

Решение двумерного уравнения теплопроводности с конвекцией

Родион Михайлович Ганопольский¹✉

¹ Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

✉ E-mail для переписки: r.m.ganopolskij@utmn.ru

Аннотация. Легкодоступные месторождения с низковязкой нефтью постепенно истощаются. В результате нефтяные компании вынуждены переходить к разработке более сложных ресурсов, включая высоковязкие нефти, которые ранее считались нерентабельными. Среди разнообразных методов увеличения ее извлечения одним из самых перспективных тепловой метод. Для его математического описания необходимо учитывать несколько физических процессов. В первую очередь — это процесс теплопередачи, а так же — процесс конвекции. Причин конвекций может быть несколько. Например, фильтрация и поднятие горячей жидкости. Для моделирования нескольких видов физических процессов необходимо как минимум двумерное уравнение теплопроводности с конвекцией. По каждому измерению коэффициент конвекции отличается. Широко используются численные методы, но остается вопрос об их сходимости и точности. Аналитическим методом решения уравнения теплопроводности является метод Фурье. Чтобы им воспользоваться, надо добиться нулевых граничных условий. Для этого необходимо найти стационарное решение. Затем вычесть его исходного уравнения. В работе сначала находится решение уравнения теплопроводности без конвекции. Затем эти же шаги выполняются для полного уравнения. Полученные решения проанализированы. Построены двумерные изображения распределения температур. Исследованы безразмерные параметры, описывающие систему. Предложены дальнейшие усложнения задачи, приближающие ее к реальным процессам.

Ключевые слова: нагрев пласта паром, двумерное уравнение теплопроводности, конвекция, тепломассоперенос, метод Фурье, фильтрация.

Цитирование: Ганопольский Р. М. 2025. Решение двумерного уравнения теплопроводности с конвекцией // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. нефть, газ, энергетика. Том II. № 1 (41). С. 23–38. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2025-11-1-23-38>

Поступила 07.02.2025; одобрена 17.04.2025; принята 18.04.2025

Solution of Two-Dimensional Problems of Heat Conduction with Convection

Rodion M. Ganopolskij¹✉

¹ University of Tyumen, Tyumen, Russia

✉ Corresponding author: r.m.ganopolskij@utmn.ru

Abstract. Easily accessible deposits of low-viscosity oil are gradually being depleted. As a result, oil companies are forced to move towards developing more complex resources, including high-viscosity oils that were previously considered unprofitable. Thermal methods are the most promising for increasing extraction of oil. It is necessary for mathematical description to take into account several physical processes. First of all, this is the heat transfer process, as well as the convection process. There may be several reasons for convection. For example, filtration or rising of a hot liquid. At least a two-dimensional heat equation with convection is required for simulation several types of physical processes. The convection coefficient is different for each dimension. Numerical methods are widely used, but the question of their convergence and accuracy remains. An analytical method for solving the heat equation is the Fourier method. To use this algorithm, it is necessary to achieve zero boundary conditions. At first we find a stationary solution. Then subtract it from the original equation. In the work, the solution of the heat conduction equation without convection is first found. Then the same steps are performed for the full equation. The obtained solutions are analyzed. Two-dimensional images of the temperature distribution are constructed. The dimensionless parameters of the system are studied. Further complications of the problem are proposed, this is bringing it closer to real processes.

Keywords: Steam Heating of The Reservoir, Two-dimensional Equation of Thermal Conductivity, Convection, Heat and Mass Transfer, Fourier Method, Filtration.

Citation: Ganopolskij R. M. (2025). Solution of two-dimensional problems of heat conduction with convection. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 11(1), 23-38. <https://doi.org/10.21684/j2411-7978-2025-11-1-23-38>

Received Feb. 7, 2025; Reviewed Apr. 17, 2025; Accepted Apr. 18, 2025

Введение

Проблема высоковязких нефтей актуальна как с точки зрения ресурсной базы, так и с учетом технологических, экономических и экологических вызовов [Шпуров, 2014]. В ближайшие десятилетия разработка таких месторождений будет играть важную роль

в обеспечении мировой энергетической безопасности, но потребует значительных инвестиций в технологии и инфраструктуру. Высоковязкие нефти обладают высокой плотностью и вязкостью, что затрудняет их добычу, транспортировку и переработку. Для их разработки требуются специальные технологии, такие как [Антониади, 2000]:

- термические методы (паротепловое воздействие, внутрипластовое горение);
- химические методы (использование реагентов для снижения вязкости);
- микробиологические методы.

Термические методы добычи высоковязкой нефти играют ключевую роль в разработке трудноизвлекаемых запасов. С развитием технологий и снижением затрат они становятся все более привлекательными для нефтяных компаний, особенно в условиях истощения традиционных месторождений. Эти методы основаны на использовании тепловой энергии для уменьшения коэффициента вязкости нефти. Это упрощает ее добычу и повышает долю добываемой нефти. Основные используемые термические методы это [Ибатуллин, 2011, Хисамов, 2009]:

- паротепловое воздействие;
- горячая вода;
- внутрипластовое горение;
- термогазовые методы (закачка смеси горячего газа, например CO_2).

