

АДАПТАЦИЯ МКЭ ДЛЯ РАСЧЕТА ДВУХФАЗНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Салтанова Т.В.

Тюменский Государственный университет

e-mail: tsaltanova@mail.ru

Модель напряжённо - деформированного состояния тела (скелет грунта + поровая вода) в стабилизированном состоянии, независящем от времени, можно описать системой дифференциальных уравнений, относительно вектора перемещений частиц твёрдой фазы $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$:

$$-\left((G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + G \Delta u_i + b_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + c_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) = F_i, i = 1, 2, \quad (1)$$

$$\theta = \operatorname{div} \mathbf{u}, G = \frac{E_s}{2(1 + \nu)}, \lambda = \frac{E_s \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2)$$

$$b_i = \frac{E_{li}}{N_i^2}, c_i = \frac{E_{li}}{N_i h_i} \quad (3)$$

с неоднородными граничными условиями:

$$\mathbf{u}|_{s_1} = 0, \mathbf{t}^{(\nu)}|_{s_2} = Q \quad (4)$$

Положительные коэффициенты G, λ, b_i, c_i отражают механические механические свойства среды. E_s, E_{li} - механические характеристики твёрдой (индекс s) и жидкой (индекс l) фаз. N_i - безразмерная величина, показывающая долю перемещений твёрдой частицы от соответствующих перемещений жидкой частицы. h_i - геометрические характеристики сжимаемой толщи $\mathbf{t}^{(\nu)}$ - оператор, позволяющий записать напряжения через узловые перемещения. $F = (F_1; F_2)$ - заданный, вектор внешних сил, приложенных к поверхности тела.

Для решения задачи используется метод конечных элементов (МКЭ). Сначала двухфазное тело разбиваем на конечное число треугольных областей. Каждый треугольный элемент имеет единичную толщину, что отвечает случаю плоской деформации. Вектор узловых перемещений $\delta^T(u_1^i, u_2^i, u_1^j, u_2^j, u_1^m, u_2^m)$ по МКЭ является искомой величиной.

Перемещение в пределах конечного элемента задаётся в виде полинома первой степени. Для определения коэффициентов полинома используется принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа), который эквивалентен [3] квазиэнергетическому произведению в пределах рассматриваемого элемента.

Квазиэнергетическое произведение вводится следующим образом: перепишем уравнение (1) в операторном виде и умножим его скалярно на вектор возможных перемещений $\mathbf{v}$:

$$-((\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{F}, \mathbf{v}) \quad (5)$$

где $\mathbf{A} = (G + \lambda) \text{grad div} + G\Delta$ - известный оператор Ламе, $\mathbf{B} \left(b_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, b_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)$, $\mathbf{C} \left(c_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, c_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$ операторы, описывающие влияние поровой воды.

С целью упрощения, предположим, что в выражении (5) вектор возможных перемещений $\mathbf{v}$ совпадает с действительными перемещениями $\mathbf{u}$. Матрица жёсткости, отвечающая выражению $-((\mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{u}, \mathbf{u})$, равна [3]:

$$[k_s] = [N]^T [D] [N] \Delta \quad (6)$$

$$[N] = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} d_i & 0 & d_j & 0 & d_m & 0 \\ 0 & n_i & 0 & n_j & 0 & n_m \\ n_i & d_i & n_j & d_j & n_m & d_m \end{pmatrix}, n_i = x_1^m - x_2^m, d_i = x_2^j - x_2^m \quad (7)$$

$$[D] = \begin{pmatrix} \frac{(1-\nu)E_s}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E_{l1}}{R_1^2} & \frac{\nu E_s}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ \frac{\nu E_s}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)E_s}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E_{l2}}{R_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_s}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1^i & x_2^i \\ 1 & x_1^j & x_2^j \\ 1 & x_1^m & x_2^m \end{vmatrix} \quad (9)$$

Для выражения $-(\mathbf{C}\mathbf{u}, \mathbf{u})$ матрица жёсткости имеет вид [3]:

$$[k_l] = [M]^T [D_l] [N] \Delta \quad (10)$$

$$[M] = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} f_i & 0 & f_j & 0 & f_m & 0 \\ 0 & f_i & 0 & f_j & 0 & f_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_k = p_k + d_k x_c + n_k z_c. \quad (11)$$

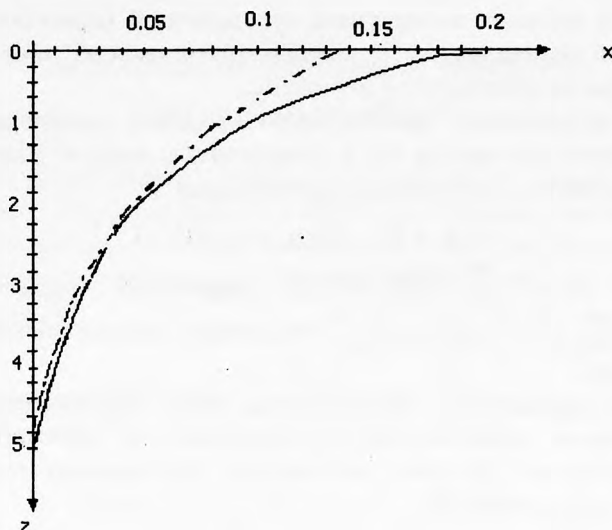


Рис. 1: График радиальных u_r и вертикальных перемещений

Скалярному произведению $-(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) \mathbf{u}, \mathbf{u}$ соответствует матрица жёсткости:

$$[k_{sl}] = ([N]^T[D] + [M]^T[D_l])[N]\Delta, \quad (12)$$

которая позволяет найти из системы линейных алгебраических уравнений $[k_{sl}]\{\delta\} = \{F\}$ искомые перемещения, соответствующие приближённому решению задачи (1).

