

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕПЛООБМЕНА ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ПРИБЛИЖЕНИИ БУССИНЕСКА

Аннотация. Проведено исследование численных решений модели движения несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска. В квадратной области происходит естественная конвекция, при определенных условиях принимающая форму одного или нескольких вихрей. При этом обладающее большей потенциальной энергией течение менее устойчиво. Результаты решения нестационарных уравнений демонстрируют однозначное соответствие между разницей потенциальной энергии и точками бифуркации течения.

Ключевые слова: естественная конвекция, алгоритм SIMPLER, приближение Буссинеска, потенциальная энергия, точки бифуркаций.

Введение. В связи с широким применением математических моделей в процессе решения практических задач технической физики на сегодняшний день остается актуальной проблема адекватности [1] полученных в результате моделирования данных. Под адекватностью в данном случае понимается строгое соответствие данных математической модели прежде всего законам сохранения физических величин. Быстрое развитие средств вычислений и их доступность создает ситуацию, в которой отсутствует возможность анализа исходных кодов используемых инструментов моделирования, либо такой анализ сопряжен со значительными трудностями. В частности, анализ стендовых докладов XI Школы-семинара молодых ученых по теплофизике и механике многофазных систем «Трансформация нефтегазового комплекса 2030», прошедшей в период с 23 по 25 мая 2024 года на площадках Школы естественных наук Тюменского государственного университета показывает недостаточный уровень подтверждения адекватности данных, полученных с использованием готовых программных продуктов. Расширение существующего набора тестовых задач является **целью** данного этапа численных исследований устойчивости теплообмена естественной конвекции. Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие **задачи**:

1. Выполнить физическую постановку задачи тестирования адекватности математической модели на основании фундаментальных физических законов;
2. Разработать математическую модель тестовой задачи с минимальными требованиями к использованию вычислительных ресурсов и времени вычислений;
3. Провести цикл численных экспериментов для установления соответствия результатов моделирования фундаментальным физическим законам.

Одним из наиболее часто встречающихся в работах отечественных и зарубежных исследователей способов моделирования гравитационных конвективных течений является приближение Буссинеска. Популярность данной модели объясняется существованием различных вариантов решения системы уравнений Навье-Стокса в данном приближении, начиная от аналитических до численных. В частности, Ряжский В.И. и Попов М.И. в работах [2, 3] проводят сравнение аналитического и численного решения системы уравнений в приближении Буссинеска в переменных Гельмгольца «вихрь-функция тока», отмечая существующие недостатки используемых методов численного интегрирования при поиске стационарных решений задач моделирования течений в условиях естественной конвекции. Так, одним из указанных недостатков численного интегрирования является первый порядок аппроксимации граничного

условия, в следствии чего интерполяция решения разностной задачи требует увеличения количества расчетных точек для достижения достаточного уровня гладкости. Черкасов С.Г., Лаптев И.В., Ананьев А.В. и Городнов А.О. в работах [4, 5] провели сравнение математической модели в приближении Буссинеска с приближением гомобаричности и установили границу применимости модели в 30% с точки зрения погрешности результатов вычислений для стационарной ламинарной конвекции в идеальном газе. Несмотря на указанные недостатки высокий интерес к упрощенной в данном приближении модели объясняется прежде всего существенным сокращением времени вычислений. Так, в работе Винниченко Н. А. и Уварова А. В. [6] решение нестационарной задачи об остывании нагретого газа в прямоугольной полости с холодными стенками было получено с 500-кратным снижением расчетного времени. Такое преимущество упрощенных приближением Буссинеска моделей делает их привлекательными для реализации с помощью самых современных средств вычислительной математики. В качестве примера такой реализации в своей работе Козлов В. К., Кудряшов Н. А. и Чмыхов М. А. реализовали алгоритм PISO (Pressure-Implicit with Splitting of Operators) в оригинальном решателе задачи моделирования естественной конвекции на базе свободно распространяемого комплекса программ OpenFOAM [7].

Проблема исследования и постановка задачи. В данной работе использован адаптированный для современного компилятора GNU gfortran (поддержка стандарта ISO/IEC 1539-1:2023 Fortran 2023) программный комплекс «Двумерные эллиптические течения» лаборатории вычислительной гидродинамики Школы компьютерных наук (ШКН) Тюменского государственного университета. К реализует канонический алгоритм численного решения SIMPLER (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations — Revised) с использованием аппроксимации конвективно-диффузионных потоков по степенному закону [8]. Ранее в статьях [9, 10] были опубликованы вывод дискретных аналогов уравнения энергии в дивергентном виде и результаты численного моделирования естественной конвекции в различных точках бифуркаций.