Проектирование термических методов нефтеотдачи, особенно паротепловых, требует комплексного подхода с использованием математического моделирования для оценки эффективности процессов, прогнозирования поведения пластовых систем и оптимизации параметров работы [Сергеев, 1981; Бурже, 1989]. Некоторые задачи, которые необходимо учитывать при проектировании таких систем:

- моделирование теплопереноса в пористой среде;
- моделирование движения жидкостей и газов через пористую среду с учетом их взаимодействия;
- оценка фазового поведения и состава флюидов.

Математическое моделирование таких сложных процессов происходит с помощью применения уравнения конвективного переноса тепла (уравнения теплопроводности Фурье или более сложные системы уравнений Навье-Стокса), уравнения Дарси для однофазного и многофазного потока, которые могут быть дополнены уравнениями капиллярного давления и относительной проницаемости [Лыков, 1978; Исаченко, 1981; Дульнев, 2012; Чернышов, 2020; Жумаев, 2022]. В случае паротепловых методов важно учитывать особенности двухфазного потока (пар и жидкость) и возможное образование конденсата. Часто применяются численные методы [Гильманов, 2021; Каневская, 2002], такие как метод конечных элементов или метод конечных разностей, чтобы решить эти уравнения для различных геометрий и условий пласта [Гильманов, 2022; Скобликов, 2023; Галанин, 2016]. Так же широко используются гидродинамические симуляторы, например tНавигатор [Гильманов, 2023]. Но у численных методов есть множество недостатков, например, проблема накопления ошибки, так же особенно остро стоит

вопрос сходимости. Поэтому желательно получить решение, если не аналитическое (в виде конечной формулы от известных функций), то хотя бы в виде ряда. В этом случае спрогнозировать поведение системы можно с любой наперед заданной точностью — достаточно взять больше количество членов бесконечной суммы. Далее полученное решение можно использовать для анализа, оптимизации, а так же для получения эффективного распределения тепла в пласте.

Для решения реальных задач требуются упрощения и допущения. Например, можно исследовать простые модели с постоянными коэффициентами. Кроме того, численное моделирование рекомендуется начинать с решения стационарных задач [Башкирцева, 2017]. В то же время точные решения позволяют исследовать влияние нелинейных факторов эффектов на тепловой фронт. Например, на его форму и размеры. А также сравнивать с решением в случае линейной конвекцией.

В статьях [Ганопольский, 2023; Ганопольский 2024] найдено решение уравнения теплопроводности (1) в одномерном случае. Это сделано как с учетом конвекции, так и без

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2v \frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

функция u — это приведенная температура (0 соответствует минимальной температуре, а 1 — максимальной).

Рассмотрены два вида задач: первая — изначально равномерно нагретая область остывает из-за контакта с холодными границами, вторая — выравнивание температуры области из-за разницы температур по ее краям. Первая задача соответствует остыванию первоначально прогретого паром пласта из-за ухода тепла через контакт в кровлю и подшву. Вторая задача — изменению температуры пласта с продолжающимся прогревом на одной границе и уходом тепла на границе. В работе [Ганопольский, 2023] обе задачи решены двумя методами. Один из используемых методов — с помощью интеграла Пуассона. Согласно ему общее решение уравнения теплопроводности находится с помощью следующего интеграла [Canon, 1984]

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\chi) e^{-\frac{(x-\chi)^2}{4at}} d\chi \quad (2)$$

где $f(x)$ — функция начального состояния на всей числовой прямой. Там же [Ганопольский, 2023; Ганопольский 2024] сформулирована методика решения, которой мы будем придерживаться и в данной работе:

- ищем стационарное решение уравнения теплопроводности;
- приводим уравнение к уравнению с нулевыми граничными условиями и решаем его с помощью метода Фурье;
- преобразуем начальные условия, чтобы далее получить решение с помощью интеграла Пуассона.

Акцентируем наше внимание на первых двух пунктах, то есть найдем решение двумерной задачи теплопроводности с конвекцией методом Фурье.

Постановка задачи

В реальных условиях процессы остывания из-за кровли и подошвы, а так же прогрева из одной из границ, происходят одновременно [Гильманов, 2023; Скобликов, 2023], но в разных координатах, поэтому уравнение теплопроводности необходимо решать в двумерном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2v_x \frac{\partial u}{\partial x} + 2v_y \frac{\partial u}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

Скорость конвекции в разных направлениях считаем отличающейся, но не зависящей от координат и времени. Граничные и начальные условия имеют вид (первоначально вся область равномерно охлаждена до температуры ненагретых границы)

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \quad (4a)$$

$$u(0, y, t) = 1 \quad u(l, y, t) = 0 \quad (4b)$$

$$u(x, 0, t) = u(x, h, t) = 0 \quad (4c)$$

l — длина области по координате x , h — по y .

