

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СУПРЕМУМА ТРАЕКТОРИИ ПРОЦЕССА ПУАССОНА С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ЛИНЕЙНЫМ СНОСОМ

Аннотация. В работе проведено исследование процесса Пуассона с отрицательным линейным сносом, изучены свойства функции распределения супремума траектории процесса и найдены моменты этого супремума.

Ключевые слова: процесс Пуассона с линейным сносом, производящая функция моментов, распределение функционалов от случайных процессов, вероятностные методы решения инженерных задач, вероятностные модели естественных явлений и инженерных систем.

Введение. Пуассоновский процесс с линейным сносом имеет вид

$$X(t) = x_0 + at + \sum_{k=1}^{\nu(qt)} Z_k, \quad t \geq 0, \quad -\infty < x_0 < \infty, \quad a \neq 0, \quad q > 0, \quad (1)$$

где $\nu(\tau)$ — стандартный пуассоновский процесс,

$Z_1, Z_2 \dots$ — независимые неотрицательные случайные величины.

Процессы вида возникают в параметрической статистике [1], актуарной математике и теории разорения [2]. Подобные процессы имеют большую практическую значимость [3] и могут быть применены к инженерным задачам, например, при построении математической модели водохранилища. В этой модели x_0 — это уровень воды (см) водохранилища в начальный момент времени, параметр $a < 0$ — скорость стока воды (см/сек), а величины $Z_1, Z_2 \dots$ — повышения уровня воды (см), обусловленные обильными осадками, паводками, либо иными неконтролируемыми явлениями.

Проблема исследования. Описанная выше модель водохранилища приводит к задаче поиска числовых характеристик супремума траектории процесса, позволяющих оценить вероятность критического превышения уровня воды.

Определим случайную величину

$$\xi = \sup_{t \geq 0} X(t). \quad (2)$$

Цель работы — нахождение первого и второго моментов величины ξ .

Упростим модель, предполагая величины скачков тождественно равными единице: $Z_1 \equiv Z_2 \equiv \dots \equiv 1$. Также заметим, что параллельный перенос и растяжение траектории $X(t)$ позволяют свести задачу к виду, когда $x_0 = 0$, $a = -1$.

Итак, предметом исследования будет процесс, задаваемый равенством

$$X(t) = -t + \nu(qt), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где параметр q удовлетворяет условию

$$0 < q < 1,$$

при выполнении которого величина ξ является собственной [4].

Графики этого процесса и сопутствующего стандартного пуассоновского процесса приведены на рис. 1 и 2, соответственно.

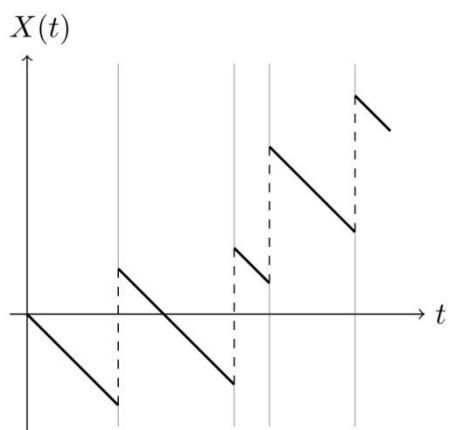


Рис. 1. Траектория процесса

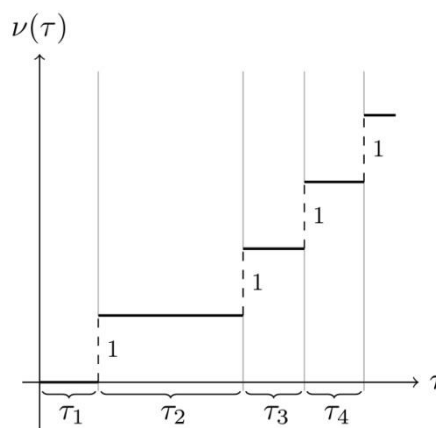


Рис. 2. Траектория стандартного процесса Пуассона

Материалы и методы исследования. Для решения поставленной задачи воспользуемся работой [4], в которой был получен следующий результат:

Теорема 1 (А. В. Скороход). Распределение супремума траектории процесса $X(t)$ задается формулой

$$\Psi(x) = P(\xi \leq x) = (1-q) \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^k q^k \frac{(x-k)^k}{k!} e^{q(x-k)}, \quad x \geq 0, \quad (4)$$

где $\lfloor x \rfloor$ — целая часть переменной x .

