

8. Волькенштейн М. В., Грибов Л. А., Ельяшевич М. А., Степанов Б. И. Колебания молекул. М.: Наука, 1972. 700 с.
9. Вильсон Е., Дешиус Дж., Кросс П. Теория колебательных спектров молекул. М.: ИЛ, 1960. с.
10. Быков А. Д., Макушкин Ю. С., Улеников О. Н. Изотопозамещение в многоатомных молекулах. Новосибирск: Наука, 1985. 160 с.
11. Watson, J.K.G. // J. Mol. Spectrosc. 2004. V. 223. № 1. P. 39-50.
12. Лободенко Е. И., Быков А. Д. // Оптика атмосферы и океана. 2004. Т. 17. № 11. С. 944-947.
13. Tashkun, S. A., Perevalov, V. I., Teffo, J.-L., Rothman, L.S., Tyuterev, V.I.G. // JQSRT. 1998. V. 60. P. 785-801.
14. Perevalov, V. I., Lobodenko, E. I., Lyulin, O. M., Teffo, J.-L. // J. Mol. Spectrosc. 1995. V. 171. P. 435-452.
15. Teffo, J.-L., Lyulin O. M., Perevalov V. I., Lobodenko E. I. // J. Mol. Spectrosc. 1998. V. 187. P. 28-41.

**Игорь Григорьевич ТЕЛЕГИН** —  
старший научный сотрудник  
лаборатории гидродинамических методов ПНП  
Тюменского филиала КогалымНИПИнефть,  
кандидат физико-математических наук, доцент

**Олег Борисович БОЧАРОВ** —  
старший научный сотрудник Института  
гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,  
кандидат физико-математических наук, доцент

УДК 532.546: 949.8

## **СРАВНЕНИЕ ДВУХ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ\***

**АННОТАЦИЯ.** В работе численно исследуются одномерные задачи вытеснения нефти водой в неизотермических условиях по моделям Маскета-Леверетта и Баклея-Леверетта. Показывается, что для обеих моделей за счет температурных эффектов имеет место немонотонное поведение решения для водонасыщенности, однако причины, вызывающие такое поведение решения, имеют разную природу.

*The numerical one dimensional solutions of Muskat-Leverett and Buckley-Leverett models are compared under the non-isothermal conditions. It is shown that in both cases non-monotony of water saturation take place due to temperature effects, but the reasons of such a behavior of solutions for each model have different nature.*

---

\* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке СО РАН (интеграционный проект № 117)

### Введение

Для описания процессов вытеснения несмачивающей жидкости смачивающей в изотермическом случае наиболее часто используется модель Маскета-Левретта (МЛ-модель). В работе [1] была предложена более общая модель неизотермической фильтрации (МЛТ-модель), для которой там удалось доказать разрешимость основной краевой задачи. Модель изучалась численно и аналитически в работах [2-4]. В данной работе МЛТ-модель сравнивается с температурной моделью Баклея-Левретта (БЛТ-модель), не учитывающей капиллярные силы. Анализируются причины, вызывающие немонотонность водонасыщенности в обеих моделях.

### Уравнения моделей

В однородной изотропной пористой среде без учета гравитации одномерная модель неизотермической двухфазной фильтрации Маскета-Левретта (МЛТ) имеет вид [1]:

$$\begin{cases} ms_t = (k_0 a_0 (p_{cs} s_x + p_{c\theta} \theta_x) - Q(t)b)_x; \\ \theta_t = (\lambda \theta_x - Q(t)\theta)_x, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x \in [0, L]$  — пространственная переменная,  $L$  — расстояние от нагнетательной скважины до эксплуатационной,  $t$  — время,  $s = (s_1 - S_1^0)/(1 - S_1^0 - S_2^0)$  — динамическая насыщенность смачивающей фазы (воды),  $s_1$  — истинная насыщенность смачивающей фазы,  $(S_1^0, S_2^0) = const$  — остаточные водо- и нефтенасыщенности,  $\theta \in (\theta_{\min}, \theta_{\max})$  — температура,  $m = m_0(1 - S_1^0 - S_2^0)$ ,  $m_0$  — пористость породы,  $k_0 = const$  — абсолютная проницаемость коллектора,  $a_0(s, \theta) = -k_1 k_2 / (\mu_2(k_1 + \mu k_2))$ ,  $p_c(s, \theta) = (m_0 / k_0)^{1/2} \gamma j$  — капиллярное давление,  $\gamma(\theta)$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $j(s)$  — функция Левретта,  $b(s, \theta) = k_1 / (k_1 + \mu k_2)$  — коэффициент подвижности вытесняющей фазы,  $k_i(s)$  — относительные фазовые проницаемости,  $\mu = \mu_1 / \mu_2$ ,  $\mu_i(\theta)$  — вязкости фаз,

$\lambda(s, \theta) = \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i \lambda_i}{\rho_i c_{pi}}$  — коэффициент температуропроводности смеси,  $\alpha_1 = m_0 s_1$ ,

$\alpha_2 = m_0(1 - s_1)$ ,  $\alpha_3 = 1 - m_0$  (индекс  $i=1$  соответствует воде,  $i=2$  — нефти,  $i=3$  — пористой среде),  $\lambda_i$  — коэффициенты теплопроводности,  $\rho_i$  — плотности,  $c_{pi}$  — теплоемкость фазы при постоянном давлении,  $Q(t)$  — общий расход смеси.

