***А. И. Исрафилова***

*Тюменский государственный университет, г. Тюмень*

**УДК 519.6: 629.3.027.533.3**

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА АВТОМОБИЛЬНЫХ ШИН

**Аннотация**. В статье рассмотрен изо-геометрический метод расчета как модификация метода конечных элементов и его применение к расчету шин. Новый подход должен предотвратить аппроксимацию геометрии рассчитываемого тела и обеспечить гладкость базисных функций на границе конечных элементов.

**Ключевые слова.** Изо-геометрический метод расчета, Метод конечных элементов, NURBS, расчет автомобильных шин.

Принципы создания автомобильных шин претерпели значительные изменения с момента их изобретения, эволюционируя от простого кожаного покрытия колес в надуваемую трубку Томсона, чтобы, наконец, трансформироваться в сложный композит, состоящий из нескольких видов резины и армирующих элементов. Таким образом, современная шина – это тело нелинейное с геометрической и механической точки зрения. Неизбежно инженеры, разрабатывающие их, должны обладать выдающимися знаниями и компетенциями в математике и, в частности, функциональном анализе, т.к. именно это направление является основой главных подходов к численном расчету шин.

На практике инженеры чаще всего используют метод конечных элементов (МКЭ) для моделирования и расчета шин. Основная идея метода — это постановка в соответствие краевой задаче определенной вариационной задачи, которая затем решается методом Ритца-Галеркина [1]. Функции, которые используются при решении чаще всего являются линейными полиномами. Модель шины разбивается на отдельные элементы, гомогенной структуры, которые связываются между собой только в узлах.

Полиномиальные базисные функции легко программируемы, просты для понимания, удобны для доказательств теорем физики и математики, и при использовании этих функций в расчетах, решение достигается с достаточной для инженерного применения скоростью сходимости. Однако природа функций неизбежно ведет к аппроксимации сложной геометрии шины прямыми линиями или параболами, т.к. было доказано, что полиномы не могут передать форму окружности точно. Безусловно, при уменьшении размеров конечных элементов, используемых для создания аналитической расчетной сетки, точность воспроизведения исходной геометрии возрастает. Более того, доказано, что при количестве элементов стремящемуся к бесконечности, решение сходится к точному [1]. Но увеличение степеней свободы неизбежно ведет к возрастанию временных и вычислительных затрат.

Еще один большой недостаток стандартного определения базисных функций в МКЭ – это малая область определения. Носитель функций заключен в пределах одного элемента, что может стать причиной отсутствия гладкости на границе элементов. Таким образом, на границах элементов наблюдаются нарушения формы деформации и аппроксимации полей искомых величин (например, напряжений). Еще одним последствием такого определения базисных функций является образование нереалистичных зазоров и взаимных пересечений тел при решении контактных задач взаимодействия шины и поверхности качения, шины и диска [2].

Указанные недостатки стандартного МКЭ подталкивают инженеров к поиску альтернатив. Одним из возможных путей стала замена базисных функций. Таким образом был разработан изо-геометрический метод расчета (Isogeometric Analysis, IGA), который является реализацией технологии Computer Aided Design (CAD) в среде численного анализа напряженно-деформированного состояния твердых тел. CAD является основой большинства графических редакторов, где в качестве примитивов используются B-сплайны. Интеграция последнего в среду численных расчетов впервые была представлена в качестве цельной концепции в начале 2000-х Хьюзом и др. [2]. Метод получил название изо-геометрический потому, что в отличие от стандартного МКЭ, где геометрия аппроксимируется выбранными базисными функциями, в здесь набор функций, которые использованы для передачи геометрии тела, используется и для процедур метода Галеркина.

Метод уже используется во многих инженерных областях [3-6]. Гарсия и Калиске в своем выступлении на конференции описали первые попытки использовать метод для анализа шин [6].

Целью данной работы является сопоставление IGA со стандартным МКЭ и обоснование целесообразности его использования для анализа напряженно-деформированного состояния автомобильных шин.

