Борис Гаврилович АКСЕНОВ — заведующий кафедрой математики ТюмГАСА, доктор физико-математических наук, профессор,
Валентина Викторовна ФОМИНА — старший преподаватель кафедры математики ТюмГАСА

УДК 536.12

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОБЛАСТЯХ С ОСЕВОЙ И ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

АННОТАЦИЯ. В работе предлагается метод решения в осесимметричной и центральносимметричной областях задач, которые ранее решались только в области с плоскопараллельной симметрией. Переход от плоских задач к цилиндрическим и сферическим осуществляется за счет модифицирования функции источника.

In this paper is proposed a method which makes it possible to solve the problems in the areas with axial and central symmetry that were formerly solved only in the areas with flat parallel symmetry. The transition from flat problems to cylinder and spherical ones is realized through modification of the source function.

Известные точные решения для уравнения теплопроводности относятся главным образом к плоским областям [1]. В тех случаях, когда получено точное решение в области с осевой или центральной симметрией, оно, обычно, крайне неудобно для практического применения. Это связано со свойствами цилиндрических и сферических специальных функций.

Для нелинейных задач точных решений получено мало, а приближенные также удобны только в плоских областях. Например, с функциями Грина, на которых основаны многие приближенные методы, работать в цилиндрической области очень трудно.

Для численных методов нет подобных ограничений, но численные методы далеко не универсальны. Важный круг задач, в которых нужно выявить качественные особенности решения, плохо поддается численному анализу.

Особое место среди приближенных методов занимают итерационные процедуры в виде последовательности функций, мажорирующих искомое решение поочередно сверху и снизу [2]. Решается обычно нелинейная задача, а мажоранты (их называют границами или оценками) находятся в явном аналитическом виде, как решения линейных задач. Таким образом, это один из методов линеаризации. Аналитическое выражение, являющееся оценкой, не просто позволяет найти приближенное численное значение температуры. Оценка является моделью процесса теплообмена, несколько отличающегося от исследуемого в количественном отношении, но сохраняющего его характерные качественные особенности.

Не будем останавливаться на сфере приложения оценочных методов. Их место и роль в современной математической физике к настоящему времени широко известны и общепризнанны [3, 4].

В работах [5-7] разработан и теоретически обоснован метод построения сужающегося семейства оценок для широкого класса нелинейных немонотонных задач. Класс традиционно решаемых оценочными методами задач существенно расширен. Однако и здесь речь идет только о плоских задачах.

В данной статье приводится математический прием, позволяющий все результаты работ [5-7] применить к областям с осевой и центральной симметрией. При этом не вносится дополнительная неконтролируемая погрешность, как в методе работы [8], и не возникает дополнительных вычислительных трудностей.

Постановка задачи. Запишем решаемую задачу в общем виде для одномерной полуограниченной области

$$c(t_i)\frac{\partial t_i}{\partial \tau} = \frac{1}{x^i}\frac{\partial}{\partial x}\lambda(t_i)x^i\frac{\partial t_i}{\partial x} + \Phi(t,x,\tau), \quad x > b, \tau > 0, \tag{1}$$

$$t_i(x,0) = t_н = const, \left|t_i(x,\tau)\right| < M\ ,\ M > 0, \tag{2}$$

$$t_i(b,\tau) = F(\tau),\ F(0) = t_н,$$

где t, c, λ, τ — соответственно температура, теплоемкость, коэффициент теплопроводности, время, $F(\tau)$ — дифференцируемая функция с ограниченной вариацией, x — пространственная координата, $i=0,1,2$ соответствует плоской, осесимметричной и центральносимметричной областям, $x=b$ — граница области.

Функция $\Phi(t,x,\tau)$ может иметь различный вид. В задаче о теплообмене во влажных дисперсных или пористых материалах [5]

$$\Phi(t,x,\tau) = -\kappa\frac{\partial W(t_i)}{\partial \tau}, \tag{3}$$

где κ — скрытая теплота фазового перехода воды,

$W(t_i)$ — содержание незамерзшей воды.