Свойства функциональных параметров модели описаны в [1]. Отметим  $k_1(0) = k_2(1) = 0$ , что приводит к вырождению типа уравнения для водонасыщенности. Уравнение для  $s(x, t)$  системы (1), как следует из определения функциональных параметров, можно переписать также в эквивалентном представлении:

$$ms_t = (k_0 a_0 p_{cx} - Q(t)b)_x. \quad (2)$$

Положив  $Q(t) = Q_0$ , введем безразмерные переменные:  $\bar{x} = x/L$ ,  $\bar{t} = Q_0 t / (mL)$ ,  $\bar{\theta} = (\theta - \theta_{\min}) / (\theta_{\max} - \theta_{\min})$ ,  $\bar{\lambda} = \lambda / \lambda_0$  (далее черта над безразмерными переменными опускается). В силу доказанного в [1] принципа максимума  $\theta_{\min}$  и  $\theta_{\max}$  достигаются на границах области при  $x=1$  и  $x=0$ . С учетом представления (2) система уравнений (1) в новых обозначениях запишется в виде:

$$\begin{cases} s_t = (\varepsilon a p_x - b)_x, \\ \theta_t = (\varepsilon_\theta \lambda \theta_x - m \theta)_x, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\varepsilon = \gamma_0 (m_0 / k_0)^{1/2} / (Q_0 L \mu_0)$  — капиллярное число,  $a(s, \theta) = -k_1 k_2 / (\mu_2^* (k_1 + \mu k_2))$ ,  $p(s, \theta) = j \gamma^*$ ,  $\varepsilon_\theta = m \lambda_0 / (Q_0 L)$ ,  $\gamma^* = \gamma / \gamma_0$ ,  $\mu = \mu_1^* / \mu_2^*$ ,  $\mu_2^* = \mu_2 / \mu_0$ ,  $\mu_1^* = \mu_1 / \mu_0$ ,  $\gamma_0 = \max_{\theta \in [0,1]} (\gamma(\theta))$ ,  $\mu_0 = \max_{\theta \in [0,1]} (\mu_2(\theta))$ ,  $\lambda_0 = \lambda(0,0)$ . Звездочки у  $\mu_1^*$ ,  $\mu_2^*$ ,  $\gamma^*$  в дальнейшем опускаются. При  $\varepsilon = 0$  получим более простую неизотермическую модель Баклея-Левверетта (БЛТ).

Для системы (3) будем изучать следующую начально-краевую задачу:

$$s|_{x=0} = 1, \theta|_{x=0} = \theta_1; \varepsilon_\theta \lambda \theta_x|_{x=1} = 0, a p_x|_{x=1} = 0; s|_{t=0} = s_0(x), \theta|_{t=0} = \theta_0(x), x \in [0,1]. \quad (4)$$

### Разностная задача

При описании численного алгоритма используются обозначения, принятые в [5]. Введем сетку с распределенными узлами  $\bar{\omega}_{n\tau} = \{x_i = ih, t_n = n\tau; i = \overline{0, N}, n = 0, 1, 2, \dots\}$ , где  $h$  — шаг по пространственной координате,  $\tau = rh^2$  — шаг по временной переменной.

Уравнения для температуры и водонасыщенности аппроксимируем с помощью неявных разностных схем первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\tau} = \frac{\varepsilon_\theta}{h} (\lambda_{i+1/2}^n \theta_{x,i}^{n+1} - \lambda_{i-1/2}^n \theta_{\bar{x},i}^{n+1}) - \theta_{x,i}^{n+1} + \xi \theta_{x\bar{x},i}^n, \theta_i^0 = \theta_0, i = \overline{1, N}; \theta_0^n = \theta_0^{n+1} = \theta_1; \\ \frac{\theta_N^{n+1} - \theta_N^n}{\tau} = -\frac{2\varepsilon_\theta}{h} \lambda_{N-1/2}^n \theta_{\bar{x},N}^{n+1} - m \theta_{\bar{x},N}^{n+1}, n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4)$$

где  $\lambda_{i+1/2}^n = \lambda((s_i^n + s_{i+1}^n)/2, (\theta_i^n + \theta_{i+1}^n)/2)$ .

$$\begin{cases} \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} = \frac{\varepsilon}{h} (a_{i+1/2}^n p_{x,i}^{n+1} - a_{i-1/2}^n p_{\bar{x},i}^{n+1}) - b_{\bar{x},i}^{n+1}, s_i^0 = s_0(x_i), i = \overline{1, N}; s_0^n = s_0^{n+1} = 1; \\ \frac{s_N^{n+1} - s_N^n}{\tau} = -\frac{2\varepsilon}{h} a_{N-1/2}^n p_{\bar{x},N}^{n+1} - b_{\bar{x},N}^{n+1}, n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5)$$

где  $a_{i+1/2}^n = a((s_i^n + s_{i+1}^n)/2, (\theta_i^{n+1} + \theta_{i+1}^{n+1})/2)$ ,  $p_i^{n+1}$  линеаризовывалось в виде  $p_i^{n+1} = p_i^n + p_{s_i}^n (s_i^{n+1} - s_i^n)$ , аналогичная операция проводилась и с  $b_i^{n+1}$ . Системы (4), (5) решались методом правой прогонки. С целью улучшения аппроксимации уравнения для температуры конвективное слагаемое аппроксимируется центральной разностью, при этом в связи с малостью коэффициента температуропроводности в разностное уравнение добавлена искусственная вязкость с коэффициентом  $\xi = mh/4,5$ .

