компоненты необходимых курсов в формате, поддерживаемом его устройством, с минимальными затратами на трафик.

При реализации данной модели возникает определенное количество проблем: прежде всего это проблема оформления учебного материала в электронном виде, а также проблема формирования различных представлений учебных объектов для существующих в системе каналов связи: материал по некоторым дисциплинам сложно доступным образом передать с использованием электронных средств, особенно в случае ограничения возможности использования мультимедиа-технологий. Затем встает проблема разработки алгоритма выбора представления учебного объекта для доставки пользователю (логика управляющего модуля); выбор должен производиться с учетом курса, в котором задействован данный объект, используемого канала связи и объективной оценки емкости данного представления учебного объекта. Для решения данной проблемы лучшим вариантом действий является предварительное построение математической модели системы и ее оптимизация с дальнейшим использованием результатов при реализации.

Ряд проблем включает и техническая сторона реализации: проблема развертывания сервера системы дистанционного образования и разработки серверного программного обеспечения; проблема разработки набора клиентских приложений для различных платформ; проблема подключения сервера к различным каналам связи. Данные проблемы могут быть решены различным образом в зависимости от доступных программно-аппаратных ресурсов и предпочтений разработчика.

Таким образом, первым шагом на пути к реализации подобной системы является создание упомянутой выше математической модели системы, которая позволит более ясно увидеть картину работы с образовательными ресурсами. Оптимизированная математическая модель даст возможность перейти непосредственно к проектированию алгоритмов, а в дальнейшем — к написанию программного кода серверной и клиентской частей системы и развертыванию аппаратной платформы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бородин С. О., Вьюгов Д. С. Мобильные технологии в электронном обучении: http://main.tusur.ru

2. Hansen, T. E. Mobile Technology in Higher Education: http://idi.ntnu.no/grupper/su/su-diploma-2002/Hansen-MobTech.pdf

Василий Александрович БАРИНОВ —
доцент кафедры математического моделирования,
кандидат физико-математических наук

Нина Николаевна БУТАКОВА —
доцент кафедры математического моделирования,
кандидат физико-математических наук

УДК 532.59:532.13

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ НА СЛОЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ОГРАНИЧЕННОЙ ГЛУБИНЫ

АННОТАЦИЯ. Приведено точное аналитическое решение линейной задачи о распространении волн по свободной поверхности слоя вязкой жидкости с учетом условий прилипания на дне.

The exact analytical decision of a linear problem on distribution of waves on a free surface of a layer of a viscous liquid in view of conditions of sticking at the bottom is resulted.

Целью работы является аналитическое решение линейной задачи о волнах на слое вязкой жидкости конечной глубины. Изучение данного вопроса имеет давнюю историю (например, [1]). Но математическая сложность уравнений и граничных условий не позволяла в достаточной мере исследовать этот процесс. Большинство известных работ по этой теме посвящено решению как линейных (например, [1, 2]), так и нелинейных (например, [3, 4]) задач на бесконечно глубоких слоях жидкости. Неограниченность области в данном случае сильно упрощает задачу, так как отпадает необходимость удовлетворения граничным условиям прилипания на поверхности дна. Линейная задача для слоя жидкости конечной глубины рассматривалась в работах [5, 6]. В статье [5] решение получено в виде несобственных интегралов, которые не дают явных выражений для характеристик волнового движения. В работе [6] такие выражения получены, но приведенная там система алгебраических уравнений для определения фазовой скорости и декремента затухания волны имеет только тривиальное решение.

Рассматривается слой вязкой жидкости, ограниченный снизу твердым непроницаемым дном $z^* = -l^*$, где l^* — глубина слоя жидкости, а сверху — свободной поверхностью $z^* = \xi^*(t^*, x^*)$. Движение жидкости плоскопараллельное в плоскости x^*z^*. Оси x^* и z^* направлены так, что ось x^* совпадает со свободной поверхностью в ее невозмущенном состоянии, а ось z^* направлена вертикально вверх.

В области, занятой жидкостью, выполняются уравнение неразрывности и уравнения движения [7]:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}^* = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} = \mu \Delta \mathbf{v}^* - \nabla P + \rho \mathbf{g},$$

где $\mathbf{v}^* = \{v_x^*, v_z^*\}$ — вектор скорости, ρ — плотность, P — давление, μ — динамический коэффициент вязкости.