Для того, чтобы частично использовать стандартный пакет программ по МКЭ для упругого однофазного тела из матрицы жёсткости выделим матричное слагаемое, для которого эту программу можно применить:

$$[k_{sl}] = \Delta[N]^T[D_1][N] + ([N]^T[D_2] + [M]^T[D_l])[N]\Delta, \quad (13)$$

где $[D_1]$ - известная матрица Гука, $[D_2] = \begin{pmatrix} \frac{E_{l1}}{N_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_{l2}}{N_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ При-

ведём результат тестовой задачи о загрузении погонной нагрузкой двухфазной полуплоскости (задача типа Фламана). Расчёт проводился на сетке размером 5×5 , с параметрами $E_s = 8,21$, $E_l = 3,27$, $\nu = 0,3$, $N = 0,52$, $h = 0,79$, $\rho = 0,0005$. получена матрица жёсткости и перемещения узловых точек.

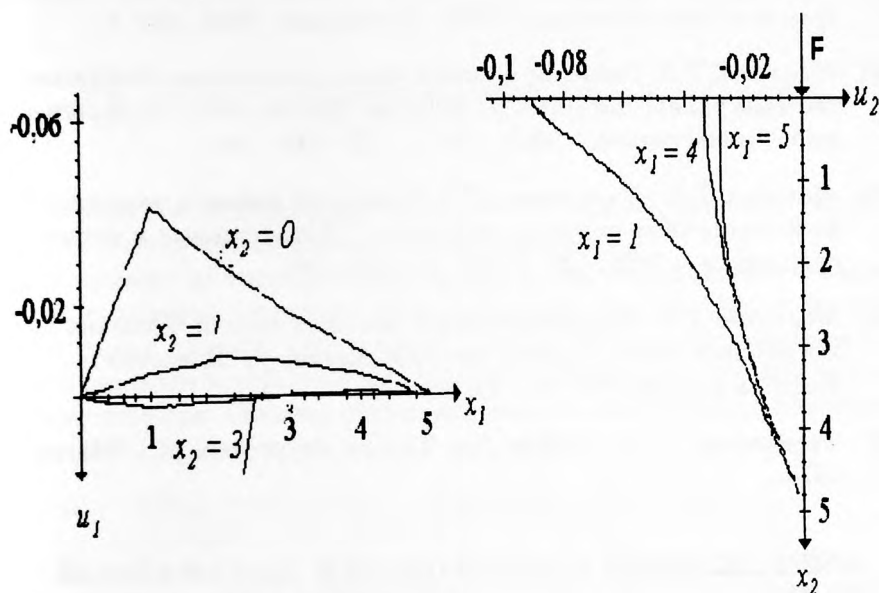


Рис. 2: вертикальные перемещения для сечений $x_1 = 1$, $x_1 = 4$, $x_1 = 5$, горизонтальные перемещения для сечений $x_2 = 0$, $x_2 = 1$, $x_2 = 3$

На рис.1 представлены графики, отвечающие радиальным перемещениям u_r , найденным по аналитической формуле [4]:

$$u_r = \frac{2F \cos \theta}{\pi (E_s + \frac{E_l}{N^2})} e^{(-a^2 r)} \left(\ln \frac{R}{r} - \int \frac{e^{(-a^2 r)} - 1}{a^2 r} d(a^2 r) \right) \quad (14)$$

в сравнении с вертикальными перемещениями.

На рис.2 и рис. 3 представлены графики вертикальных и горизонтальных перемещений.

Таким образом, расчёт двухфазной полуплоскости на малой сетке по модифицированному методу конечных элементов достаточно хорошо согласуется с соответствующим аналитическим решением.

Список литературы

- [1]. *Мальцев Л.Е., Бай В.А., Мальцева Т.В.* Кинематическая модель грунта и биоматериалов. СПб.: Стройиздат, 2002. 320 с.
- [2]. *Мальцева Т.В.* Введение функционала для решения обобщённой системы уравнений Ляме. // Вестник Тюменского Государственного Университета. - 2003. - № 5. - С. 196 - 201.
- [3]. *Мальцев Л.Е., Салтанова Т.В.* Конечный элемент, моделирующий остаточные поровые давления // Естественные и технические науки. - 2005. - № 5(19). С. 138 - 142.
- [4]. *Мальцева Т.В.* Фундаментальное решение задачи Фламана для двухфазной вязкоупругой полуплоскости. // Известия вузов. Нефть и газ. 2000 № 2. - С. 72 - 78.
- [5]. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж* Теория упругости. М.: "Наука", 1975.