В задаче Стефана [6] эта функция имеет особенность типа дельта-функции Дирака при $t_i = t_*$ (t_* — температура фазового перехода).

Стандартными подстановками Кирхгофа и Голанта уравнение (1) приводится к виду:

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} = k_i \Delta u_i - \frac{\partial V_i}{\partial \tau},\ k_i = const > 0, \tag{4}$$

где Δ — оператор Лапласа, u_i, V_i — некоторые функции от t_i.

Заменой искомой функции легко добиться также, чтобы начальное условие было нулевым. Будем считать, что все эти преобразования уже проведены. Чтобы не вводить новые переменные, положим в (1), (2) $c(t) = c = const$, $\lambda(t) = \lambda = const$, $t_н = 0$ и получим для области $x \in (b;\infty)$:

$$\frac{\partial t_i}{\partial \tau} = a\Delta t_i + \frac{1}{c}\Phi(t_i,x,\tau),\ \tau > 0, \tag{5}$$

где $a = \lambda / c > 0$,

$$t(b,\tau) = F(\tau),\ t_i(x,0) = 0,\ F(0) = 0,\ \left|t_i(x,\tau)\right| < M,\ i = 0,1,2. \tag{6}$$

Уравнения (5) имеют такой же вид, как и уравнения (4), к которым приводится (1). Получаемые в результате преобразований условия аналогичны (6). Поэтому вместо задачи (1), (2), не нарушая общности, в дальнейшем рассматриваем задачу (5), (6).

Принимая для определенности вид $\Phi(t,x,\tau)$ по формуле (3), из (5) получаем

$$\frac{\partial t_0}{\partial \tau}=a\frac{\partial^2 t_o}{\partial x^2}-\frac{\kappa}{c}\frac{\partial W(t_0)}{\partial \tau},\quad x>b,\tau>0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau}=a\frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2}+\frac{a}{x}\frac{\partial t_1}{\partial x}-\frac{\kappa}{c}\frac{\partial W(t_1)}{\partial \tau},\quad x>b,\tau>0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau}=a\frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2}+\frac{2a}{x}\frac{\partial t_2}{\partial x}-\frac{\kappa}{c}\frac{\partial W(t_2)}{\partial \tau},\quad x>b,\tau>0, \tag{9}$$

Предположим сначала, что $F(\tau)$ — монотонная функция с ограниченной вариацией.

Решение уравнения (7) с условиями (6) можно представить в интегральном виде с помощью функции Грина. Чтобы избавится от производной под знаком интеграла, используем формулу интегрирования по частям и после несложных преобразований имеем (здесь и далее $\overline{\overline{W}}_i(x,\tau)=W[t_i(x,\tau)]$):

$$t_o(x,\tau)=Q_1(x,\tau)+Q_2(x,\tau)+\frac{\kappa}{c}\int_b^\infty\int_o^\tau \psi(x,\xi,\tau-y)\overline{\overline{W}}_0(\xi,y)d\xi dy, \tag{10}$$

где

$$Q_1(x,\tau)=\frac{\kappa W(0)}{c}erf(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}})-\frac{\kappa}{c}\overline{\overline{W}}_0(x,\tau),$$

G — функция Грина для уравнения (7), $\psi(x,\xi,\tau-y)=\dfrac{\partial G(x,\xi,\tau-y)}{\partial y}$

Q_2 — решение уравнения $\dfrac{\partial Q_2}{\partial \tau}=a\dfrac{\partial^2 Q_2}{\partial x^2}$,

удовлетворяющее условиям вида (6). Оно выписывается с помощью интеграла Дюамеля в замкнутом виде.