В численных расчетах использовался набор параметров из [4]:

$$k_1 = s^2, \quad k_2 = (1-s)^2, \quad j = (1-s)/(0,9+s), \quad S_1^0 = S_2^0 = 0, \quad s_0 = 0, \quad m = 0,36, \\ \mu_2 = \mu_{2\max} + (\mu_{2\min} - \mu_{2\max})\theta, \quad \mu_{2\max} = 1, \quad \mu_1 = 0,1, \quad \gamma = \gamma_{\max} + (\gamma_{\min} - \gamma_{\max})\theta, \quad \gamma_{\max} = 1, \quad \gamma_{\min} = 0,5, \\ \lambda_1 = 0,644 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}, \quad \lambda_2 = 0,08 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}, \quad \lambda_3 = 2,40 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}, \quad \rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3, \\ \rho_2 = 730 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_3 = 4216 \text{ кг/м}^3, \quad c_{p1} = 4071 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}, \quad c_{p2} = 2100 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)},$$

$c_{p3} = 920$  Дж/(кг·К),  $\varepsilon_\theta = 10^{-6}$ ,  $\varepsilon = 0,3$ ,  $h = 0,005$ ,  $\tau = 0,00025$ . При закачке горячей воды  $\mu_{2\min}$  бралось равным 0,2, а  $\mu_{2\max} = 1$ , при закачке холодной соответственно 1 и 4.

На рисунках толстыми линиями обозначены решения  $s(x, t)$  полученные в неизотермическом случае, тонкими — результаты расчета по изотермической модели, пунктиром — профили температуры.

