2\beta}{(1-\alpha)}\frac{kb}{\eta}.$$

С целью облегчить расчеты несколько уменьшим скорость протекания в грунт незначительной первоначальной пропиткой его жидкостью гидроразрыва, взяв в качестве начальных условий:

$$\delta(x,0)=\varepsilon(x,0)=0, \ Y(x,0)=eps$$

Варьирование eps на интервале [0.001; 0.01] не дает заметных изменений решения.

Граничное условие примем:

$$\delta(0,t)=1$$

Иными словами, избыточное давление на входе в трещину постоянно и равно P_0.

Анализ расчетов. На рис. 2 приведен пример расчета процесса развития трещины и ее заполнения проппантом при $\alpha = 0.1$. Наличие примеси частиц в жидкости гидроразрыва существенно влияет на характер процесса в целом. При $\alpha = 0$ трещина непрерывно растет, замедленно, но неограниченно. В данном же случае ее длина не может превысить некоторого максимального значения L_m. При приближении $L(t)$ к значению L_m происходит закупоривание носика трещины и ее дальнейший рост прекращается. Ввиду продолжающегося просачивания жидкости гидроразрыва в грунт свободное пространство сокращается и за конечный промежуток времени полностью исчезает.

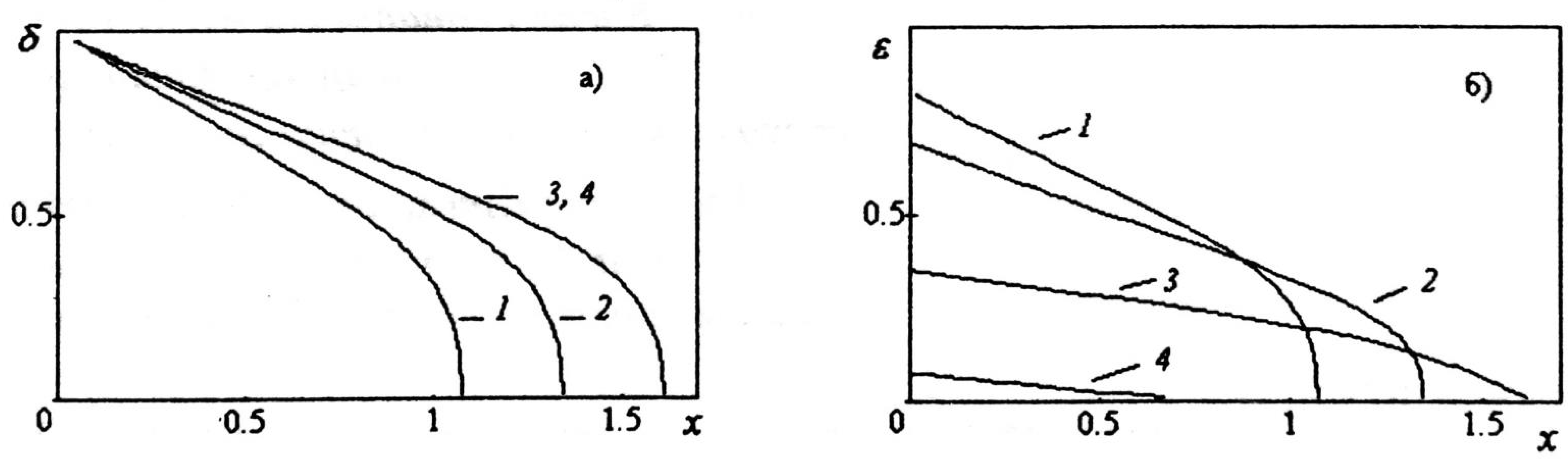

Рис. 2. Распределения безразмерных величин по длине трещины: а) $\delta(x)$, б) $\varepsilon(x)$; кривые *1, 2, 3, 4* — соответствуют моментам времени t = 1.6, 4, 20, 40

На рис. 3 показано влияние объемного содержания частиц в смеси на динамику раскрытия трещины. Представлены результаты расчетов в виде зависимостей L от времени t для $\alpha =$ 0.05; 0.1; 0.2. Изменение объемного содержания частиц в указанном интервале не меняет характера процесса. Увеличение α

приводит к уменьшению максимальной длины трещины и времени ее заполнения проппантом. Значительное сокращение моментов достижения предельной длины и времени заполнения связано с непостоянством скорости протекания в грунт жидкости гидроразрыва.