Идея предлагаемого в данной работе метода состоит в том, чтобы получить интегральное представление задач (8), (6) и (9), (6) с использованием функции Грина для уравнения (7). Это возможно, если в качестве функции источника в уравнениях (8), (9) рассматривать функции

$$\frac{a}{x}\frac{\partial t_1}{\partial x}-\frac{\kappa}{c}\frac{\partial W(t_1)}{\partial \tau}\ \text{и}\ \frac{2a}{x}\frac{\partial t_2}{\partial x}-\frac{\kappa}{c}\frac{\partial W(t_2)}{\partial \tau}.$$

От производной $\dfrac{\partial t_i}{\partial x}$ под знаком интеграла также освобождаемся интегрированием по частям и получаем после преобразования:

$$\begin{aligned}t_1(x,\tau)&=Q_1(x,\tau)+Q_2(x,\tau)+Q_3(x,\tau)+\frac{\kappa}{c}\int_b^\infty\int_o^\tau \psi(x,\xi,\tau-y)\overline{W}_1(\xi,y)d\xi dy-\\&-a\int_b^\infty\int_o^\tau K(x,\xi,\tau-y)t_1(\xi,y)d\xi dy,\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}t_2(x,\tau)&=Q_1(x,\tau)+Q_2(x,\tau)+2Q_3(x,\tau)+\frac{\kappa}{c}\int_b^\infty\int_o^\tau \psi(x,\xi,\tau-y)\overline{W}_2(\xi,y)d\xi dy-\\&-2a\int_b^\infty\int_o^\tau K(x,\xi,\tau-y)t_2(\xi,y)d\xi dy,\end{aligned} \tag{12}$$

где $Q_1(x,y)$, $Q_2(x,y)$ имеют тот же смысл, что и в формуле (10),

$$Q_3(x,y) = -\frac{a}{b}\int_0^{\tau} G(x,b,\tau-y)F(y)dy, \quad K(x,\xi,\tau-y) = \frac{\partial(\xi^{-1}G(x,\xi,\tau-y))}{\partial\xi}.$$

Обозначим $P_i(x,\tau) = Q_1(x,y) + Q_2(x,y) + iQ_3(x,y)$ и получаем интегральные уравнения:

$$t_i(x,\tau) = P_i(x,\tau) + \int_b^{\infty}\int_0^{\tau}\left[\frac{\kappa}{c}\psi(x,\xi,\tau-y)\overline{W}_i(\xi,y) - iaK(x,\xi,\tau-y)t_i(\xi,y)\right]d\xi dy. \tag{13}$$

Отметим, что $P_i(x,\tau)$ не зависит от искомых функций t_i.

В качестве первых оценок функций t_i можно принять значения:

$$g_{i1} = \inf F(\tau) = const, \quad g_{i2} = \sup F(\tau) = const, \tag{14}$$
$$g_{i1} \le t_i(x,\tau) \le g_{i2}.$$

Для получения уточненных оценок определим функции ψ_1, ψ_2 следующим образом:

$$\begin{aligned} &\psi_1 = \psi, \ \ \psi_2 \equiv 0 \quad при \ \ \psi > 0, \\ &\psi_1 \equiv 0, \ \ \psi_2 = -\psi \quad при \ \ \psi \le 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Аналогично определим функции K_1, K_2:

$$\begin{aligned} &K_1 = K, \ \ K_2 \equiv 0, \quad при \ \ K > 0, \\ &K_1 \equiv 0, \ \ K_2 = -K, \quad при \ \ K \le 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Очевидно, что

$$\psi(x,\xi,\tau-y) = \psi_1(x,\xi,\tau-y) - \psi_2(x,\xi,\tau-y),$$
$$K(x,\xi,\tau-y) = K_1(x,\xi,\tau-y) - K_2(x,\xi,\tau-y).$$