Обезразмерим уравнение (3) по остальным величинам

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + 2q \frac{\partial u}{\partial s} + 2p \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (5)$$

где введены безразмерные переменные и комплексы

$$s = \frac{x}{l} \quad z = \frac{y}{l} \quad \tau = \frac{at}{l^2} \quad q = \frac{v_x l}{a} \quad p = \frac{v_y l}{a},$$

начальное и граничные условия (4) преобразуются к виду

$$u(s, z, 0) = \begin{cases} 1 & s = 0 \\ 0 & s > 0 \end{cases} \quad (6a)$$

$$u(0, z, \tau) = 1 \quad u(1, z, \tau) = 0 \quad (6b)$$

$$u(s, 0, \tau) = u(s, g, \tau) = 0 \quad (6c)$$

где g — геометрический коэффициент, который показывает отношение линейных размеров в разных направлениях

$$g = \frac{h}{l}$$

С помощью преобразования мы трансформировали исходную задачу. Теперь она формулируется следующим образом: решить уравнение (5) с начальными и граничными условиями (6) методом Фурье. Решим сначала уравнение (5) без конвекции $q = p = 0$.

Двумерное уравнение теплопроводности без конвекции

Будем решать двумерное уравнение теплопроводности без конвекции

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (7)$$

с граничными условиями (6). По алгоритму сначала найдем стационарное решение уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (6)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (8)$$

С помощью метода Фурье [Тихонов, 2004; Петровский, 2009] представляем искомую функцию в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит от своей переменной, затем произведем разделение переменных

$$\varphi(s, z) = X(s)Y(z)$$

$$\frac{d^2 X}{ds^2} + \frac{d^2 Y}{dz^2} = 0$$

Тогда одна из функций — это комбинация синуса и косинуса, а другая — гиперболических синуса и косинуса [Тихонов, 2004]. Т.к. на границах по переменной z значения всегда нулевые, а по переменной s значение в 1 равно всегда 0, то функция Y — это синус, а X — представим как гиперболический синус, с нулём в точке $s = 1$. Выражение

$$\varphi_n(s, z) = \text{sh} \left((1-s) \frac{n\pi}{g} \right) \sin \left(\frac{n\pi z}{g} \right)$$

для любого целого n удовлетворяет уравнению (8). Общее решение запишем в виде суммы

$$\varphi(s, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sh} \left((1-s) \frac{n\pi}{g} \right) \sin \left(\frac{n\pi z}{g} \right)$$

Из начального условия (6b) определим коэффициенты разложения A_n

$$\begin{aligned} \varphi(0, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sh} \left(\frac{n\pi}{g} \right) \sin \left(\frac{n\pi z}{g} \right) = 1 \\ \varphi(0, 0) &= \varphi(0, g) = 0 \end{aligned}$$

Они известны, это разложение прямоугольного сигнала по синусам [Фихтенгольц, 2005], ненулевыми являются только нечетные

$$A_{2n-1} \text{sh} \left(\frac{(2n-1)\pi}{g} \right) = \frac{4}{(2n-1)\pi} \quad n \in N$$

откуда стационарное решение (8) будет иметь вид

$$\varphi(s, z) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(1-s)(2n-1)\pi}{g}\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{g}\right)}{(2n-1) \operatorname{sh}\left(\frac{(2n-1)\pi}{g}\right)}$$

Вычтем его из функции u

$$w(s, z, \tau) = u(s, z, \tau) - \varphi(s, z)$$

Полученная функция w удовлетворяет уравнению (7) и в то же время равна нулю на границах. Однако, начальное условие изменится

$$w(s, z, 0) = -\varphi(s, z) \quad (9)$$

Теперь можно воспользоваться методом Фурье. Применим его для уравнения теплопроводности с нулевыми граничными условиями

$$w(s, z, \tau) = X(s)Y(z)\Psi(\tau)$$

$$\frac{d\Psi}{\Psi d\tau} = \frac{d^2 X}{X ds^2} + \frac{d^2 Y}{Y dz^2}$$

Исходя из граничных и начальных условий, в качестве функций X и Y возьмем синусы, а в качестве функции Ψ — экспоненту. Частное решение

$$w_{m,n}(s, z, \tau) = \exp\left(-\pi^2 \tau \left(m^2 + \frac{n^2}{g^2}\right)\right) \sin(m\pi s) \sin\left(\frac{n\pi z}{g}\right)$$

Запишем общее решение как сумму по всем положительным m и n

$$w(s, z, \tau) = \sum_{m,n>0} B_{mn} \exp\left(-\pi^2 \tau \left(m^2 + \frac{n^2}{g^2}\right)\right) \sin(m\pi s) \sin\left(\frac{n\pi z}{g}\right) \quad (10)$$

Коэффициенты найдем из начального условия (9)

$$\begin{aligned} \sum_{mn} B_{m,n} \sin(m\pi s) \sin\left(\frac{n\pi z}{g}\right) &= -\varphi(s, z) \\ \sum_m B_{m,2n-1} \sin(m\pi s) &= -\frac{4}{\pi} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(1-s)(2n-1)\pi}{g}\right)}{(2n-1) \operatorname{sh}\left(\frac{(2n-1)\pi}{g}\right)} \\ B_{m,2n-1} &= -2k \int_0^1 \operatorname{sh}(\alpha(s-1)) \sin(m\pi s) ds \end{aligned} \quad (11)$$