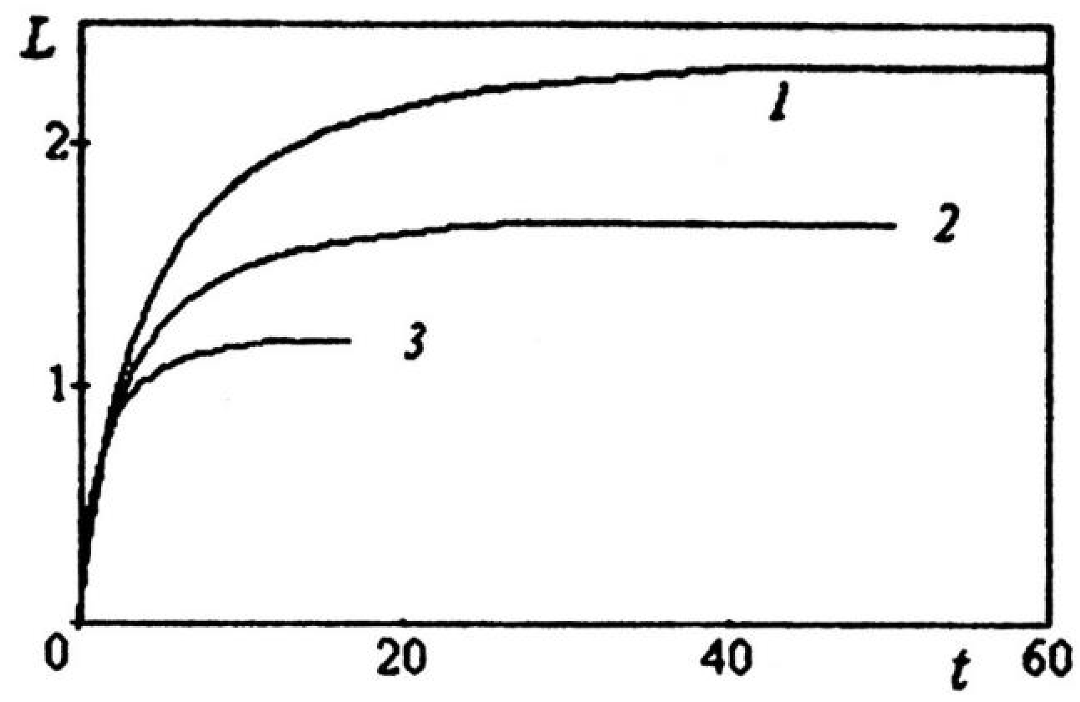

Рис. 3. Зависимость безразмерной длины трещины L от безразмерного времени t; кривые *1*, *2*, *3* — соответствуют объемному содержанию частиц в смеси $\alpha = 0.05$, 0.1, 0.2; конечные точки кривых *2* и *3* показывают момент заполнения проппантом всей трещины, для кривой 1 он равен ≈ 200

Заключение. В результате численного исследования процесса подачи проппанта в трещину гидроразрыва выявлены следующие особенности. Условие постоянства давления на входе ограничивает рост трещины. Раскрытая трещина целиком заполняется проппантом, начиная с ее носика. Величина объемного содержания частиц в закачиваемой смеси существенно влияет на время заполнения трещины и менее существенно — на ее конечную форму.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Perkins, T. K., Kern, L. R. Widths of hydraulic fractures // J. Petrol. Technol., Paper SPE 89. 1961. 13, № 9. 937-949.

2. Nordgren, R. P. Propagation of a vertical hydraulic fracture // SPE Journal. Paper 7834. 1972. 12, № 8. 306-314.

3. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР, ОТН. 1955. С. 3-41.

4. Татосов А. В. Заполнение проппантом трещины гидроразрыва // Вестник ТюмГУ. 2004. № 4. С. 256-261.

Елена Геннадьевна АЛМАЗОВА —
старший преподаватель
Сургутского государственного университета

Виктория Степановна МИКШИНА —
доцент Сургутского государственного
университета, кандидат технических наук

УДК 519.21(075.8)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОКАЗАНИЯ МЕДИЦИНСКОЙ ПОМОЩИ

АННОТАЦИЯ. В статье представлены результаты математического моделирования процесса оказания медицинской помощи в амбулаторно-поликлиническом учреждении на основе марковской цепи. В качестве исходных данных использованы экспертные оценки. Показано влияние состояния элементов системы на результативность лечебного процесса.