**Анализ численных расчетов**

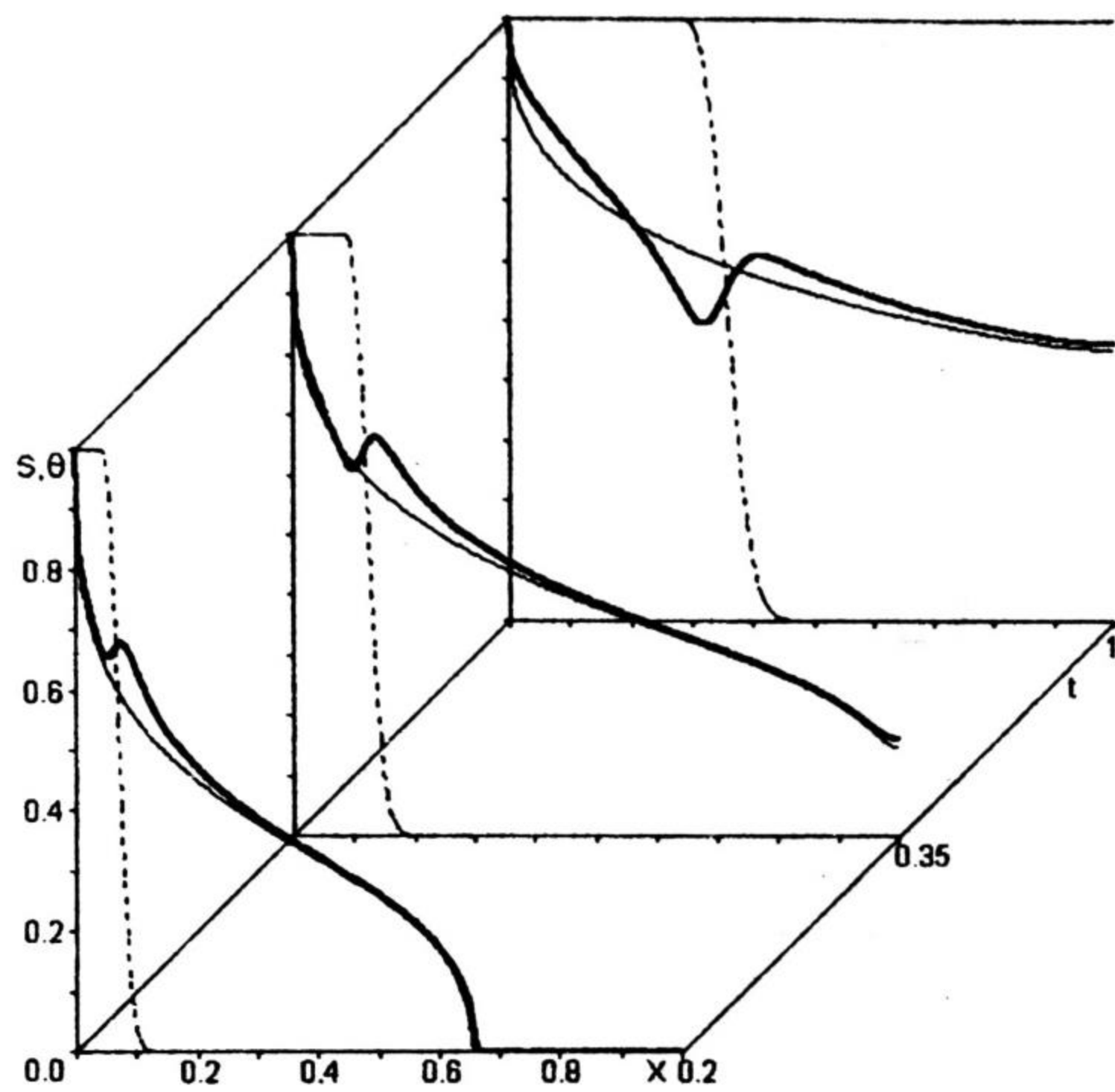


Рис. 1. Вытеснение горячей водой, МЛТ

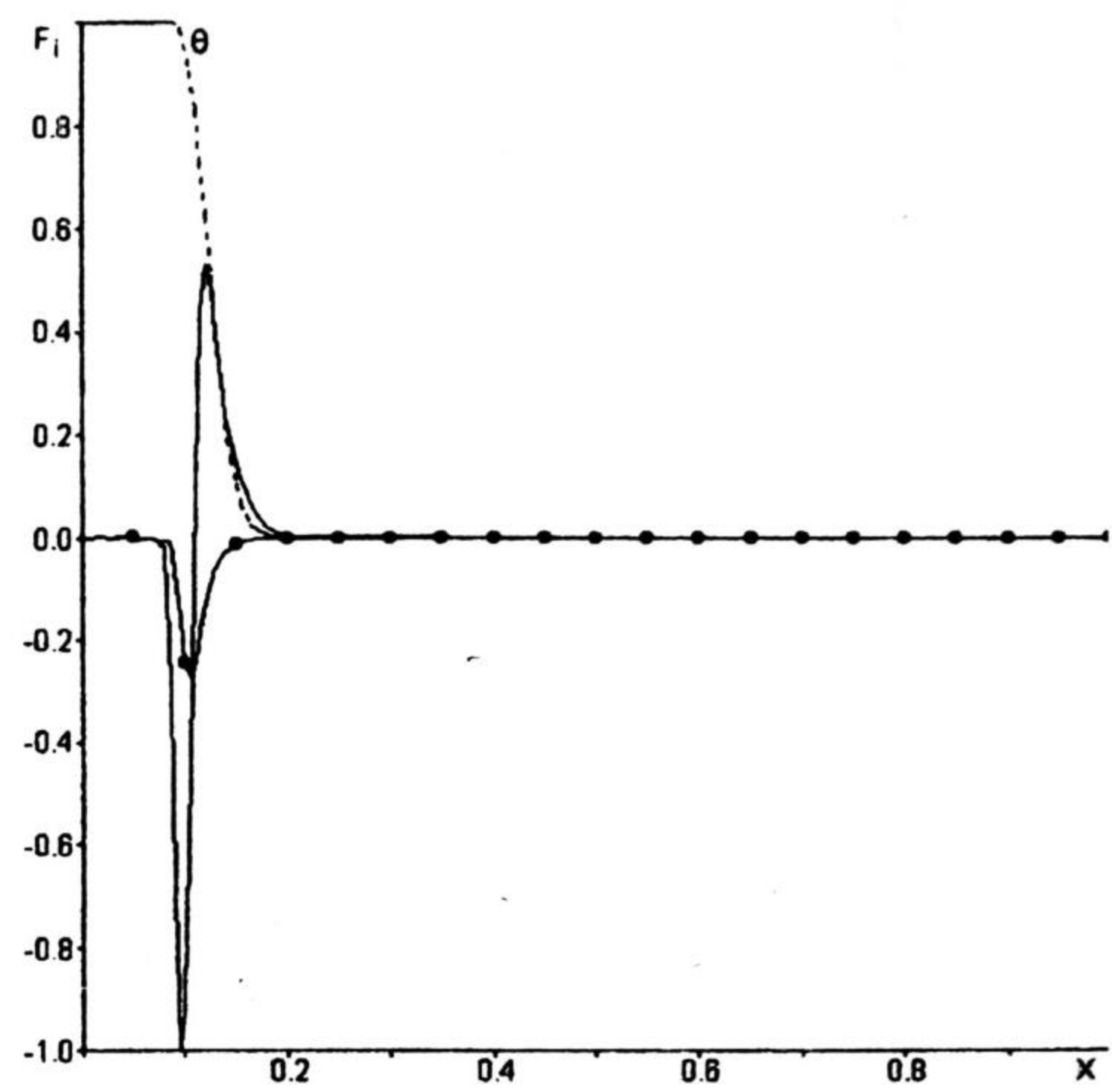


Рис. 2. Графики  $F_1$  и  $F_2$  к рисунку 1, при  $t = 0,35$

При вытеснении нефти горячей водой, в случае зависимости от температуры коэффициента поверхностного натяжения и вязкостей, видно, что пересечение графиков температуры и насыщенности приходится на их точки перегиба (рис. 1). Перед температурным фронтом образуется локальный максимум, за ним — минимум. Такая структура решения объясняется тем, что уравнение для насыщенности в системе (3) можно переписать в виде:

$$s_t = (\varepsilon(a_s p_s s_x)_x - b_s s_x) + F_1 + F_2, \tag{6}$$

где  $F_1 = \varepsilon(a p_\theta \theta_x)_x$ ,  $F_2 = -b_\theta \theta_x = -b_\mu \mu_\theta \theta_x$ , при этом  $-b_\mu \mu_\theta > 0$ ,  $a p_\theta > 0$ .

$F_1$  характеризует зависимость от температуры капиллярных сил,  $F_2$  — влияние температуры на вязкости фаз, т. е. на их подвижность ( $k_i / \mu_i$ ). Взаимодействие  $F_1$  и  $F_2$  определяет наличие немонотонности в решении классической задачи вытеснения. На рис. 2 темными кружками помечен график  $F_2$ , как и ранее пунктиром — температурный профиль, тонкая линия —  $F_1$ . Графики  $F_1$  и  $F_2$  нормированы по  $\max_x \{ \max \{ |F_1(x)|, |F_2(x)| \} \}$ . Видно, что до точки перегиба решения  $\theta(x, t)$  функция  $F_1 > 0$  и превалирует над  $F_2$ , в итоге сумма  $F_1 + F_2$  играет роль источника, на графике + появляется максимум. После точки перегиба  $F_1 + F_2 < 0$  и реализуется как бы сток, в итоге образуется минимум у водонасыщенности.

При отсутствии капиллярных сил  $F_2 < 0$  действует как стоковое слагаемое, формируя понижение водонасыщенности в виде полочки, которое в силу соблюдения баланса массы создает в дальнейшем дополнительный фронт вытеснения (рис. 3). Это приводит к тому, что немонотонная структура максимум-

минимум (рис. 1) переходит в структуру максимум-полочка-дополнительный фронт вытеснения (рис. 3).

