А. Р. Мухаметьярова

Тюменский государственный университет, г. Тюмень

УДК 373

ПРИМЕНЕНИЕ СРЕДЫ GEOGEBRA ПРИ РЕШЕНИИ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ВЕКТОРНО-КООРДИНАТНЫМ МЕТОДОМ

Аннотация. В статье рассматриваются особенности применения среды GeoGebra при решении стереометрических задач векторно-координатным методом. Приводится анализ решения стереометрических задач профильного ЕГЭ по математике.

Ключевые слова: GeoGebra, векторно-координатный метод, стереометрия, стереометрические задачи, стереометрия.

Ежегодно выпускники 11 классов сдают единый государственный экзамен по математике, многие выбирают профильный уровень для дальнейшего поступления в высшие учебные заведения. Контрольные измерительные материалы включают в себя задания различного уровня подготовки и сложности, традиционно задача №14 ориентирована на проверку умения выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами в пространстве.

По результатам анализа типичных ошибок ЕГЭ последних лет, можно сделать вывод, что школьный раздел стереометрии представляет множество сложностей для учеников. С 2016 по 2018 год процент выполнения данного задания не превышал 10,2% сдающих экзамен (табл. 1) [4].

Таблица 1. Анализ выполнения задания №14 на ЕГЭ по профильной математике

<table>
<tr><th>Первичный балл/год</th><th>2015</th><th>2016</th><th>2017</th><th>2018</th></tr>
<tr><td>1 балл</td><td>22,3%</td><td>4,6%</td><td>8,5%</td><td rowspan="2">9,4%</td></tr>
<tr><td>2 балл</td><td>7,1%</td><td>1,2%</td><td>1,7%</td></tr>
<tr><td>Итого:</td><td>29,4%</td><td>5,8%</td><td>10,2%</td><td>9,4%</td></tr>
</table>

Проблема плохого усвоения учебного материала по курсу геометрии, в том числе стереометрии, старшеклассников обуславливается, в первую очередь, возрастными особенностями становления пространственного мышления. Пик развития пространственного мышления приходится на возраст младшего подростка, то есть на 5-6 класс, именно в этот период начинается пропедевтическая работа по стереометрии, но её недостаточно для дальнейшего изучения материала в 10-11 классах. [Якиманская И.С. Развитие пространственного мышления школьников]. Как правило, с 7 по 9 классы в курсе геометрии предусмотрена работа только на плоскости, поэтому старшеклассникам достаточно сложно перейти от привычного двухмерного восприятия предмета к трёхмерному, оценить внутреннюю структуру объекта и выполнить построения.

Для решения данной проблемы необходимо расширить опыт учащихся в работе с объемными фигурами. Средствами могут являться непосредственно макеты фигур или интерактивные средства визуализации.

Интерактивность (от англ. interaction — «взаимодействие») — понятие, которое раскрывает характер и степень взаимодействия между объектами или субъектами. [википедия]

Интерактивная обучающая среда – среда, способствующая изучению темы посредством взаимодействия пользователя с компьютером на основе мультимедийных технологий с целью правильного понимания изучаемого материала и его практического применения.

В работе с макетами порой возникают сложности, например, угол между сечением пирамиды и её основанием наглядно изобразить трудно. На современном этапе множество интерактивных геометрических сред, развивающих пространственное воображение. Они применяются для иллюстрации построений плоскостных и объемных фигур. Например: «Живая геометрия», «Poly», «3D SecBuilder» и «GeoGebra», остановимся подробнее на одной из них.

«GeoGebra» – программное обеспечение, которое объединяет алгебру и геометрию, позволяет создавать модели плоских и пространственных фигур, производить измерения длин и величин углов, площади и объемы тела, строить сечения и вращать получившиеся тела. Специальных навыков для работы с программой не требуется.

Использование чертежей даёт наглядное представление внутренней структуры объекта. 2D и 3D модели фигур строятся на координатной плоскости и пространстве соответственно, что позволяет использовать не только геометрический (синтетический) метод решения стереометрической задачи, но и векторно-координатный.