Тогда для уточненных оценок g_{i3}, g_{i4} получаем выражения:

$$\begin{aligned} g_{i3}(x,\tau) = P_i(x,\tau) + \int_b^{\infty}\int_0^{\tau}\Big[&\frac{\kappa}{c}\psi_1(x,\xi,\tau-y)\overline{W}_{g1}(\xi,y) - \\ &-\frac{\kappa}{c}\psi_2(x,\xi,\tau-y)\overline{W}_{g2}(\xi,y) - iaK_1(x,\xi,\tau-y)g_{i2}(\xi,y) + \\ &+ iaK_2(x,\xi,\tau-y)g_{i1}(\xi,y)\Big]d\xi dy. \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} g_{i4}(x,\tau) = P_i(x,\tau) + \int_b^{\infty}\int_0^{\tau}\Big[&\frac{\kappa}{c}\psi_1(x,\xi,\tau-y)\overline{W}_{g2}(\xi,y) - \\ &-\frac{\kappa}{c}\psi_2(x,\xi,\tau-y)\overline{W}_{g1}(\xi,y) - iaK_1(x,\xi,\tau-y)g_{i1}(\xi,y) + \\ &+ iaK_2(x,\xi,\tau-y)g_{i2}(\xi,y)\Big]d\xi dy \end{aligned}$$

$$\overline{\overline{W}}_{gi}(x,\tau) = W[g_i(x,\tau)].$$

Легко показать, что вследствие монотонности функции $t_i(x,\tau)$ выполняются неравенства

$$g_{i3}(x,\tau) \le t_i(x,\tau) \le g_{i4}(x,\tau), \quad i = 1,2.$$

Процесс уточнения оценок может быть продолжен. Например, оценки g_{i5}, g_{i6} находятся по формулам типа (17), если в правой части использовать g_{i3}, g_{i4} вместо g_{i1}, g_{i2}.

В работе [5] доказано, что существует такое конечное τ_0 что при $\tau < \tau_o$ при четном j выполняется система неравенств:

$$g_{i1} \leq \ldots \leq g_{i(j-3)} \leq g_{i(j-1)} \leq t_i \leq g_{ij} \leq g_{i(j-2)} \leq \ldots \leq g_{i2}$$

$$\text{и } \lim_{j\to\infty} g_{ij} = t_i .$$

Для того, чтобы обеспечить сходимость итерационной процедуры на любом временном интервале, можно, следуя работе [7], использовать в качестве оценок функции t_{ij}, определяемые следующим образом:

$$t_{i1} = g_{i1},\ t_{i2}(x,\tau) = g_{i2},$$

$$t_{ij}(x,\tau) = \begin{cases} g_{ij}(x,\tau),\ 0 \leq \tau \leq \tau_o \\ g_{i(j-2)}(x,\tau),\ \tau \geq \tau_o \end{cases}$$

τ_o при каждом j определяется из уравнения $g_{ij}(x,\tau_o) = t_{i(j-2)}(x,\tau_o)$.

Тогда при четном j уже для любых значений времени получим

$$t_{i1} \leq \ldots \leq t_{i(j-1)} \leq t_i \leq t_{ij} \leq \ldots \leq t_{i2}$$

$$\text{и } \lim_{j\to\infty} t_{ji}(x,\tau) = t_i(x,\tau).$$

Все вышесказанное относится к монотонным задачам.

Методика перехода к немонотонным задачам, то есть к случаю, когда $F(\tau)$ — произвольная функция с ограниченной вариацией, подробно изложена в работах [6,7], и ее применение в случае осесимметричных и центральносимметричных задач не имеет никаких дополнительных ограничений.

Функция $F(\tau)$ разлагается на сумму двух монотонных знакопостоянных функций:

$$F(\tau)=f_1(\tau)+f_2(\tau),\ f_1'(\tau) \geq 0, f_2'(\tau) \leq 0 .$$

Искомая функция $t_i(x,\tau)$ представляется как сумма двух функций R_i, S_i, являющихся решениями задач вида (5), (6) с f_1 и f_2 в качестве граничных условий. Затем при построении оценок t_i каждый раз строится комбинация оценок R_i, S_i.

Здесь мы не приводим строгого изложения этой процедуры, отсылая заинтересованного читателя к работам [6, 7].