где введены вспомогательные коэффициенты

$$k = \frac{4}{(2n-1)\pi \operatorname{sh} \alpha}$$

$$\alpha = \frac{(2n-1)\pi}{g}$$

Первообразная произведения синусов равна [Фихтенгольц, 2005]

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sh}(\alpha(s-1)) \sin(m\pi s) ds \\ = \frac{\alpha \operatorname{ch}(\alpha(s-1)) \sin(m\pi s) - m\pi \operatorname{sh}(\alpha(s-1)) \cos(m\pi s)}{\alpha^2 + (m\pi)^2} \end{aligned}$$

Вычисляем определенный интеграл (11)

$$\int_0^1 \operatorname{sh}(\alpha(s-1)) \sin(m\pi s) ds = \frac{(-1)^{m+1} m\pi \operatorname{sh} \alpha}{\alpha^2 + (m\pi)^2}$$

Таким образом, коэффициенты в разложении (10) равны

$$B_{m,2n-1} = \frac{(-1)^{m+1} m\pi}{(2n-1) \left(\frac{(2n-1)^2}{g^2} + m^2 \right) \pi^2}, B_{m,2n} = 0 \quad (12)$$

Двумерное уравнение теплопроводности с конвекцией

По аналогичной схеме решим уравнение теплопроводности с учетом конвекции по обеим координатам (3). Переход к новой функции произведем по следующей формуле

$$u(s, z, \tau) - \varphi(s, z) = e^{qs+pz-\tau(q^2+p^2)} w(s, z, \tau) \quad (13)$$

где φ — решение стационарного уравнения

$$2q \frac{\partial \varphi}{\partial s} + 2p \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (14)$$

удовлетворяющего граничным условиям (6). Введенная функция w является решением уравнения теплопроводности без конвекции (7) с нулевыми граничными условиями, следовательно, представима в виде суммы (10). Коэффициенты находятся из начального условия. Определим его, используя (11). Но сначала найдем решение стационарного уравнения (14), будем искать в виде

$$\varphi(s, z) = e^{qs+pz} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi z}{g}\right) \operatorname{sh}[\gamma(1-s)] \quad (15)$$

где

$$\gamma = \sqrt{q^2 + p^2 + \left(\frac{\pi n}{g}\right)^2}$$

Коэффициенты A разложения определим из граничного условия

$$\varphi(0, z) = e^{pz} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh} \gamma \sin\left(\frac{n\pi z}{g}\right) = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh} \gamma \sin\left(\frac{n\pi z}{g}\right) = e^{-pz}$$

$$A_n \operatorname{sh} \gamma = \frac{2}{g} \int_0^g e^{-pz} \sin\left(\frac{n\pi z}{g}\right) dz$$

Первообразная произведения экспоненты и синуса

$$\int e^{\alpha z} \sin(\beta z) dz = \frac{e^{\alpha z}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \sin(\beta z) - \beta \cos(\beta z))$$

$$\int_0^g e^{-pz} \sin\left(\frac{n\pi z}{g}\right) dz = \frac{\frac{n\pi}{g}}{p^2 + \left(\frac{n\pi}{g}\right)^2} (1 - (-1)^n e^{-pg})$$

Таким образом, коэффициенты в сумме (15) равны

$$A_n = \frac{2n\pi}{(pg)^2 + (n\pi)^2} \frac{(1 - (-1)^n e^{-pg})}{\operatorname{sh} \gamma}$$

Тогда функция в нулевой момент времени равна

$$w(s, z, 0) = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi z}{g}\right) \operatorname{sh}[\gamma(1-s)]$$

Объединив с разложением (10), получаем равенство

$$\sum_m B_{mn} \sin(m\pi s) = A_n \operatorname{sh}[\gamma(s-1)]$$

из которого находим коэффициенты B_{mn} с помощью интегрирования

$$B_{mn} = 2A_n \frac{(-1)^{m+1} m\pi \operatorname{sh} \gamma}{\gamma^2 + (m\pi)^2} = \frac{(-1)^{m+1} 4nm(gp)^2 (1 + (-1)^{n+1} e^{-pg})}{\left[p^2 + \left(\frac{n\pi}{g}\right)^2\right] \left[q^2 + p^2 + \left(\frac{n\pi}{g}\right)^2 + (m\pi)^2\right]} \quad (16)$$

Общее решение уравнения (3) с начальным и граничными условиями (4) получаем, выразив из (13) функцию u , подставив коэффициенты B из (16), функцию w из (10) и функцию начального состояния (15)

$$u(s, z, \tau) = e^{qs+pz} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi z}{g}\right)$$

$$\left\{ \operatorname{sh}[\gamma(1-s)] + 2 \operatorname{sh} \gamma e^{-\tau(q^2+p^2)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} m\pi}{\gamma^2 + (m\pi)^2} \sin(m\pi s) e^{-\pi^2 \tau \left(m^2 + \frac{n^2}{g^2}\right)} \right\}$$

Анализ полученных решений

В первую очередь представляет интерес анализ стационарных решений, т.к. в первую очередь по ним можно судить о температурах прогреваемой области, к которым стремится система. На рисунке (рис. 1) приведено стационарное распределение температур при $g = 2$ (прямоугольник исследуемой области имеет отношение сторон $1 : 2$, сторона вдоль движения тепла меньше, чем сторона перпендикулярно потоку), $p = 3$ и $q = 1$ (перпендикулярно потоку конвекция в три раза больше). Отчетливо видно, как тепло сдвигается к одной из границ. Зубцы около $s = 0$ связаны с использованием рядов Фурье, известная проблема для прямоугольной функции. Такая же проблема существует и в случае общего решения для малых времен, требуются сотни слагаемых [Крайнов, 2017; Крайнов, 2016; Крайнов, 2009].