По результатам цикла численных экспериментов установлен энергетически выгодный режим течения в условиях естественной конвекции при значениях критериев подобия $Pr = 6.94$, $Gr = 886.89$

Рассмотрено нестационарное течение несжимаемой вязкой жидкости в условиях свободной (естественной) конвекции в квадратной области с адиабатическими боковыми стенками в приближении Буссинеска (1), расположенной в поле действия силы тяжести:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0)), \quad (1)$$

где $\rho_0 = const$ — начальное значение плотности; $\beta = const = -1/\rho(\partial\rho/\partial T)_p$ — коэффициент объемного теплового расширения. Отношение температур нижней T_h и верхней T_c стенок определено неравенством $T_h > T_c$. Жидкость в начальный момент времени находится в состоянии покоя. Параметры теплофизических свойств жидкости постоянны. Размер стороны квадрата $l = 1$ (рис. 1). Значение средней температуры стенок T_0 в (1) определяется, как среднее арифметическое постоянных температур верхней и нижней стенки квадратной области [11]:

$$T_0 = \frac{T_h + T_c}{2}, \quad T_h > T_c \quad (2)$$

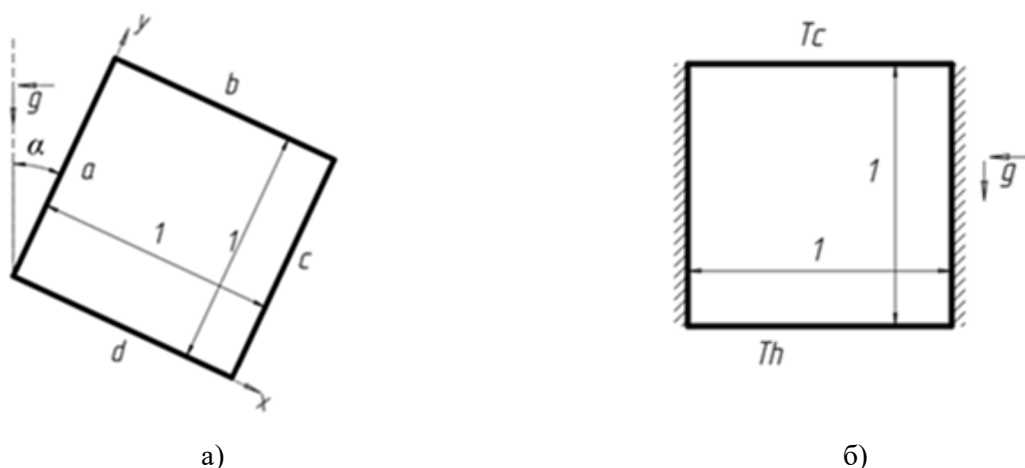


Рис. 1. Изучаемая область: а) общая формулировка; б) задача естественной конвекции в квадратной области с адиабатическими боковыми стенками, $\alpha = 0$

В начальный момент времени жидкость в расчетной области находится в состоянии покоя. С течением времени в процессе передачи тепла от горячей стороны ($T_h > T_c$) квадратной области происходит конвекция жидкости, при определенных условиях принимающая форму одного или нескольких вихрей. Наблюдаемый эффект перехода между одно вихревым и двух вихревым течением определяет точки бифуркации, изменение температурных полей в которых определяет адекватность математической модели. По результатам ранее проведенных Шарифуллин А. Н. и Сагитовым Р. В. исследований модели течения в условиях естественной конвекции при различных положениях расчетной области в поле силы тяжести [12], установлено, что обладающая большей потенциальной энергией жидкость менее устойчива. К такому же заключению приходят Зубков П.Т., Канашина М.В. и Калабин Е.В. в своей работе [13]. Таким образом, величина потенциальной энергии для различных видов течения должна быть различна.

Математическая модель. В численном эксперименте использована система нестационарных уравнений в приближении Буссинеска [9, 10, 13] для квадратной области, находящейся под углом α в поле силы тяжести. Для моделирования исследуемой в данном примере (рис. 1) задачи естественной конвекции угол α принят равным нулю. Поскольку существенного изменения конфигурируемой части программного комплекса «Двумерные эллиптические течения» в следствии обнуления источникового члена с точки зрения трудоемкости и счета не происходит, в работе использована система уравнений более общего случая.

Безразмерная форма системы уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - Gr \cdot \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \cdot \sin \alpha, \quad (3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial Y} + \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + Gr \cdot \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \cdot \cos \alpha, \quad (4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right). \quad (6)$$

Здесь безразмерные переменные:

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad V = \frac{v}{\tilde{v}}, \quad U = \frac{u}{\tilde{v}}, \quad \tau = \frac{t}{\tilde{\tau}}, \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}, \quad (7)$$

Характерные переменные обезразмеривания определены следующим образом:

$$\tilde{p} = \frac{p + \rho_0 g(x \sin \alpha + y \cos \alpha)}{\rho_0 \tilde{v}^2}, \quad L = l, \quad \tilde{v} = \frac{\mu}{\rho_0 L}, \quad \tilde{\tau} = \frac{\rho_0 L^2}{\mu}. \quad (8)$$