График этой функции распределения приведен на рис. 3.

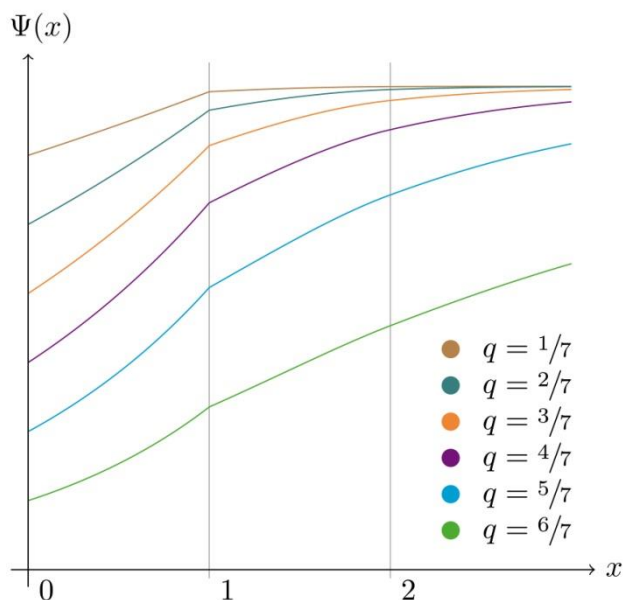


Рис. 3. График функции распределения $\Psi(x)$

Непосредственное вычисление моментов супремума неудобно в силу того, что переменная x в формуле входит не только в общий член суммы, но и в верхний предел суммирования. В этом случае удобно воспользоваться преобразованием Лапласа распределения $\Psi(x)$, которое задается формулой

$$\mathcal{L}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} d\Psi(x), \quad s > 0. \quad (5)$$

Функция $\mathcal{L}(s)$ также называется производящей функцией моментов для распределения $\Psi(x)$, так как через нее удобно находить моменты величины ξ .

Результаты.

Определение 1. Зададим параметрическую последовательность

$$\Pi_k(\lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad -\infty < \lambda < \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

При $\lambda > 0$ эта последовательность задает распределение Пуассона, а при $\lambda < 0$ она окажется полезной для записи результатов нашей работы. В частности, формулу распределения удастся записать в упрощенном виде.

Лемма 1. Для функции распределения справедливо следующее представление:

$$\Psi(x) = (1-q) \sum_{k=0}^{[x]} \Pi_k(q(k-x)).$$

Лемма 2. Для членов последовательности $\Pi_k(\lambda)$ производная по параметру λ имеет вид

$$\Pi'_k(\lambda) = \Pi_{k-1}(\lambda) - \Pi_k(\lambda), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема 1. Функция распределения $\Psi(x)$ непрерывно дифференцируема при $x > 0$, $x \neq 1$, и для ее производной имеет место формула

$$\Psi'(x) = q(\Psi(x) - \Psi(x-1)).$$

Доказательство. Пусть n — произвольное целое неотрицательное число. На полуинтервале $[n, n+1)$ для распределения $\Psi(x)$ справедливо равенство

$$\Psi(x) = (1-q) \sum_{k=0}^n \Pi_k(q(k-x)).$$

Заметим, что функция $\Psi(x)$ не претерпевает разрывов на границах соседних полуинтервалов:

$$\begin{aligned} \Psi(n+1) - \Psi(n+1-0) &= (1-q) \sum_{k=0}^{n+1} \Pi_k(q(k-n-1)) \\ &- (1-q) \sum_{k=0}^n \Pi_k(q(k-n-1)) = (1-q) \Pi_{n+1}(0) = 0, \end{aligned}$$

в силу чего заключаем, что $\Psi(x)$ непрерывна при $x > 0$.