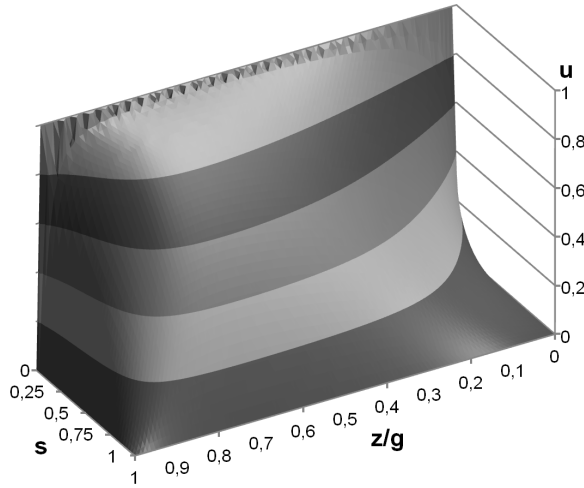


Рис. 1. Стационарное распределение температур для двумерной области

Fig. 1. Stationary temperature distribution for a two-dimensional region

Без конвекции стационарное решение имеет вид (12). Функция распределения температур — это сумма симметричных относительно $z = g/2$ синусов (коэффициенты с четным вторым индексом равны нулю), значит, сумма тоже симметрична относительно $z = g/2$. Следовательно, в этой точке для каждого s функция достигает максимума

$$\varphi\left(s, \frac{g}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(1-s)(2n-1)\pi}{g}\right) (-1)^{n+1}}{(2n-1) \operatorname{sh}\left(\frac{(2n-1)\pi}{g}\right)}$$

На графике (рис. 2) приведены распределения максимальных температур для $z = g/2$. Штриховая линия показывает температуру в $e = 2,71828$ раз меньше, чем на нагретой границе. С помощью нее можно определить эффективное расстояние,

на которое идет прогрев в зависимости от отношения сторон области. При g больше 2 холодные границы по координате z не оказывают особого влияния на распределение температуры посередине области, оно имеет вид прямой, как в одномерном случае с перепадом температур [Ганопольский, 2023]. Наоборот, при очень малых g холодные границы очень близки к другу и не дают области прогреться. Если пласт изначально прогрет, то он будет охлаждаться до температуры холодных границ, теплая граница вклада вносить не будет. Решение будет стремиться к одномерному случаю без перепада температур [Ганопольский, 2023]. При стремлении g к 0 график кривой (рис. 2) будет иметь вид ступеньки — горячая граница и абсолютно непрогретая область.

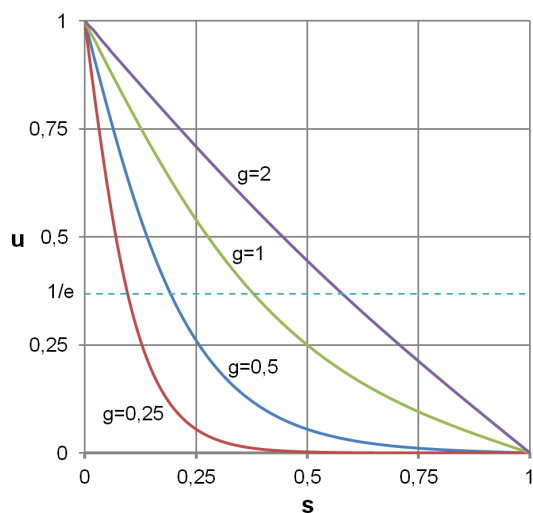


Рис. 2. Распределения максимальных температур для разных значений геометрического фактора при $z = g/2$

Fig. 2. Distributions of maximum temperatures for the different values of geometric factor at $z = g/2$

Аналогично определим тренд максимальной температуры для решения уравнения с конвекцией в направлении, перпендикулярном s ($q = 0, p > 0$). На графике (см. рис. 3) приведены эти линии для разных значений безразмерного параметра p . В уравнении (5) он отвечает за скорость конвекции в направлении z . При малых значениях p массоперенос не оказывает сильного влияния на смещения максимума температуры — она слегка отклоняется и остается параллельна оси s . При увеличении конвекции, вклад массопереноса растет — линия максимальной температуры отклоняется в направлении скорости. Это необходимо учитывать при прогнозе прогревания пласта.