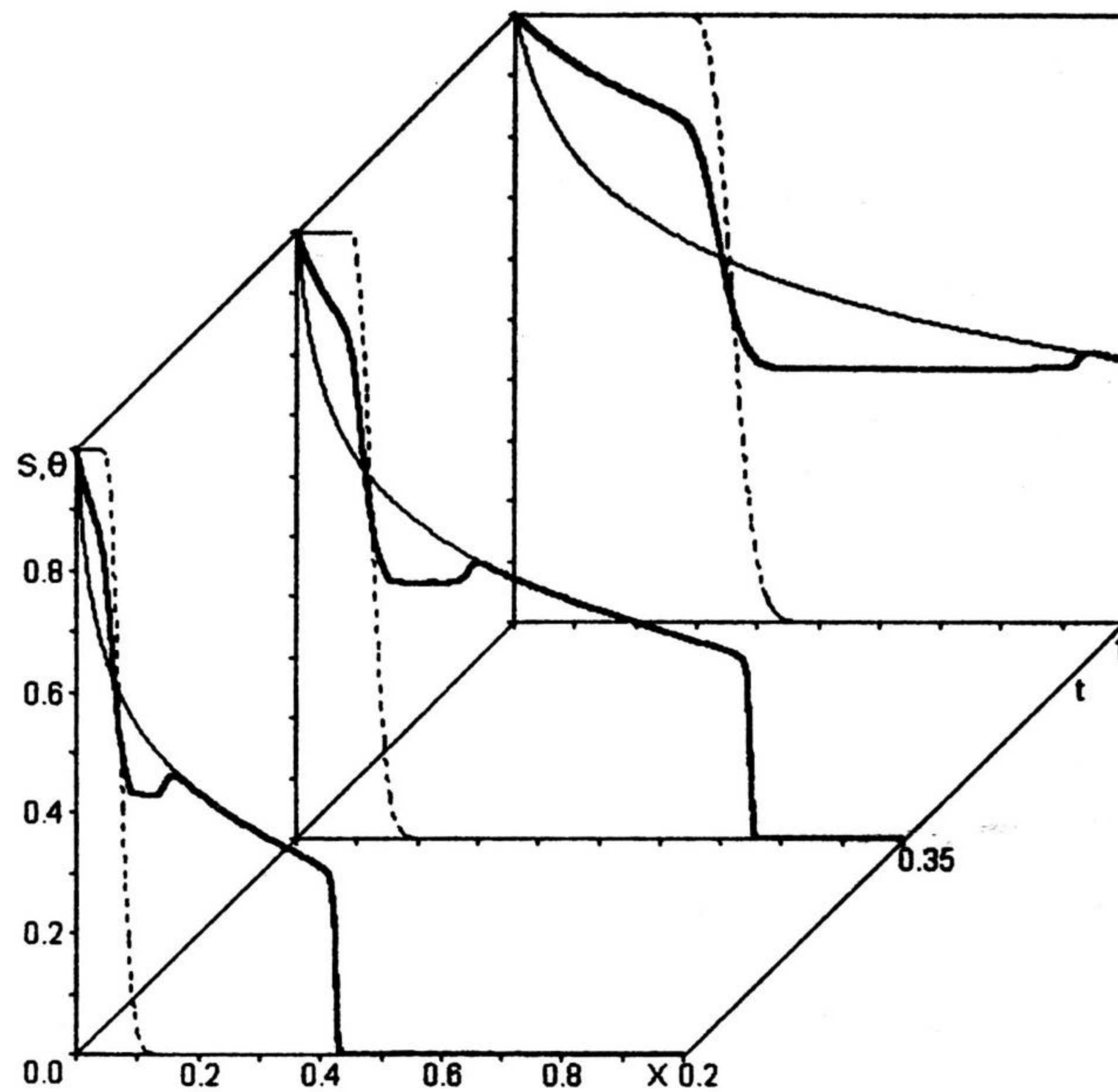


Рис. 3. Вытеснение горячей водой, БЛТ, схема для  $s(x, t)$  второго порядка аппроксимации из [6]

В случае вытеснения холодной водой влияние  $F_1$  прямо противоположное (рис. 4). При достаточно большом  $\varepsilon$  (с нашими параметрами  $\varepsilon > 0,15$ ) до точки перегиба функции  $\theta(x, t)$  отрицательное  $F_1$  превалирует над  $F_2 > 0$  и мы наблюдаем понижение водонасыщенности по сравнению с изотермическим случаем. За точкой перегиба  $F_1 + F_2 > 0$  и начинается подъем водонасыщенности. В результате в окрестности температурного фронта возникает дополнительный фронт вытеснения, хотя и с соблюдением массового баланса (рис. 4 при  $\varepsilon = 0,3$ ). При малых (рис. 6,  $\varepsilon = 0,1$ ) на начальной стадии вытеснения возникает картина, похожая на предыдущий вариант.