Векторно-координатный метод в пространстве позволяет алгоритмизировать решение задачи и сделать его более сжатым, не описывая обоснования того или иного шага решения. На изучение данного раздела стереометрии отводится незначительная часть рабочего времени, поэтому учителя не акцентируют внимание на этой теме. Знание необходимых формул и отточенные навыки основных типов стереометрических задач помогут справиться с заданием на экзамене.

Компьютерное средство визуализации «GeoGebra» поспособствует опыту решения пространственных задач векторно-координатным методом, учащиеся более осознанно смогут подойти к алгоритму решения задачи на ЕГЭ. Приобретя опыт решения задач стереометрии с помощью интерактивной среды, ученики переходят к решению без использования программного обеспечения. Сформированные способности к абстрактной визуализации пространственных тел позволяют сэкономить время на построение чертежей.

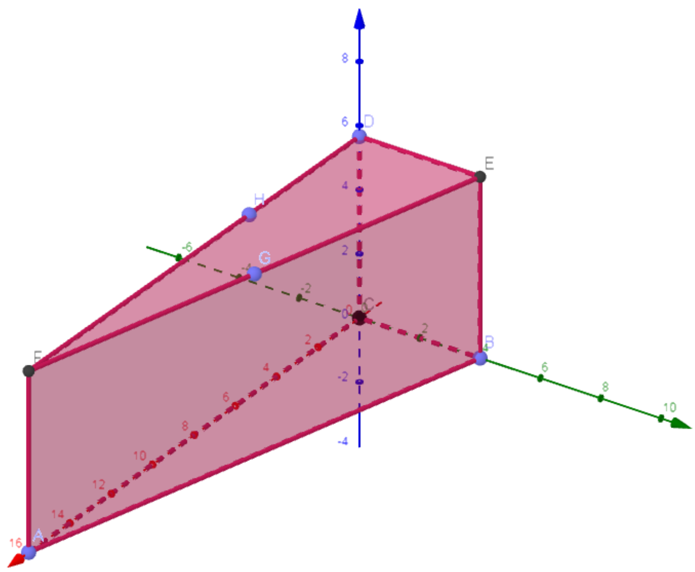
Рассмотрим ниже задачу ЕГЭ по математике (профильный уровень) за 2016 год решаемую векторно-координатным методом с примером визуализации в среде «GeoGebra».

В основании прямой треугольной призмы $ABCDEF$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, $AC = 16$, $BC = 4$, $AF = 4\sqrt{2}$. Точка G – середина ребра EF, а точка H делит ребро DF в отношении $1:2$, считая от вершины D. Плоскость BGH пересекает ребро CD в точке M.

a) Докажите, что точка M является серединой ребра CD.

b) Найдите расстояние от точки E до плоскости BGH.

Введем декартову систему координат и постоим призму $ABCDEF$ (рис. 1).



$A\ (16; 0; 0)$

$B\ (4; 0; 0)$

$C\ (0; 0; 0)$

$E\ (0; 4; 4\sqrt{2})$

$F\ (16; 0; 4\sqrt{2})$

$D\ (0; 0; 4\sqrt{2})$

$G\ (8; 2; 4\sqrt{2})$

$H\ (\frac{16}{3}; 0; 4\sqrt{2})$

Рис. 1. Призма *ABCDEF* в декартовой системе координат.

Вынесем грань DEF на плоскость, чтобы определить координаты точек G и H (рис. 2).