В случае IGA, базисными функциями являются B-сплайны. Эти функции рассчитываются согласно рекурсивной формуле Кокса и де Бура, начиная с кусочно-заданных констант для функций нулевого порядка $p = 0$ [2]

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi_i \le \xi < \xi_{i+1}, \\ 0 & \xi \notin [\xi_i; \xi_{i+1}); \end{cases} \tag{1}$$

и для порядков $p > 0$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi), \tag{2}$$

принимая $0/0 = 0$ .

Нужно заметить, что B-сплайны выполняют необходимое для базисных функций условие давать в сумме единицу в любой точке пространства

На рис. 1 сопоставлены стандартные для МКЭ полиномы Лагранжа и B-сплайны соответствующих порядков. Для степеней $p = 0$ и $p = 1$ функции идентичны. Для порядков $p \ge 2$ функции уже значительно отличаются. Очевидно, что B-сплайны неотрицательны, что приводит к улучшению аппроксимаций в многих инженерных статических и динамических задачах [2].

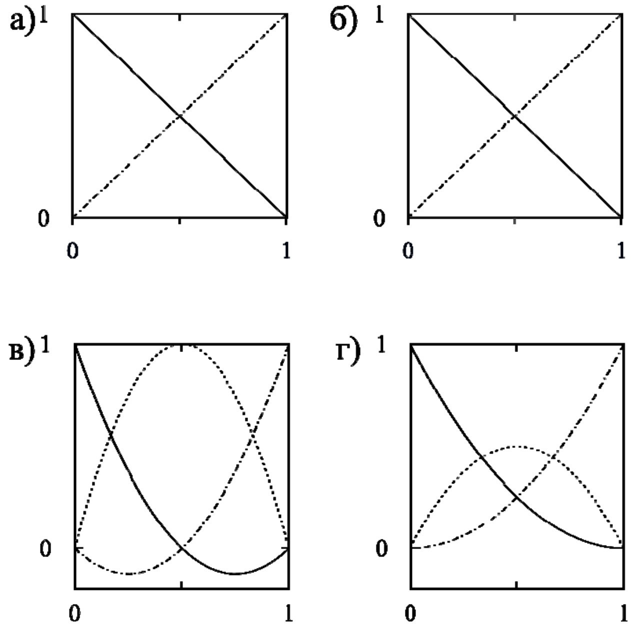


*Рис. 1*. Базисные функции: а) полиномы Лагранжа 1-го порядка; б) В-сплайны 1-го порядка; в) полиномы Лагранжа 2-го порядка; г) В-сплайны 2-го порядка

В рамках МКЭ тело описывается глобальными координатами $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3\}^T$ и локальными $\mathbf{X}^e = \{\xi, \eta, \zeta\}^T$. Локальные координаты определяют изо-параметрическое пространство, на которое физическое пространство отображается через преобразование

$$\mathbf{X}^e(\xi) = \sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(\xi) x_i^e, \tag{3}$$

где $N_{i,p}$определяет набор функций формы элемента, а $\xi$ является изо-параметрическими координатами. Такое преобразование упрощает нахождение интегралов по области расчета.

В-сплайн строится согласно узловому вектору, неубывающей последовательности параметрических координат

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+p+1}\}, \tag{4}$$

где $\xi_i$ – это параметрическая координата $i$ – того узла, $i$ – порядковый номер узла, $i = 1, 2, \ldots, n+p+1$, $p$ – порядок используемых функций, а $n$ – это количество базисных функций, из которых складывается кривая. Каждый интервал $\xi_i \xi_{i+1}$, где $\xi_i \neq \xi_{i+1}$, определяет элемент расчетной сетки. Таким образом, в случае IGA базисные функции могут быть определены на нескольких участках изо-параметрического пространства, т.е. нескольких элементах, говоря в понятиях традиционного МКЭ. Группы элементов, определяемые одним узловым вектором, называют *участком (batch)*. Как следствие этого, в IGA производит два преобразования: из физического пространства в изо-параметрическое и, далее, преобразование, действующее на каждый узловой пролёт, отображающее каждый узловой пролет на изо-параметрический элемент со значениями параметрических координат $\xi \in [-1; 1]$.