Найдем ее производную, пользуясь результатом леммы 2:

$$\begin{aligned}\Psi'(x) &= (1-q) \sum_{k=0}^n \left(\Pi_k(q(k-x)) \right)' \\ &= -q(1-q) \sum_{k=0}^n \Pi_{k-1}(q(k-x)) + q(1-q) \sum_{k=0}^n \Pi_k(q(k-x)) \\ &= -q(1-q) \sum_{k=0}^{n-1} \Pi_k(q(k-x+1)) + q(1-q) \sum_{k=0}^n \Pi_k(q(k-x)) \\ &= q(\Psi(x) - \Psi(x-1)).\end{aligned}$$

Поскольку $\Psi(x) = 0$ при $x < 0$, причем $\Psi(0) = 1 - q \neq 0$, делаем вывод, что производная функции распределения $\Psi(x)$ непрерывна при $x > 0$, $x \neq 1$.

Теорема 2. Преобразование Лапласа распределения $\Psi(x)$ имеет вид

$$\mathcal{L}(s) = \frac{q(1-q)(1-e^{-s})}{s - q(1-e^{-s})}, \quad s > 0. \quad (7)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} d\Psi(x) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \Psi'(x) dx = q \int_0^{\infty} e^{-sx} (\Psi(x) - \Psi(x-1)) dx \\ &= q \int_0^{\infty} e^{-sx} \Psi(x) dx - qe^{-s} \int_0^{\infty} e^{-s(x-1)} \Psi(x-1) dx \\ &= q(1-e^{-s}) \int_0^{\infty} e^{-sx} \Psi(x) dx = q(1-e^{-s}) \left(\frac{1-q}{s} + \frac{1}{s} \mathcal{L}(s) \right).\end{aligned}$$

Выражая $\mathcal{L}(s)$ из последнего равенства, получаем утверждение теоремы.

Теорема 3. Супремум ξ траектории процесса $X(t)$ имеет следующие числовые характеристики:

$$\mathbb{E}\xi = \frac{q}{2(1-q)}, \quad \mathbb{E}\xi^2 = \frac{q(2+q)}{6(1-q)^2}, \quad \mathbb{D}\xi = \frac{q(4-q)}{12(1-q^2)}.$$

Доказательство. Выразим производные преобразования $\mathcal{L}(s)$ дифференцированием правой части под знаком интеграла:

$$\mathcal{L}'(s) = - \int_0^{\infty} x e^{-sx} d\Psi(x), \quad \mathcal{L}''(s) = \int_0^{\infty} x^2 e^{-sx} d\Psi(x). \quad (8)$$

Правомерность этого действия установлена в [5].

С учетом равенств для моментов будут справедливы представления

$$\mathbb{E}\xi = -\mathcal{L}'(0), \quad \mathbb{E}\xi^2 = \mathcal{L}''(0).$$

Дифференцируя выражение по переменной s и устремляя в нем $s \rightarrow 0+$, получим равенства

$$\mathbb{E}\xi = \frac{q}{2(1-q)}, \quad \mathbb{E}\xi^2 = \frac{q(2+q)}{6(1-q)^2}.$$

Дисперсию находим, пользуясь формулой $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$.

Заключение. Простой вид полученных характеристик и непрерывная дифференцируемость распределения супремума почти всюду при $x > 0$ подтверждают удобство математической модели, представленной процессом, для решения практических задач, когда простота модели является весомым критерием при выборе метода решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов И. А. Асимптотическая теория оценивания / И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский. — Москва: Наука, 1979. — 527 с. — Текст: непосредственный.
2. Ротарь В. И. Введение в математическую теорию страхования / В. И. Ротарь, В. Е. Бенинг. — Текст: непосредственный // Обзорные прикладной и промышленной математики. — 1994. — № 1. — С. 698-779.
3. Kutoyants Yu. A. Introduction to the Statistics of Poisson Processes and Applications / Yu. A. Kutoyants. — La Mans: Springer, 2023. — 611 p. — Direct text.
4. Скороход А. В. Случайные процессы с независимыми приращениями / А. В. Скороход. — Москва: Наука, 1964. — 278 с. — Текст: непосредственный.
5. Мосягин В. Е. Процесс Пуассона с линейным сносом и сопутствующие функциональные ряды / В. Е. Мосягин. — Текст: непосредственный // Теория вероятностей и ее применения. — 2024. — № 2 — С. 354-368.