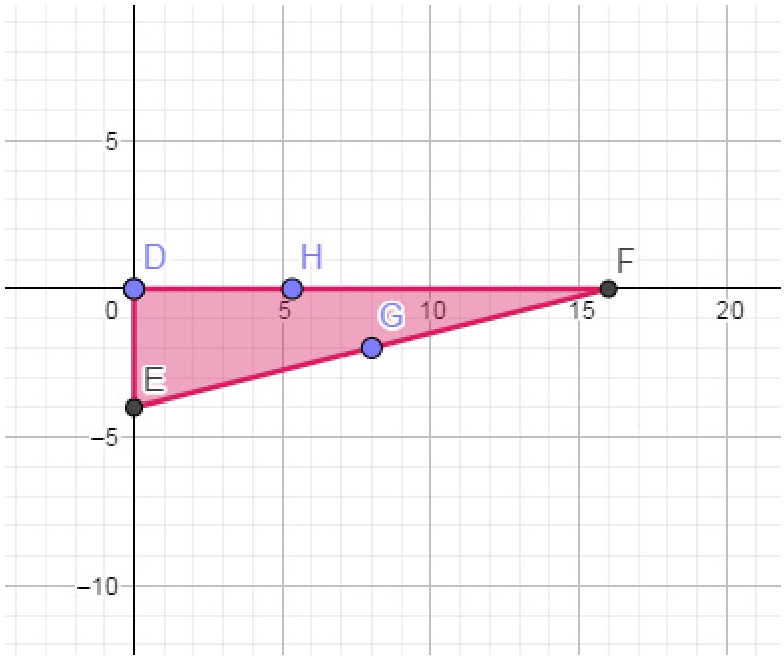


Рис. 2. Плоскость *DEF*.

Решение:

а) Докажем, что точка M является серединой ребра CD.

Для этого найдем координаты середины отрезка CD и найдём точку пересечения прямой CD и плоскости BGH.

Координаты середины отрезка определяются по формуле:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

где $(x_1; y_1; z_1)$ и $(x_2; y_2; z_2)$ – координаты начала и конца данного отрезка.

Координаты середины отрезка CD

$x = 0; \quad y = 0; \quad z = 2\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad$ т. $M\,(0; 0; 4\sqrt{2})$.

Найдём уравнение плоскости BGH. Для наглядности изобразим эту плоскость в среде GeoGebra (рис. 3). Построим эту плоскость по трём точкам.

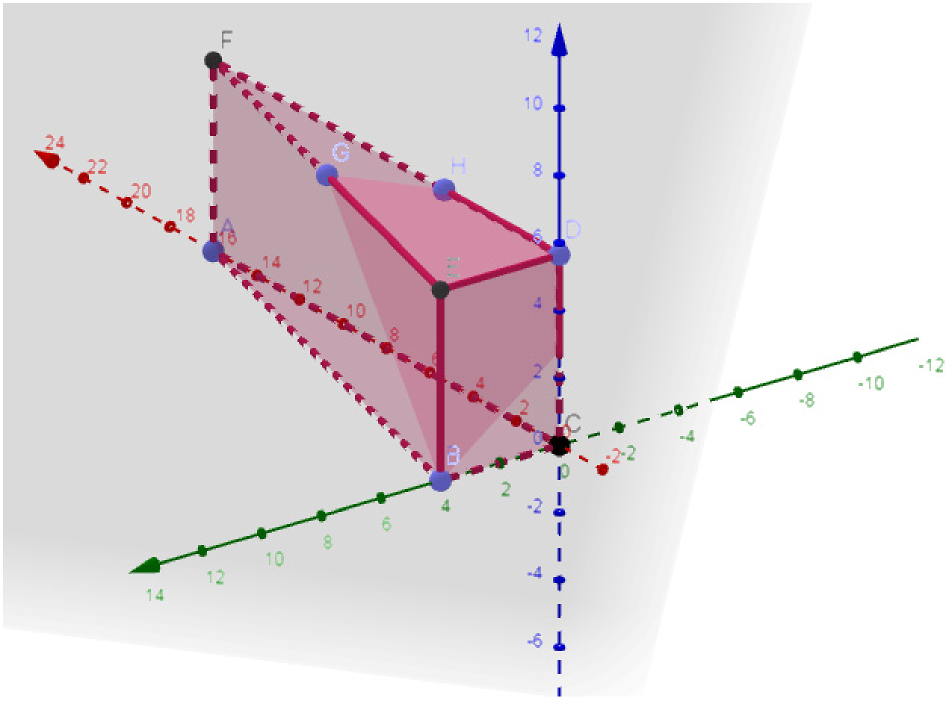


Рис. 3. Сечение призмы плоскостью *BGN*.

$Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение плоскости.

Точки с координатами $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$ и $(x_3; y_3; z_3)$ через которые проходит плоскость. Подставим координаты точек в общее уравнение плоскости и составим систему уравнений. D примем за 1, так как плоскость не проходит через начало координат, в противном случае $D = 1$.

Система уравнений выглядит:

$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + 1 = 0$

$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + 1 = 0$

$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + 1 = 0$

Система уравнений для нахождения общего уравнения плоскости BGH:

$\frac{16}{3}A + 4\sqrt{2} + 1 = 0$

$8A + 2B + 4\sqrt{2}C + 1 = 0$

$4B + 1 = 0$

В результате решения систему уравнений получим:

$A = \frac{3}{16}$; $\quad B = -\frac{1}{4}$; $\quad C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Тогда общее уравнение плоскости BGH:

$$\frac{3}{16}x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 = 0$$

Преобразовав получившее уравнение плоскости BGH получаем

$$3\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y - 8z + 16\sqrt{2} = 0$$

Уравнение прямой в параметрическом виде задается формулой:

$$x = x_1 + t(x - x_1)$$

$$y = y_1 + t(y - y_1)$$

$$z = z_1 + t(z - z_1)$$

Тогда уравнение прямой CD примет вид:

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$z = 4\sqrt{2}\,t$$

Подставим координаты получившегося уравнения прямой CD в уравнение плоскости BGH, чтобы выразить t.

$$3\sqrt{2}\cdot 0 - 4\sqrt{2}\cdot 0 - 8\cdot 4\sqrt{2}t + 16\sqrt{2} = 0$$

$$t = \frac{1}{2}$$

Подставим найденное значение t в параметрическое уравнение прямой и получим координаты точки пересечения прямой CD и плоскости BGH.

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$z = 4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = 2\sqrt{2}$$

Точка M имеет координаты $(0; 0; 2\sqrt{2})$, следовательно, является серединой отрезка CD. ■

b) Найдем расстояние от точки E до плоскости BGH.

Расстояние от точки до плоскости находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

где A, B, C – коэффициенты уравнения плоскости, а $(x_0; y_0; z_0)$ – координаты точки.

Найдем расстояние $d(E, BGH)$:

$$d = \frac{|3\sqrt{2} \cdot 0 - 4\sqrt{2} \cdot 4 - 8 \cdot 4\sqrt{2} + 16\sqrt{2}|}{\sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (-4\sqrt{2})^2 + (-8)^2}} = \frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{57 \cdot 2}} = \frac{32}{\sqrt{57}} = \frac{32\sqrt{57}}{57}$$

Ответ: $d(E, BGH) = \frac{32\sqrt{57}}{57}$.

Таким образом, применение интерактивной образовательной среды в процессе обучения векторно-координатному методу решения задач стереометрии способствует лучшему усвоению знаний за счет усиления наглядности и возможности рассмотреть 3D модель с различных сторон. Это играет немаловажную роль в формировании пространственных представлений геометрических фигур, позволяя осуществить плавный переход от модели объекта в декартовой системе координат к его графическому построению на плоскости. Повышенный уровень пространственного мышления и формирование алгоритмических этапов решения будет способствовать осмысленному применению векторно-координатного метода решения задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анциферова, А.В. Системы динамической геометрии как средство развития познавательного интереса школьников / А.В. Анциферова // Информационные технологии в математике и математическом образовании. Материалы II Всероссийской научно-методической конференции. – Красноярск, 2013 – С. 295-298.
2. Дронова Е. Н. Использование интерактивной доски в организации внеурочной деятельности // В сборнике: Теория и практика социальной работы: история и современность / под общей редакцией: Ю.А. Калинина, С.Г. Чудова. – Барнаул, 2015 – С. 100-104.

3. Каримова Я. Г. Инновационные Интерактивной доски и флипчартов как средств мотивации учащихся // Творческая педагогика. – 2011 – №3. – С. 94-99.
4. Официальный сайт Федерального института педагогических измерений. – URL: http://fipi.ru/ (дата обращения 05.05.2019).