Теперь будем варьировать конвекцию вдоль оси s ($p = 0, q > 0$). Сравнивая полученные распределения температур при $s = 0,5$ (рис. 4) с максимумами (рис. 2), делаем вывод, что для каждого параметра g можно подобрать такую скорость конвекции q , чтобы распределение температур были схожи. С другой стороны, продолжая увеличивать q , получаем более прогретую область далеко от начала нагретой границы.

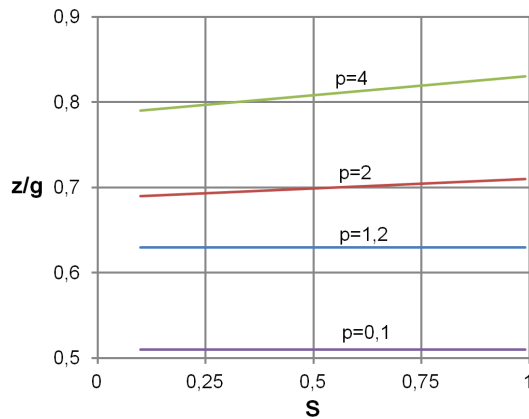


Рис. 3. Линии максимальных температур для разных значений параметра p
Fig. 3. Lines of maximum temperatures for different values of the parameter p

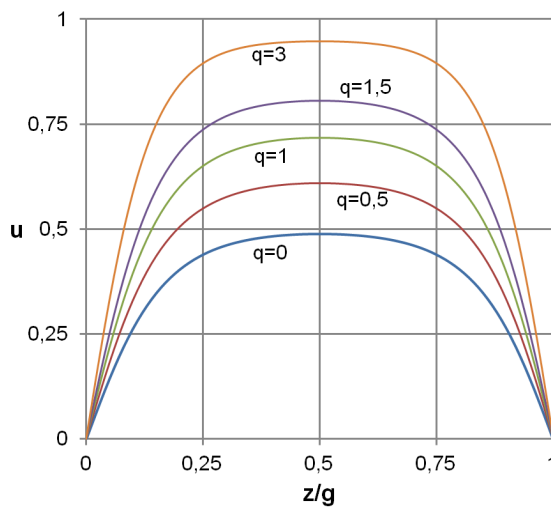


Рис. 4. Распределение температур в зависимости от z/g при конвекции вдоль оси s ($s = 0,5$)
Fig. 4. Temperature distribution depending on z/g during convection along the axis s ($s = 0,5$)

Закключение и выводы

В работе получены решения двумерного уравнения теплопроводности. Функция распределения температур записаны в виде рядов Фурье. Проведен анализ влияния безразмерных параметров, характеризующих геометрию области и скорости конвекции, на прогрев системы. Одно решение найдено с учетом конвекции, другое — без.

В узкой области, вблизи нагретой границы, ряд Фурье плохо сходится и не подходит для моделирования. Похожие проблемы возникают при расчете поведения системы в малые моменты времени. Тут можно воспользоваться численными методами, т.к. именно в начальной стадии обладают хорошей точностью. Другой способ — найти решение двумерной задачи с помощью метода Пуассона (2). В этом случае вместо сотен слагаемых потребуется всего десяток [Ганопольский, 2024].

Примерный план дальнейшего исследования двумерного уравнения теплопроводности должен включать, как численное моделирование процесса теплопереноса [Самарский, 1999] и сравнения с полученным решением, так и усложнение уравнения и условий задачи. Например, изменение температуры на границах по высоте. Кроме того, важным остается решение задачи при непостоянной скорости конвекции (например, начать учитывать, что при нагреве нефть меняет вязкость).

Список источников

- Шпуров И. В. 2014. Состояние воспроизводства запасов УВС в РФ и задачи новой классификации запасов // Недропользование XXI век. № 4. С. 58–67.
- Антониади Д. Г., Гарушев А. Р., Ишиханов В. Г. 2000. Настольная книга по термическим методам добычи нефти. Краснодар: Советская Кубань. 462 с.
- Ибатуллин Р. Р., Тахавудинов Ш. Ф., Ибрагимов Н. Г., Хисамов Р. С. 2011. Развитие методов увеличения степени нефтеизвлечения из трудноизвлекаемых запасов. Казань: Изд-во «ФЭН» АН РТ. С. 31–34.
- Хисамов Р. С., Гатиятуллин Н. С., Макаревич В. Н., Искрицкая Н. И., Богословский С. А. 2009. Особенности освоения тяжелых высоковязких нефтей и природных битумов Восточно-Европейской платформы. СПб.: ВНИГРИ. 192 с.
- Сергеев Р. В. 1981. Тепловые методы воздействия на призабойную зону пласта месторождений тяжелых и высоковязких нефтей // Нефтепромысловое дело. № 16.
- Бурже Ж., Сурио П., Комбарну М. 1989. Термические методы повышения нефтеотдачи пластов. М.: Недра. 422 с.
- Лыков А. В. 1978. Теплообмен. М.: Энергия. 480 с.
- Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. 1981. Теплопередача. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Энергоиздат. 415 с.
- Дульнев Г. Н. 2012. Теория тепло- и массообмена. СПб.: НИУ ИТМО. 195 с.
- Чернышов В. Е., Пивоварова И. И. 2020. Численное решение уравнения теплопроводности на примере расчета потерь количества тепла при нагнетании горячей воды в скважину // СТУДЕНТ ГОДА 2020. С. 8–13.
- Жумаев Ж., Тошева М. М. 2022. Моделирование стационарной теплопроводности при свободной конвекции в ограниченном объеме // UNIVERSUM. С. 34–37.
- Гильманов А. Я., Шевелёв А. П. 2021. Моделирование парациклического воздействия на нефтяные пласты с учетом конвективных потоков // Экспериментальные методы исследования пластовых систем: проблемы и решения. С. 82.
- Каневская Р. Д. 2002. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований. 140 с.