Основанные на B-сплайнах кривые есть линейные комбинации базисных функций

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(\xi)\mathbf{B}_i, \tag{5}$$

где $n$ – это количество функций $N_{i,p}, i = 1,2,\dots,n$, или коэффициентов, носящих название *контрольных точек* с порядком $p$ (см. рис. 2). Аналогично можно образовать поверхности и гиперповерхности, пользуясь тензорным произведением функций в разных направлениях.

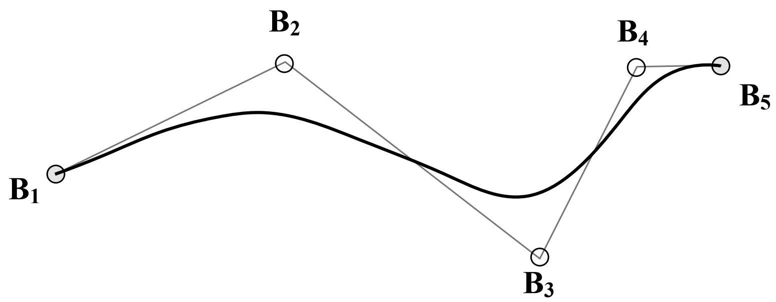


*Рис. 2.* Кривые построенные на основе B-сплайнов с контрольными точками $B_1$..$B_5$.

Базисная функция $p$-го порядка образует $p - m_i$ *порядок гладкости*, то есть обладает непрерывной производной порядка $p - m_i$ в узле $\xi_i$, если он повторяется $m_i$ раз в узловом векторе.

Для точного описания окружности, необходимой геометрической формы для моделирования шины, можно использовать рациональную производную B-сплайнов, называемую неоднородный рациональный B-сплайн (non-uniform rational B-spline, NURBS). Уравнение для кривой, построенной на основе NURBS:

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} R_{i,p}(\xi)\mathbf{B}_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{B}_i N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(\xi) w_i} \qquad (6)$$

Скалярные коэффициенты $w_i$ называют весами контрольных точек. Все свойства B-сплайнов общего вида наследуются NURBS. При выборе всех весовых коэффициентов равных единице NURBS очевидно преобразуется в B-сплайн.

Одной из особенностей IGA является тот факт, что контрольные точки часто лежат за пределами границ тела в пространстве, что влияет на вычислительные алгоритмы, хотя в остальном алгоритм расчета соответствует классическому МКЭ. Хотя IGA все еще обеспечивает лишь приближенное решение, концепция позволяет избежать изменения геометрии тел при транзите от стадии дизайны в графических редакторах к стадии численного расчета. Более того, метод сходится к точному решению при меньшем количестве степеней свободы [2]. Это свойство позволяет также избежать потерь времени, связанных с необходимостью совершать двойное преобразование координат.

Сама идея IGA позволяет наследовать геометрию тел из графических редакторов CAD. Таким образом, IGA дает неограниченные возможности для моделирования геометрии шин и поверхностей качения. Криволинейные тела и поверхности могут быть образованы с минимальным количеством контрольных точек. Кроме того, сегодня рядом исследовательских институтов разрабатывается пакет IGA для Finite Element Analysis Program (FEAP IGA). Программный комплекс реализован на языке FORTRAN 70/90 с возможностью редактирования алгоритма расчета.  Импорт геометрических данных в данной статье реализован с помощью AutoCAD VBA плагина. Исходная модель создается с минимальным количеством степеней свободы, т.к. инструменты FEAP IGA позволяют изменять расчетную сетку, основываясь на свойствах базисных функций [7].

На рис. 3 показаны поперечные сечения шин, созданные для расчета в IGA в пространстве CAD. Более того, IGA дает возможность точно моделировать процесс сборки системы диск-шина (см. рис. 4).