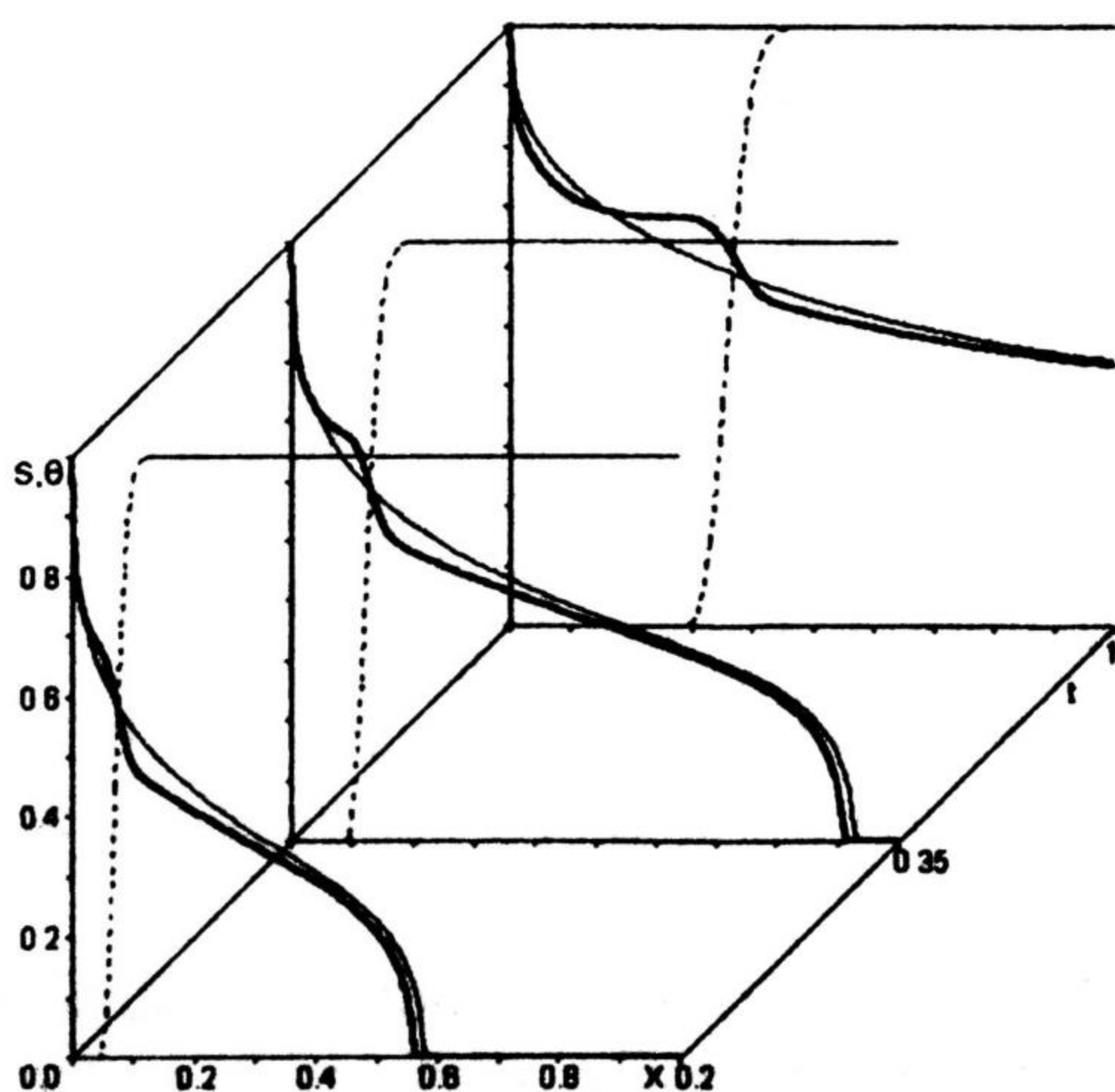


Рис. 4. Закачка холодной воды, МЛТ,  $\varepsilon = 0,3$

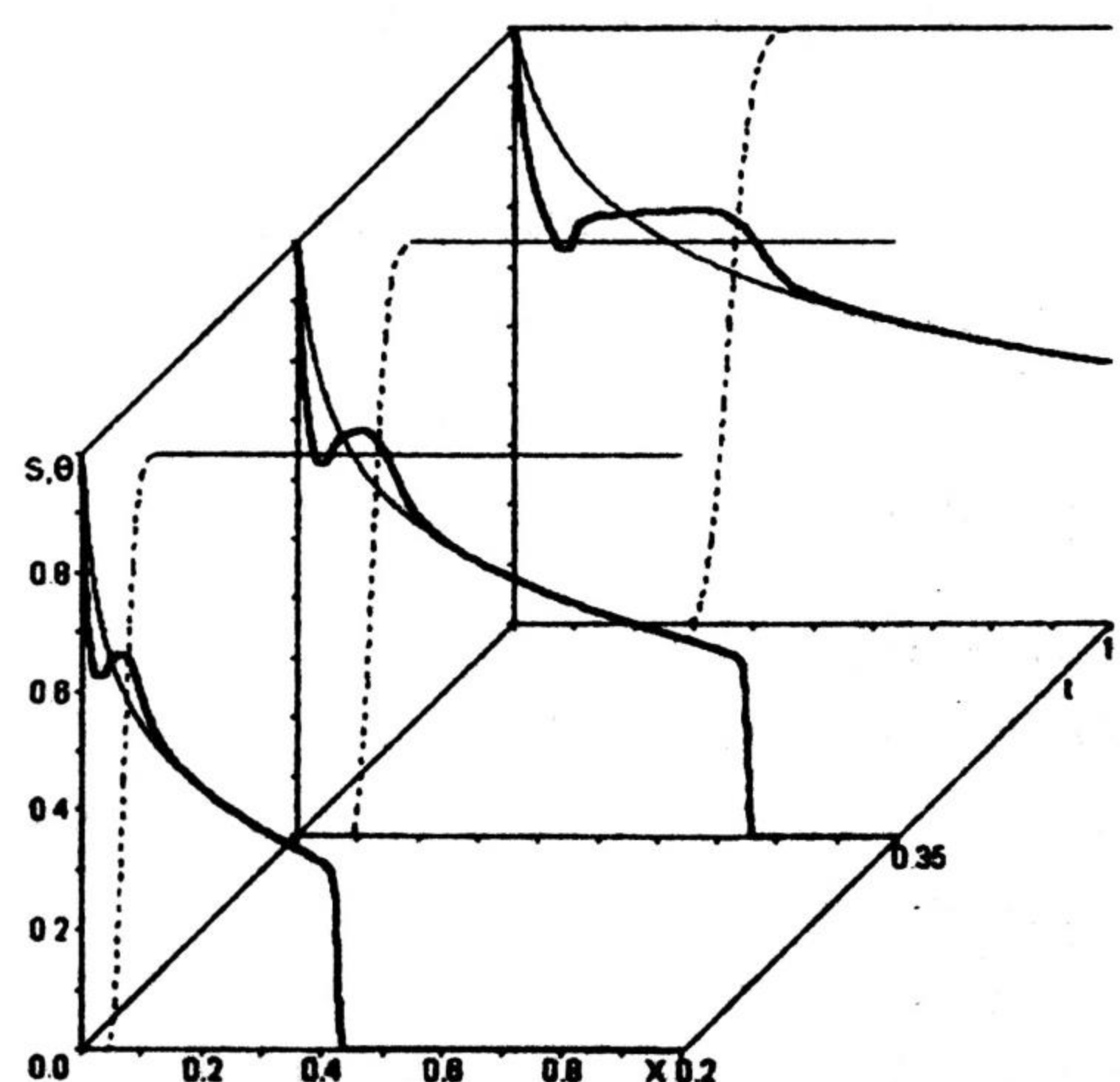


Рис. 5. Закачка холодной воды, БЛТ, схема из [6]