На дне имеет место условие прилипания

$$v_x^* = 0, \quad v_z^* = 0, \quad z^* = -l^*.$$

На свободной поверхности $z^* = \xi^*(t^*, x^*)$ задаются кинематическое и динамическое условия [7]. Первое состоит в том, что частица жидкости не сходит со свободной поверхности

$$v_z^* = \frac{\partial \xi^*}{\partial t^*} + v_x^* \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*}.$$

Динамическое условие в случае, когда к свободной поверхности приложено только постоянное атмосферное давление P_a, имеет вид

$$-P + 2\mu \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} = -P_a, \quad \frac{\partial v_x^*}{\partial z^*} + \frac{\partial v_z^*}{\partial x^*} = 0.$$

По свободной поверхности жидкости $z^* = \xi^*(t^*, x^*)$ в положительном направлении оси x^* распространяется волна длиной λ и фазовой скоростью c. Длина волны много больше ее высоты $\lambda >> \xi^*_{max}$. В этом случае все волновые возмущения являются величинами одного порядка малости $\varepsilon = k\xi^*_{max}$ ($k = 2\pi/\lambda$ — волновое число).

Рассматривается линейный вариант задачи (отброшены слагаемые порядка $o(\varepsilon)$).

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\Delta v_x, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta\Delta v_z,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + v_x\frac{\partial \xi}{\partial x} = v_z, \quad -p + \nu\xi + 2\eta\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0, \quad z = \xi(t, x),$$

$$v_x = 0, \quad v_z = 0, \quad z = -l.$$

Здесь использованы безразмерные переменные и величины

$$v_x = v_x^*/\varepsilon c, \quad v_z = v_z^*/\varepsilon c, \quad p = p^*/\varepsilon\rho c^2, \quad p^* = P + \rho g z^* - P_a,$$

$$\xi = k\xi^*/\varepsilon, \quad z = kz^*, \quad x = kx^*, \quad t = kct^*, \quad l = kl^*, \quad \nu = g/kc^2, \quad \eta = \mu k/c\rho.$$

Данная краевая задача сводится к задаче для определения v_z:

$$\Delta\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} - \eta\Delta v_z\right) = 0,$$

$$v_z = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad z = -l,$$

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 v_z}{\partial t^2 \partial z} - 3\eta\frac{\partial^4 v_z}{\partial t \partial x^2 \partial z} - \frac{\partial^4 v_z}{\partial t \partial z^3} - \eta\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = 0, \quad z = 0.$$

Решение задачи должно удовлетворять ряду требований. Наличие вязкого трения в жидкости обуславливает диссипативные процессы — затухание волнового движения. В отсутствие сил внутреннего трения решение задачи должно переходить в известные решения для волнового движения идеальной жидкости [8]. С учетом этого,

$$v_z = e^{-\beta t}(A(z)\sin(x - t) + B(z)\cos(x - t)),$$

$$A(z) = C_1 e^z + C_2 e^{-z} + e^{az}(C_3\cos bz + C_4\sin bz) + e^{-az}(C_5\cos bz + C_6\sin bz),$$

$$B(z) = D_1 e^z + D_2 e^{-z} + e^{az}(C_4\cos bz - C_3\sin bz) + e^{-az}(-C_6\cos bz + C_5\sin bz).$$

$$a = \sqrt{\frac{\eta - \beta + \sqrt{1 + (\beta - \eta)^2}}{2\eta}}, \quad b = \sqrt{\frac{\beta - \eta + \sqrt{1 + (\beta - \eta)^2}}{2\eta}}.$$