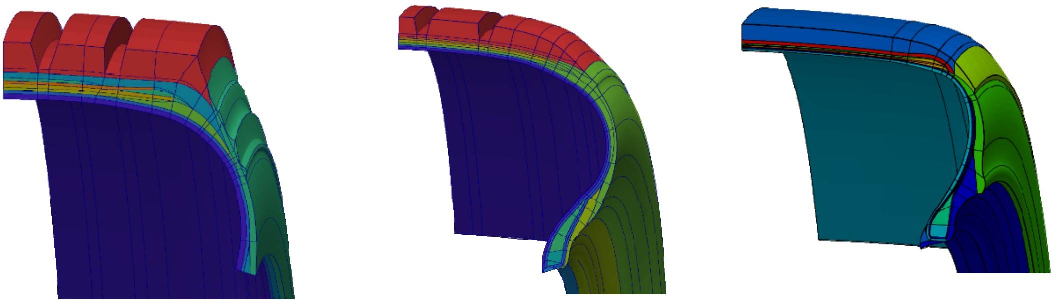

*Рис. 3.* Модели поперечных сечений шин для IGA (слева направо, показана половина сечения): шина грузового автомобиля, шина пассажирского легкового автомобиля, шина гоночного автомобиля.

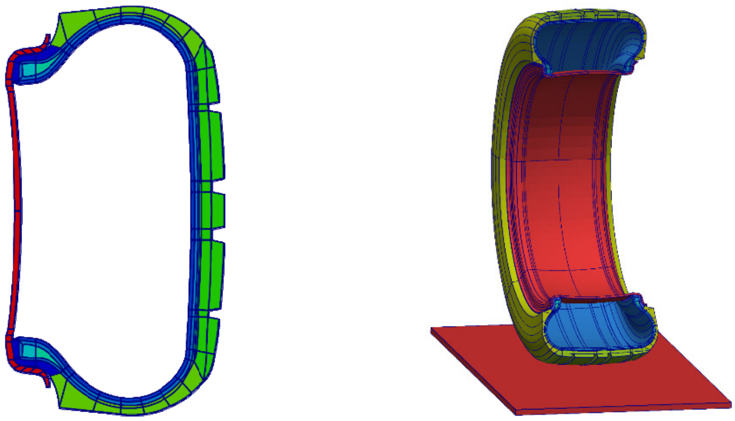

*Рис. 4.* Модель для анализа процесса сборки системы диск-шина.

В данной статье сделан краткий обзор IGA, рассмотрена перспектива использования метода для расчета автомобильных шин. Этот тип расчета является предпочтительным для данного направления, т.к. позволяет моделировать окружность точно без аппроксимации прямыми линиями или параболами и сохранять гладкость базисных функций на границе элементов. Также в статье показаны варианты созданных для нового типа расчета моделей. Существующие сегодня инструменты позволяют полностью перейти к IGA при расчете напряженно-деформированного состояния шин, хотя тот факт, что классически используемые инженерами коммерческие программные комплексы на данный момент придерживаются стандартного МКЭ, говорит о необходимости дальнейшей оптимизации алгоритмов IGA.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Zienkiewicz O., Taylor R., Zhu J.Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Butterworth-Heinemann. Oxford, 2013. 756 p.

2. Hughes T. J. R., Cottrell J.A., Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry mesh refinement. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2004. № 194. Pp. 4135–4195.

3. Bauer A.M., Breitenberger M., Philipp B., Wüchner J.A., Bletzinger K.U. Embedded structural entities in NURBS-based isogeometric analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2017. № 325. Pp. 198–218.

4. Zhang Y., Bazilevs Y., Goswami S., Bajaj C.L., Hughes T.J. Patient-Specific Vascular NURBS Modeling for Isogeometric Analysis of Blood Flow. Proceedings of the 15th International Meshing Roundtable. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006. Pp. 73–92.

5. 5. Carson E., Cobelli C. Modelling Methodology for Physiology Medicine. Second edition. Elsevier Inc. London, 2014. 588 p.

6. Garcia M. A., Kaliske M. On isogeometric analysis for tire simulation at steady state rolling. In 36th Annual Meeting Conference on Tire Science and Technology. Akron, Ohio, 2017.

7. Taylor R. L. FEAP. Version 8.5 User Manual. Berkeley. California, 2017. 690 p.