- Гильманов, А. Я., Шевелёв, А. П. 2022. Расчет распределения температуры в пласте на стадии инициации процесса парогравитационного дренажа. Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов, 333(5), С. 108–115.
- Скобликов, Р. М., Гильманов А. Я., Шевелев А. П. 2023. Методология экспресс-оценки основных технологических параметров пароциклической обработки // Решение прикладных задач нефтегазодобычи на основе классических работ А. П. Телкова и А. Н. Лапердина: материалы Национальной научно-технической конференции, Тюмень, 21 апреля 2023 года / отв. редактор С.И. Грачев. Тюмень: Тюменский индустриальный университет. С. 179–182. EDN UORTAV.
- Галанин М. П., Прошунин Н. Н., Родин А. С., Сорокин Д. Л. 2016. Решение трехмерного нестационарного уравнения теплопроводности методом конечных элементов с учетом фазовых переходов, Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. № 66. 27 с. DOI 10.20948/prepr-2016-66
- Гильманов А. Я., Ковальчук Т. Н., Скобликов Р. М. [и др.]. 2023. Анализ влияния теплофизических параметров пласта и флюида на процесс пароциклического воздействия на нефтяные пласты // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Т. 9. № 3(35). С. 6–27. DOI 10.21684/2411-7978-2023-9-3-6-27.
- Башкирцева И. А., Рязанова Т. В., Ряшко Л. Б. 2017. Компьютерное моделирование нелинейной динамики: Непрерывные модели: учебное пособие.
- Ганопольский Р. М. 2023. Аналитическое решение уравнения теплопроводности с учетом конвекции с изотермическими граничными условиями // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Т. 9, № 3(35). С. 66–82. DOI 10.21684/2411-7978-2023-9-3-66-82.
- Ганопольский, Р. М. 2024. Решение одномерных задач теплопроводности с конвекцией с помощью интеграла Пуассона. Текст : электронный // Вестник Тюменского государственного университета. Серия: Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Т. 10. № 1 (37). С. 41–54.
- Тихонов А. Н., Самарский А. А. 2004. Уравнение математической физики. М.: Высшая школа.
- Петровский И. Г. 2009. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ФИЗМАТЛИТ. 208 с.
- Cannon, John Rozier. 1984. The One–Dimensional Heat Equation, Addison-Wesley publishing company.
- Фихтенгольц Г. М. 2005. Основы математического анализа. СПб.: Лань. Т. 2. 464 с.
- Крайнов А. Ю., Моисеева К. М. 2017. Конвективный теплоперенос и теплообмен : учебное пособие. Томск: СТП. 80 с.
- Крайнов А. Ю., Миньков Л. Л. 2016. Численные методы решения задач тепло- и массопереноса: учеб. пособие. Томск: СТП. 92 с.
- Крайнов А. Ю., Рыжих Ю. Н., Тимохин А. М. 2009. Численные методы в задачах теплопереноса: учебно-методическое пособие. Томск: ТГУ.
- Самарский А. А., Вабищевич П. Н. 1999. Численные методы решения задач конвекции–диффузии. М.: Эдиториал УРСС. 248 с.