Здесь $\beta = \beta^*/kc$ — безразмерный декремент затухания волны (β^* — размерный декремент затухания). Коэффициенты C_i и D_i определяются выражениями

$$D_2 = (\delta_1 D_1 + \delta_2 C_1)/\delta, \quad C_2 = (-\delta_2 D_1 + \delta_1 C_1)/\delta, \quad C_3 = (\delta_3 D_1 + \delta_4 C_1)/\delta,$$

$$C_4 = (\delta_4 D_1 - \delta_3 C_1)/\delta,\ C_5 = (\delta_5 D_1 + \delta_6 C_1)/\delta,\ C_6 = (-\delta_6 D_1 + \delta_5 C_1)/\delta,$$

$$\delta = 8\eta(\mathrm{N}\,\mathrm{sh}\,al - (a+\mathrm{Mb})\mathrm{ch}\,al)e^l \sin bl + 8\eta((\mathrm{b} - \mathrm{M}a)\mathrm{sh}\,al + b\mathrm{N}\,\mathrm{ch}\,al)e^l \cos bl +$$
$$+ e^{2l}(\mathrm{M}^2+1)((\mathrm{N}-1)\cos 2bl - 2\mathrm{b}\sin 2bl + (\mathrm{N}+1)\mathrm{ch}\,2al - 2a\,\mathrm{sh}\,2al) + 8\eta^2\mathrm{N},$$

$$\delta_1 = 16\eta((a+\mathrm{Mb})\mathrm{sh}\,l\,\mathrm{ch}\,al - \mathrm{N}\,\mathrm{ch}\,l\,\mathrm{sh}\,al)\sin bl + 16\eta((\mathrm{M}a - \mathrm{b})\mathrm{sh}\,l\,\mathrm{sh}\,al -$$
$$- \mathrm{MN}\,\mathrm{ch}\,l\,\mathrm{ch}\,al)\cos bl - 2(\mathrm{M}^2+1)((\mathrm{N}+1)\cos 2bl - (\mathrm{N}-1)\mathrm{ch}\,2al) - 16\eta^2\mathrm{N},$$

$$\delta_2 = 16\eta((\mathrm{M}a - \mathrm{b})\mathrm{ch}\,l\,\mathrm{ch}\,al - \mathrm{MN}\,\mathrm{sh}\,l\,\mathrm{sh}\,al)\sin bl + 16\eta(\mathrm{N}\,\mathrm{sh}\,l\,\mathrm{ch}\,al -$$
$$- (\mathrm{Mb}+a)\mathrm{ch}\,l\,\mathrm{sh}\,al)\cos bl + 4(\mathrm{M}^2+1)(a\sin 2bl - \mathrm{b}\,\mathrm{sh}\,2al),$$

$$\delta_3 = 4(-(\mathrm{M}^2+1+4a\eta^2)\mathrm{ch}\,l\,\mathrm{ch}\,al - (\mathrm{M}^2+1-4\eta^2\mathrm{N})\mathrm{sh}\,l\,\mathrm{ch}\,al +$$
$$+ a(\mathrm{M}^2+1-4\eta^2)\mathrm{ch}\,l\,\mathrm{sh}\,al + ((\mathrm{M}^2+1)a + 4\eta^2\mathrm{N})\mathrm{sh}\,l\,\mathrm{sh}\,al)\sin bl +$$
$$+ 4(\mathrm{b}(\mathrm{M}^2+1+4\eta^2)\mathrm{ch}\,l\,\mathrm{ch}\,al + \mathrm{b}(\mathrm{M}^2+1)\mathrm{sh}\,l\,\mathrm{ch}\,al + 4\mathrm{b}\eta^2\,\mathrm{ch}\,l\,\mathrm{sh}\,al)\cos bl +$$
$$+ 2\eta((\mathrm{M}(\mathrm{N}-1) - 2\mathrm{b})e^{2l} - \mathrm{M}(\mathrm{N}+1+2a))\sin 2bl + 2\eta((\mathrm{N}-1+2\mathrm{bM})e^{2l} -$$
$$- (\mathrm{N}+1+2a))\cos 2bl + 2\eta(\mathrm{N}+1-2a)e^{2l}(\mathrm{ch}\,2al + \mathrm{sh}\,2al) + 8\eta(a+\mathrm{Mb}),$$