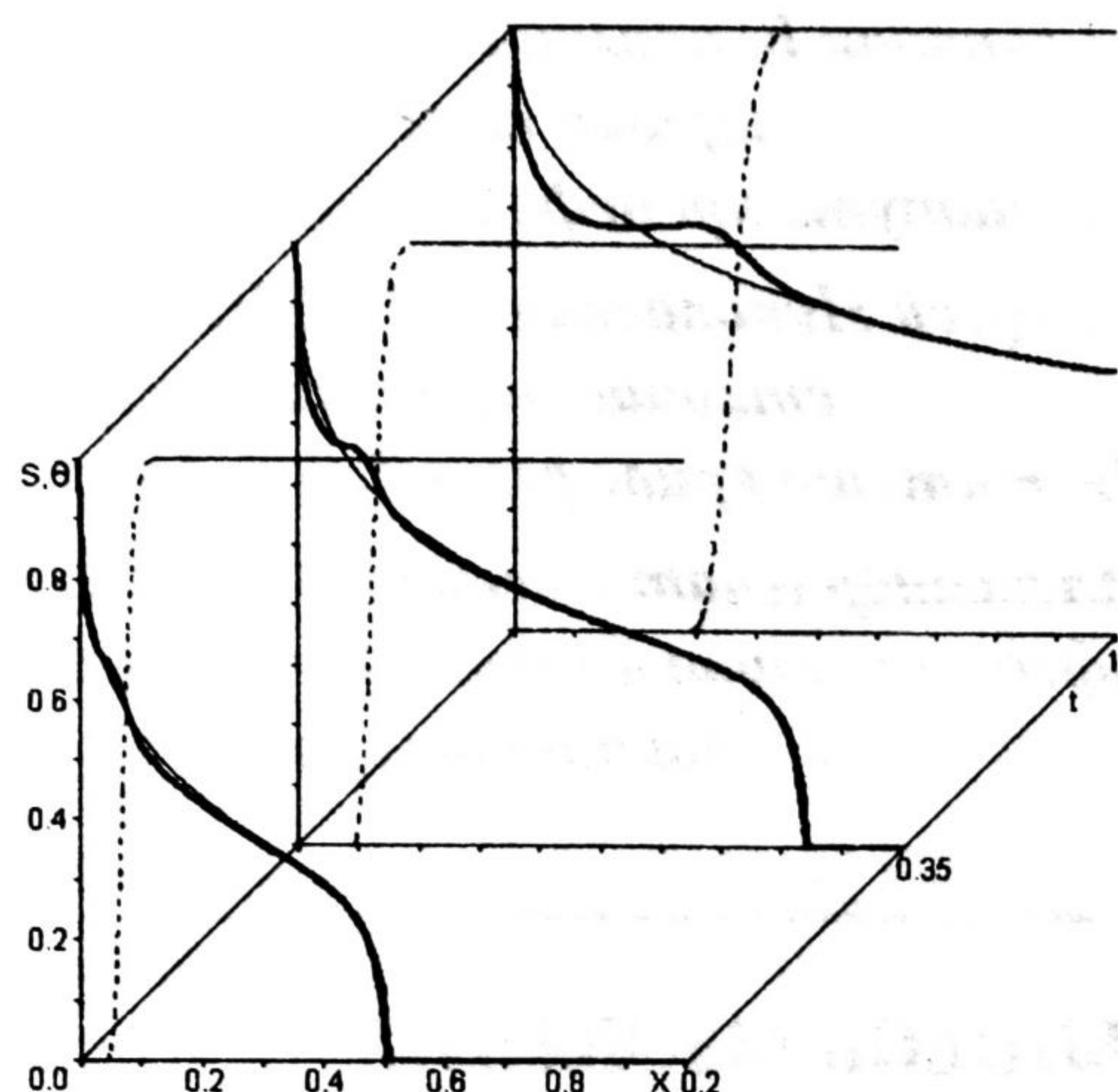


Рис. 6. Закачка холодной воды, МЛТ,  
 $\varepsilon = 0,1$

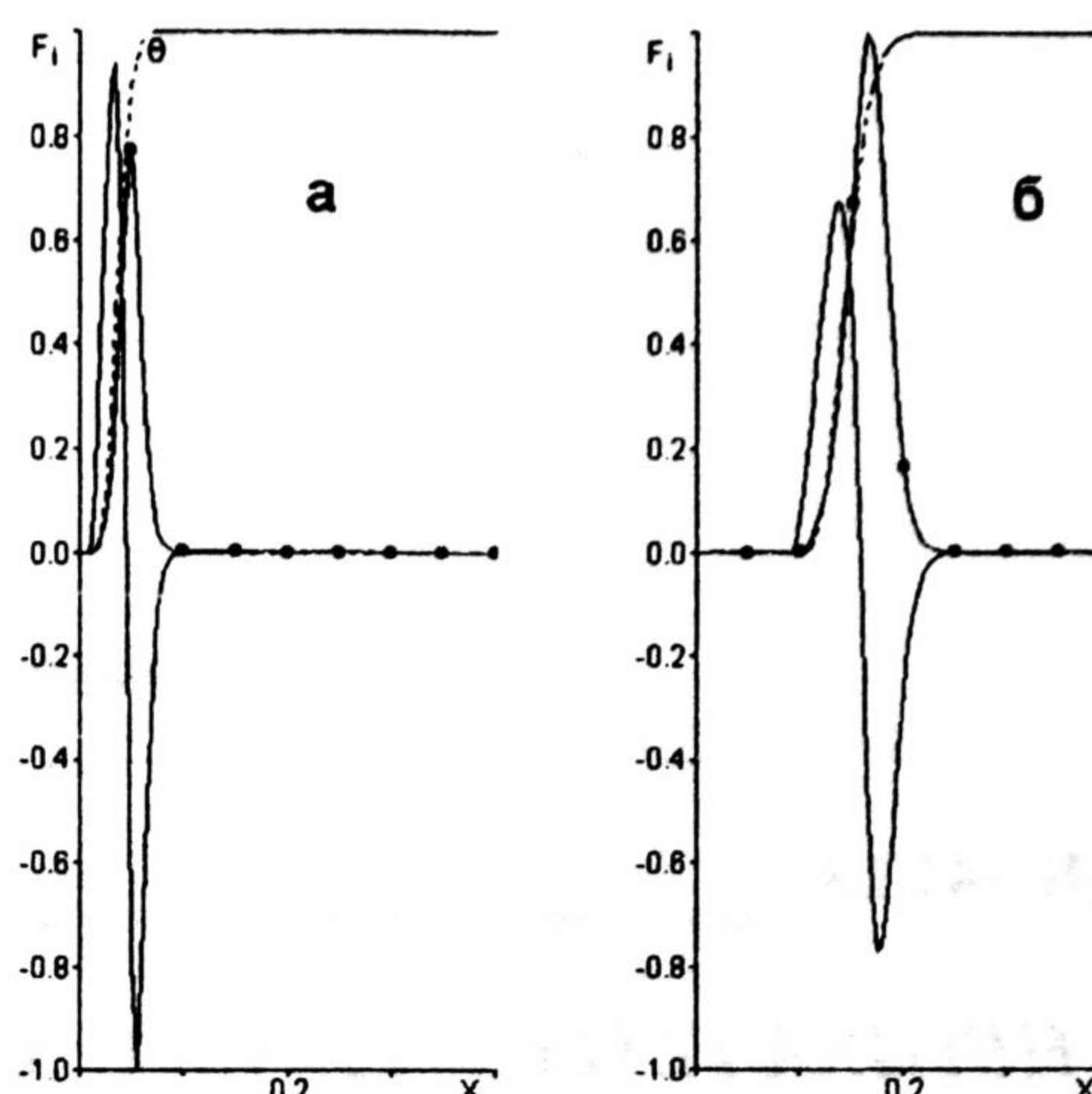


Рис. 7.  $F_1$  и  $F_2$  к рис. 6;  
а)  $t = 0,1$ ; б)  $t = 0,4$

Соотношение  $F_1$  и  $F_2$  показано на рис. 7а. С течением времени температурный фронт становится более пологим и малое  $\varepsilon$  дает о себе знать. Член с  $F_2 > 0$  превалирует во всей зоне роста температуры (рис. 7б), и там наблюдается рост  $s(x,t)$ . Причем  $\max s$ , в отличие от вытеснения горячей водой, наблюдается не в точке перегиба, а в начале зоны роста  $\theta$ . Далее образуется полка, а затем выход на граничное значение.

При  $\varepsilon = 0$  (модель без учета капиллярных сил) член с  $F_1$  отсутствует,  $F_2 > 0$  в зоне роста температуры и там наблюдается рост водонасыщенности, переходящий с течением времени в выполаживание. На начальной стадии в силу консервативности схемы вырабатывается немонотонный профиль  $s(x,t)$  с небольшой впадиной, которая сохраняется и в дальнейшем (рис. 5).