References

- Shpurov, I. V. (2014). The state of reproduction of hydrocarbon reserves in the Russian Federation and the tasks of the new classification of reserves // *Subsoil Use XXI century*, 4. Pp. 58–67.
- Antoniadi, D. G., Garushev, A. R., & Ishikhanov, V. G. (2000). A handbook on thermal methods of oil production. Sovetskaya Kuban.
- Ibatullin, R. R., Takhautdinov Sh. F., Ibragimov N. G., Khisamov R. S. (2011). Development of methods for increasing the degree of oil recovery from hard-to-recover reserves. - Kazan: Publishing House “FEN” of the Academy of Sciences of the Republic of Tatarstan. Pp. 31–34.
- Khisamov, R. S., Gatiyatullin N. S., Makarevich V. N., Iskritskaya N. I., Bogoslovsky S. A. (2009). Features of development of heavy high-viscosity oils and natural bitumens of the East European platform. St. Petersburg: VNIGRI. 192 p.
- Sergeev, R. V. (1981). Thermal methods of influencing the bottomhole formation zone of heavy and high-viscosity oil fields. *Oilfield Business*. 16.
- Bourget, J., Surio, P., & Kombarnu, M. (1989). Thermal methods of enhanced oil recovery. Nedra. [In Russian]
- Lykov, A. V. (1978) *Teplomassoobmen [Heat and mass transfer]*. Moscow, Energiya Publ. 480 p. [In Russian]
- Isachenko, V. P., Osipova V. A., Sukomel A. S. (1981) *Teploperedacha [Heat transfer]*. 4th ed., revised and expanded. Moscow, Energoizdat Publ. 415 p. [In Russian]
- Dulnev, G. N. (2012) *Theory of heat and mass transfer*. St. Petersburg: NRU ITMO. 195 p. [In Russian]
- Chernyshov, V. E., Pivovarova I. I. (2020) Numerical solution of the heat equation on the example of calculating the amount of heat loss when hot water is injected into the well // *STUDENT OF THE YEAR 2020*. Pp. 8–13.
- Zhumaev, Zh., Tosheva M. M. (2022) Simulation of stationary heat conduction with free convection in a limited volume // *UNIVERSUM*. Pp 34–37.
- Gilmanov, A. Ya., Shevelev A. P. (2021) Modeling of steam-cyclic impact on oil reservoirs taking into account convective flows // *Experimental methods for studying reservoir systems: problems and solutions*. P. 82.
- Kanevskaya, R. D. (2002). Mathematical modeling of hydrodynamic processes of development of hydrocarbon reserves. Institute of Computer Research. [In Russian]
- Gilmanov, A. Ya., Shevelev A. P. (2022) Calculation of temperature distribution in a reservoir at the initiation stage of steam-assisted gravity drainage / *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*. V. 333(5) P. 108–115.
- Skoblikov, R. M., Gil'manov A. Ya., Shevelev A. P. (2023). Methodology for express assessment of the main technological parameters of steam cyclic processing // *Solving applied problems of oil and gas production based on the classical works of A. P. Telkov and A. N. Laperdin: Proceedings of the National Scientific and Technical Conference, Tyumen, April 21, 2023 / Responsible. editor S.I. Grachev*. - Tyumen: Tyumen Industrial University. Pp. 179–182. EDN UORTAV.
- Galanin, M.P., Proshunin N.N., Rodin A.S., Sorokin D.L. (2016). Solution of three-dimensional non-stationary heat equation by finite element method taking into account phase transi-

- tions, Preprints of Keldysh Institute of Applied Mathematics. 66. 27 p. DOI 10.20948/pre-pr-2016-66
- Gilmanov, A. Ya., Kovalchuk, T. N., Skoblikov, R. M., Fedorov, A. O., Khodzhiev, Ye. N., & Shevelev, A. P. (2023). Analysis of the influence of the thermophysical parameters of the reservoir and fluid on the process of cyclic steam stimulation. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, 9(3), 6–27. DOI 10.21684/2411-7978-2023-9-3-6-27
- Bashkirtseva, I. A., Ryazanova T. V., Ryashko L. B. (2017). Computer modeling of nonlinear dynamics: Continuous models: tutorial.
- Ganopolskij, R. M. (2023). Analytical solution of heat equation taking into account convection with isothermal boundary conditions. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, 9(3), 66–82. DOI 10.21684/2411-7978-2023-9-3-66-82
- Ganopolsky, R. M. 2024. Solution of one-dimensional problems of heat conduction with convection using the Poisson integral. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy. 10(1). Pp. 41–54.
- Tikhonov, A. N., Samarsky A. A. (2004) Equation of mathematical physics. Moscow // Higher school.
- Petrovsky I. G. (2009) Lectures on the theory of ordinary differential equations. Moscow: FIZMATLIT. 208 p.
- Cannon, John Rozier (1984) The One-Dimensional Heat Equation, Addison-Wesley publishing company.
- Krainov, A. Yu., Moiseeva K. M. (2017) Convective heat transfer and heat transfer: textbook. allowance. Tomsk: STT. 80 p.
- Krainov, A. Yu., Minkov L. L. (2016) Numerical methods for solving problems of heat and mass transfer: textbook. allowance. Tomsk: STT. 92 p.
- Krainov, A. Yu., Ryzhykh Yu. N., Timokhin A. M. (2009) Numerical methods in heat transfer problems. Educational and methodical manual. Tomsk: TSU.
- Samarsky, A. A., Vabishchevich P. N. (1999) Numerical methods for solving convection-diffusion problems. Moscow: Editorial URSS. 248 p.

Информация об авторе

Родион Михайлович Ганопольский, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой моделирования физических процессов и систем Школы естественных наук, научный руководитель Центра коллективного пользования высокопроизводительных вычислений Тюменского государственного университета, Тюмень, Россия
r.m.ganopolskij@utmn.ru, <https://orcid.org/my-orcid?orcid=0000-0002-7682-9830>

Information about author

Rodion Mikhailovich Ganopolsky, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Modeling of Physical Processes and Systems, School of Natural Sciences, Scientific Supervisor of the High-Performance Computing Center, Tyumen State University, Tyumen, Russia
r.m.ganopolskij@utmn.ru, <https://orcid.org/my-orcid?orcid=0000-0002-7682-9830>