Г. А. Левин, В. А. Шапцев

Тюменский государственный университет, г. Тюмень

УДК 519.21(075.8)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ НА СОБЫТИЯХ К ПРЕДЛАГАЕМОМУ В ЗАДАЧНИКЕ

Аннотация. В заметке представлено иное, чем в задачнике решение одной задачи, полезное в методическом плане.

Ключевые слова: колода карт, эксперимент с тузом, полная вероятность, решение.

Введение

Цель настоящей публикации – дать пример студентам осмысленного решения задач по теории вероятности (в частности), не обязательно следуя предлагаемому авторами учебника процессу решения. Таким образом у студента формируется уверенная компетенция (даже предметная культура), так как мозг в процессе такого тренинга улавливает и формирует устойчивую логику предметной, точнее проблемной области.

Речь идёт о задаче № 2.74 [1]. «Из полной колоды карт (52 шт.) вынимают $\boldsymbol{n}$ карт ($\boldsymbol{n}$ <52). Одну из них смотрят. Она оказывается тузом (событие $\boldsymbol{T_0}$), после чего ее перемешивают с остальными вынутыми. Найти вероятность того, что при втором вынимании карты из этих $\boldsymbol{n}$ снова получим туз (событие $\boldsymbol{A}$)». Ответ учебника: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = 1/\boldsymbol{n} + (1-1/\boldsymbol{n})(3/51)$.

Этот результат следует из того факта, что событие A является суммой двух несовместных событий $\boldsymbol{T_0}$ и $(\Omega\backslash\boldsymbol{T_0}\times\boldsymbol{T}$. Здесь: Ω – достоверное событие, а T – событие: «вынуть другой, нежели известный, туз».

Так что: $P(\boldsymbol{A}) = P(\boldsymbol{T_0}) + (1-\boldsymbol{P}(\boldsymbol{T_0}))\,\boldsymbol{P}(\boldsymbol{T})$.

Другой возможный вариант решения задачи

Появление второго туза имеет несколько условий, т.е. требуется вычислить полную вероятность события T: $P(T) = \sum_{i=1}^{4} P(T/H_i)\, P(H_i)$. Здесь условия H_1, H_2 и H_3 – наличие ещё одного, двух и трёх тузов в n-выборке соответственно; . H_4 – отсутствие в ней ещё хотя бы одного туза.

Вычисляем вероятности этих условий.

$$P(H_1) = \frac{C_3^1 * C_{48}^{n-1-1}}{C_{51}^{n-1}} = \frac{\frac{3!}{1!(3-1)!} * \frac{48!}{(n-2)!(50-n)!}}{\frac{51!}{(n-1)!(52-n)!}} = 3 * \frac{48!}{51!} * \frac{(n-1)!(52-n)!}{(n-2)!(50-n)!} =$$
$$\frac{3(n-1)(52-n)(51-n)}{49*50*51} = \frac{(n-1)(52-n)(51-n)}{41650}$$

$$P(H_2) = \frac{C_3^2 * C_{48}^{n-1-2}}{C_{51}^{n-1}} = \frac{\frac{3!}{2!(3-2)!} * \frac{48!}{(n-3)!(51-n)!}}{\frac{51!}{(n-1)!(52-n)!}} =$$

.

$$= 3 * \frac{48!}{51!} * \frac{(n-1)!(52-n)!}{(n-3)!(51-n)!} = \frac{3(n-1)(n-2)(52-n)}{49*50*51} = \frac{(n-1)(n-2)(52-n)}{41650}$$

$$P(H_3) = \frac{C_3^3 * C_{48}^{n-1-3}}{C_{51}^{n-1}} = \frac{\frac{3!}{3!(3-3)!} * \frac{48!}{(n-4)!(52-n)!}}{\frac{51!}{(n-1)!(52-n)!}}$$
$$= 1 * \frac{48!}{51!} * \frac{(n-1)!(52-n)!}{(n-4)!(52-n)!} =$$
$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{49*50*51} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{124950}.$$

Условия эти должны образовывать полную группу событий. Поэтому добавлено условие H_4 – отсутствие дополнительных тузов в n-выборке. Но так как $P(T/H_4) = 0$, то и вычислять вероятность $P(H_4)$ не имеет смысла.

Далее: $P(T/H_1) = 1/(n-1)$, $P(T/H_2) = 2/(n-1)$, $P(T/H_3) = 3/(n-1)$.

Так что

$$P(T) = P(T|H_1) * P(H_1) + P(T|H_2) * P(H_2) + P(T|H_3) * P(H_3) =$$

$$= \frac{1 * (n-1)(52-n)(51-n)}{41650(n-1)} + \frac{2 * (n-1)(n-2)(52-n)}{41650(n-1)}$$

$$+ \frac{3 * (n-1)(n-2)(n-3)}{124950(n-1)} =$$

$$= \frac{(52-n)(51-n) + 2(n-2)(52-n) + (n-2)(n-3)}{41650}$$

$$= \frac{2652 + n^2 - 103n + 108n - 2n^2 - 208 + n^2 - 5n + 6}{41650}$$

$$= \frac{2450 * \frac{3}{2450}}{41650 * \frac{3}{2450}} = \frac{3}{51}.$$

Полученное значение вероятности численно равно её значению, полученному в задачнике [1].

Заключение

В настоящей заметке представлено сложное, но полезное в методическом плане решение задачи 2.74 из [1].

Интересно, что вероятность вынуть второй, неизвестный туз из ***n***-колоды оказалась равной вероятности попадания в ***n***-колоду одного из 3-х тузов, оставшихся в колоде из 51-й карты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель Е.С., Овчаров А.В. Задачи и упражнения по теории вероятностей. М.: Академия, 2003. 448 с.