$$\delta_4 = 4\mathrm{b}(-4\eta^2\,\mathrm{ch}\,l\,\mathrm{ch}\,al + (\mathrm{M}^2+1-4\eta^2)\mathrm{ch}\,l\,\mathrm{sh}\,al + (\mathrm{M}^2+1)\mathrm{sh}\,l\,\mathrm{sh}\,al)\sin bl +$$
$$+ 4(a(\mathrm{M}^2+1+4\eta^2)\mathrm{ch}\,l\,\mathrm{ch}\,al + (4\eta^2\mathrm{N} - a(\mathrm{M}^2+1))\mathrm{sh}\,l\,\mathrm{ch}\,al +$$
$$+ (\mathrm{M}^2+1-4\eta^2 a)\mathrm{ch}\,l\,\mathrm{sh}\,al + (\mathrm{M}^2+1+4\eta^2\mathrm{N})\mathrm{sh}\,l\,\mathrm{sh}\,al)\cos bl +$$
$$+ 2\eta(\mathrm{M}^2+1+2a - (\mathrm{M}^2-1+2\mathrm{bN})e^{2l})\sin 2bl + 2\eta((\mathrm{M}(\mathrm{N}-1) - 2\mathrm{b})e^{2l} -$$
$$- \mathrm{M}(\mathrm{M}^2+1+2a))\cos 2bl + 2\eta\mathrm{M}(\mathrm{N}+1-2a)e^{2l}(\mathrm{ch}\,2al + \mathrm{sh}\,2al) + 8\eta(\mathrm{b} - \mathrm{M}a),$$

$$\delta_5 = 4((\mathrm{M}^2+1-4a\eta^2)\mathrm{ch}\,l\,\mathrm{ch}\,al + (\mathrm{M}^2+1-4\eta^2\mathrm{N})\mathrm{sh}\,l\,\mathrm{ch}\,al -$$
$$- a(\mathrm{M}^2+1-4\eta^2)\mathrm{ch}\,l\,\mathrm{sh}\,al - (a(\mathrm{M}^2+1) - 4\eta^2\mathrm{N})\mathrm{sh}\,l\,\mathrm{sh}\,al)\sin bl +$$
$$+ 4\mathrm{b}(4\eta^2\,\mathrm{ch}\,l\,\mathrm{sh}\,al - (\mathrm{M}^2+1)\mathrm{sh}\,l\,\mathrm{ch}\,al - (\mathrm{M}^2+1)\mathrm{ch}\,l\,\mathrm{ch}\,al)\cos bl +$$
$$+ 2\eta(\mathrm{M}(\mathrm{N}+1-2a) + (\mathrm{M}(\mathrm{N}-1) - 2\mathrm{b})e^{2l})\sin 2bl + 2\eta((\mathrm{N}-1-2\mathrm{bM})e^{2l} -$$
$$- (\mathrm{N}+1-2a))\cos 2bl + 2\eta(\mathrm{N}+1+2a)e^{2l}(\mathrm{ch}\,2al - \mathrm{sh}\,2al) - 8\eta(a+\mathrm{Mb}),$$

$$\delta_6 = 4\mathrm{b}(-4\eta^2\,\mathrm{ch}\,l\,\mathrm{ch}\,al - (\mathrm{M}^2+1-4\eta^2)\mathrm{ch}\,l\,\mathrm{sh}\,al - (\mathrm{M}^2+1)\mathrm{sh}\,l\,\mathrm{sh}\,al)\sin bl +$$
$$+ 4(a(\mathrm{M}^2+1+4\eta^2)\mathrm{ch}\,l\,\mathrm{ch}\,al + (4\eta^2\mathrm{N} + a(\mathrm{M}^2+1))\mathrm{sh}\,l\,\mathrm{ch}\,al -$$
$$- (\mathrm{M}^2+1+4\eta^2 a)\mathrm{ch}\,l\,\mathrm{sh}\,al - (\mathrm{M}^2+1+4\eta^2\mathrm{N})\mathrm{sh}\,l\,\mathrm{sh}\,al)\cos bl +$$
$$+ 2\eta((\mathrm{M}^2-1-2\mathrm{bM})e^{2l} - (\mathrm{M}^2+1-2a))\sin 2bl + 2\eta((\mathrm{M}(\mathrm{N}+1) + 2\mathrm{b})e^{2l} -$$
$$- \mathrm{M}(\mathrm{M}^2+1-2a))\cos 2bl - 2\eta\mathrm{M}(\mathrm{N}+1+2a)e^{2l}(\mathrm{ch}\,2al - \mathrm{sh}\,2al) - 8\eta(\mathrm{b} - \mathrm{M}a),$$

$$\mathrm{M} = \beta - 2\eta,\ \mathrm{N} = a^2 + \mathrm{b}^2 = \sqrt{(\beta-\eta)^2+1}/\eta.$$

Коэффициенты C_1 и D_1 остаются неопределенными и могут быть найдены из дополнительных начальных условий.