Пример расчета. В работе [5] решена задача (7), (6) для граничной функции вида $F(\tau) = A\sin(\omega\tau + \varepsilon)$ и при следующей зависимости $W(t_i)$:

$$W(t_i) = \begin{cases} W_0 \exp(-\rho^2 t_i^2 / 2) & \text{при} \quad t_i \leq 0, \\ W_0 & \text{при} \quad t_i > 0, \end{cases}$$

где ρ — коэффициент формы кривой. Были приняты значения исходных данных:

$\lambda = 1{,}16$ Вт/(м·К); $c = 2090$ кДж/(м^3·К); $W_0 = 0{,}2$; $к = 400280$ кДж/м^2; $A = 15$°C; $\omega = 0{,}0007172$; $\varepsilon = 3{,}1416$; $\rho = 0{,}1$ К$^{-1}$; $b = 1$.

Для сравнения здесь проведен расчет того же примера, при тех же значениях параметров, но для задач (8), (6) и (9), (6). В таблице 1 приведены значения температуры для различных значений x, τ при трех видах симметрии. Во всех трех случаях решение можно получить с любой необходимой точностью, которая гарантируется наличием верхней и нижней оценок. Скорость сходимости итерационного процесса не зависит от вида симметрии.

Расчеты показывают, что сходимость заметно ухудшается, если $F(\tau)$ — сильно осциллирующая функция.

Рекомендуемая сфера приложения результатов этой статьи та же, что и в работах [5-7].

Таблица 1

Плоская задача, t_1

Радиус (м)	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
Время (ч)	Температура, ^{0}С										
1080	-10,49	-4,74	-1,71	-1,12	-1,07	-1,09	-1,14	-1,11	-0,74	-0,64	-0,41
2040	-14,91	-6,81	-3,70	-1,90	-1,94	-1,76	-1,89	-0,93	-0,87	-0,68	-0,57
3000	-12,54	-5,89	-2,22	-1,55	-0,85	-0,53	-0,71	-0,85	-0,54	-0,52	-0,45

Осесимметричная задача, t2

Радиус (м)	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
Время (ч)	Температура, ^{0}С										
1080	-10,49	-3,49	-1,16	-1,02	-0,07	-0,9	-0,13	-0,16	-0,72	-0,47	-0,21
2040	-14,91	-5,03	-1,98	-1,70	-0,24	-0,76	-0,89	-1,13	-0,70	-0,51	-0,23
3000	-12,54	-4,25	-2,76	-1,05	-0,50	-0,73	-0,92	-1,51	-0,64	-0,35	-0,16

Центральносимметричная задача, t3

Радиус (м)	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
Время (ч)	Температура, ^{0}С										
1080	-10,49	-1,79	-1,71	-0,12	-0,07	-0,09	-0,54	-1,01	-0,81	-0,23	-0,10
2040	-14,91	-3,84	-2,43	-1,50	-0,81	-0,89	-1,09	-0,82	-0,50	-0,13	-0,03
3000	-12,54	-2,89	-1,02	-0,55	-0,25	-0,58	-1,01	-1,03	-0,44	-0,25	-0,09

ЛИТЕРАТУРА

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.

2. Тихонов А. Н. Об охлаждении тел при лучеиспускании, следующем закону Стефана-Больцмана // Изв. АН СССР. Отд-ние матем. и естеств. наук. 1973. С. 461-479.

3. Коллац Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969. 448 с.

4. Мирзаджанзаде А. Х. и др. Термовязкоупругость и пластичность в нефтепромысловой механике. М.: Недра, 1973. 324 с.

5. Даниэлян Ю. С., Аксенов Б. Г. Построение оценок решений некоторых немонотонных задач нелинейного теплообмена // ТВТ. 1985. Т. 23. № 5. С. 900-909.

6. Аксенов Б. Г. Оценки решения одномерной задачи Стефана // ТВТ. 1989. Т. 27. № 5. С. 900-906.

7. Аксенов Б. Г. Границы решений некоторых нелинейных немонотонных задач для уравнений типа теплопроводности // Ж. вычисл. и матем. физ. 1993. Т. 33. № 6. С. 884-895.

8. Аксенов Б. Г., Медведский Р. И. Приближенный метод приведения решений осесимметричных задач фильтрации к плоским // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 2. С. 185-189.