### Выводы

Несмотря на то, что при закачке горячей (рис. 1) и холодной (рис. 5) воды имеет место появление максимумов и минимумов в решении, эти эффекты объясняются разными причинами. В итоге и конфигурации немонотонностей в первом и во втором случаях оказываются неодинаковыми.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бочаров О. Б., Монахов В. Н. Краевые задачи неизотермической двухфазной фильтрации в пористых средах // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. Новосибирск, ИГиЛ СО АН, 1988. Вып. 86. С. 47-59.
2. Монахов В. Н. Автомодельные решения тепловой двухфазной фильтрации // Прикладная механика и техническая физика. Новосибирск, 1999. Т. 40. № 3. С. 9-17.
3. Бочаров О. Б., Монахов В. Н., Осокин А. Е. Численно-аналитические методы исследования задач тепловой двухфазной фильтрации // Математические методы фильтрации и их приложения: Сб. науч. тр. Новосибирск, 1999. С. 46-59.
4. Бочаров О. Б., Осокин А. Е. Численное исследование автомодельных задач неизотермической двухфазной фильтрации // Сибирский журнал индустриальной математики. Новосибирск, 2002. Т. 5. № 1. С. 8-20.
5. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука. 1971. 552 с.
6. Бочаров О. Б., Телегин И. Г. Сравнительный анализ некоторых разностных схем для задач двухфазной фильтрации без учета капиллярных сил // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8. № 4. С. 23-31.