С использованием полученного решения из уравнений движения определяются горизонтальная составляющая скорости v_x и возмущение давления p

$$v_x = e^{-\beta t}\Big[\Big(C_1 e^z - C_2 e^{-z} + e^{az}((aC_3 + bC_4)\cos(bz) + (aC_4 - bC_3)\sin(bz) +$$
$$+ e^{-az}((bC_6 - aC_5)\cos(bz) + (-bC_5 - aC_6)\sin(bz)\Big)\cos(x-t) +$$
$$+ \Big(D_1 e^z - D_2 e^{-z} + e^{az}((aC_4 - bC_3)\cos(bz) + (-aC_3 - bC_4)\sin(bz) +$$
$$+ e^{-az}((bC_5 + aC_6)\cos(bz) + (bC_6 - aC_5)\sin(bz)\Big)\sin(x-t)\Big]$$

$$p = e^{-\beta t}\Big[\Big((C_1 + \beta D_1)e^z - (C_2 + \beta D_2)e^{-z}\Big)\cos(x-t) +$$
$$+ \Big((\beta C_1 - D_1)e^z + (\beta C_2 - D_2)e^{-z}\Big)\sin(x-t)\Big]$$

а из кинематического условия — уравнение свободной поверхности

$$\xi = e^{-\beta t}\Big[\Big(C_1 + C_2 + C_3 + C_5 + \beta(C_6 - C_4 - D_1 - D_2)\Big)\cos(x-t) +$$
$$+ \Big(C_6 - C_4 - D_1 - D_2 - \beta(C_1 + C_2 + C_3 + C_5)\Big)\sin(x-t)\Big]$$

Из последнего граничного условия для v_z следует

$$\nu(\delta + \delta_1 + \delta_3 + \delta_5) + \big(\beta^2 - 2\beta\eta - 1\big)(\delta - \delta_1) - 2(\beta - \eta)\delta_2 +$$
$$+ 2\eta(\beta a + b)(\delta_5 - \delta_3) + 2\eta(\beta b - a)(\delta_4 - \delta_6) = 0,$$

$$\nu(\delta_2 + \delta_4 + \delta_6) - 2(\beta - \eta)(\delta - \delta_1) - \big(\beta^2 - 2\beta\eta - 1\big)\delta_2 +$$
$$+ 2\eta(\beta b - a)(\delta_5 - \delta_3) - 2\eta(\beta a + b)(\delta_4 - \delta_6) = 0.$$

Эти равенства являются дисперсионными соотношениями для неизвестных декремента затухания β^* и фазовой скорости волны c и позволяют определить их значения для различных сред при варьировании параметров l, λ, η.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ламб Г. Гидродинамика. Л.: Гостехиздат, 1947. 987 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 735 с.
3. Iooss G., Rossi M. Nonlinear evolution of the two-dimensionnal Rayleigh-Taylor flow // Exp. J. Mech. B.fluids. 1989. Vol. 8. № 1. P. 1-22.
4. Белоножко Д. Ф., Григорьев А. И. Нелинейные движения вязкой жидкости со свободной поверхностью // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 2. С. 184-192.
5. Никитин А. К., Потетюнко Э. Н. К пространственной задаче Коши-Пуассона о волнах на поверхности вязкой жидкости конечной глубины// Доклады АН СССР. 1967. Т. 147. № 1. С. 50-52.
6. Алешков Ю. З., Разуваева А. В. Волновые движения вязкой жидкости // Вестн. С.-Петербург. ун-та. 1996. Сер. 1. Вып. 2. № 8. С. 50-56.
7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика: В 2 т. М.: Гостехиздат, 1955.
8. Алешков Ю. З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 196 с.