Критерии подобия: число Прандтля (9) и Грасгофа (10)

$$Pr = \frac{c\mu}{k}, \quad (9)$$

$$Gr = \frac{g\beta(T_h - T_c)L^3\rho_0^2}{\mu^2}. \quad (10)$$

Граничные условия задачи:

$$\left. \begin{array}{l} X = 0 : \\ X = 1 : \\ Y = 0 : \\ Y = 1 : \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \\ \theta = 0 \\ \theta = 1 \end{array} \right\} U = V = 0. \quad (11)$$

Начальные условия задачи:

$$\tau = 0 : \theta = 0, \quad U = V = 0 \quad (12)$$

Вид конвективного течения формируется в начальный момент времени размещением в прилегающих к середине нижней или левой стенки расчетной области контрольных объемах мгновенным точечным источником с температурой $\theta = 2$.

Расчет полей скорости, температуры и давления выполнен численно.

Анализ полученных результатов

Предположение о различном уровне потенциальной энергии E_p одновихревых и двухвихревых течений проверено расчетом в приближении Буссинеска — выразим неизвестную переменную β в (1) с помощью числа Грасгофа (10):

$$\beta = \frac{\mu^2 Gr}{g(T_h - T_c)L^3\rho_0^2} \quad (13)$$

Недостатком стационарных решений уравнений математических моделей течений в условиях естественной конвекции в приближении Буссинеска является линейное распределение температуры, так как при этом интегрирование приводит к равенству потенциальных энергий E_p :

$$E_p = \int_0^l \int_0^l y g \rho dx dy = g \rho_0 \int_0^l \int_0^l y (1 - \beta(T - T_0)) dx dy \quad (14)$$

и, подставляя безразмерные величины X , Y и θ (7), получим:

$$E_p = \frac{1}{2} \left(g \rho_0 L^3 - \frac{\mu^2 Gr}{2 \rho_0} \right) - \frac{\mu^2 Gr}{\rho_0} \int_0^1 Y \theta dX dY \quad (15)$$

Таким образом, с учетом постоянства величин, итоговая разность потенциальных энергий одно вихревого и двух вихревого течения пропорциональна интегралу разности значений температур:

$$\Delta E_p \sim \int_0^1 \int_0^1 Y \theta dX dY \approx \sum_{i=1}^{L1} \sum_{j=1}^{M1} Y(i, j) \theta(i, j) \quad (16)$$

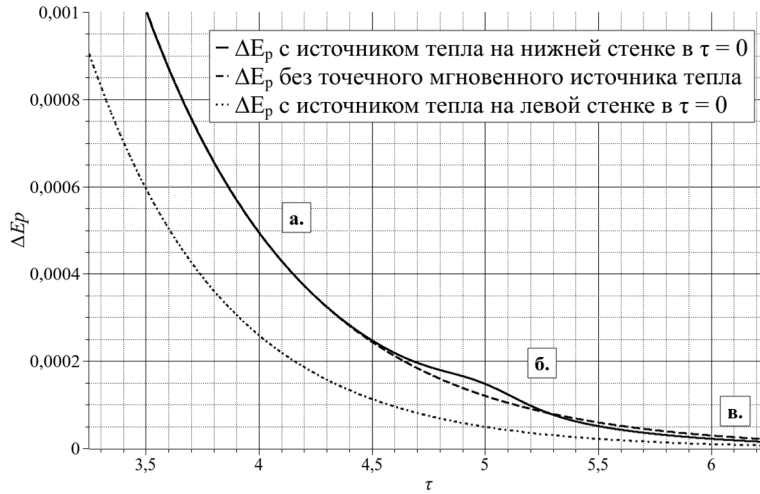


Рис. 2. Модуль изменение разности потенциальных энергий в точке бифуркации:
а) область перехода ($\tau < 4.5$); б) несимметричное одно вихревое течение ($\tau > 4.5$);
в) область стабилизированного температурного поля ($\tau > 6$)

Результаты численного эксперимента получены в виде полей скоростей, температуры и давления на временных срезах через каждые 100 итераций. На рис. 2 представлен фрагмент графика изменения разности потенциальных энергий с течением времени вблизи области критической точки бифуркации для следующих значений чисел Прандтля (9) и Грасгофа (10):

$$Pr = 6.94, \quad Gr = 886.89,$$

что соответствует числу Рэлея ($Ra = 6120,3166$) между первым и вторым минимальными критическими числами Рэлея, полученными аналитически Гершуни Г.З. [14]. Линии графика соответствуют трем начальным условия численного эксперимента: без мгновенного точечного источника энергии; с точечными мгновенными источниками энергии в начальный момент времени на нижней и левой стенке квадратной области соответственно.

Общий вид линий тока вихревых течений в точках бифуркации представлен на рис. 3.

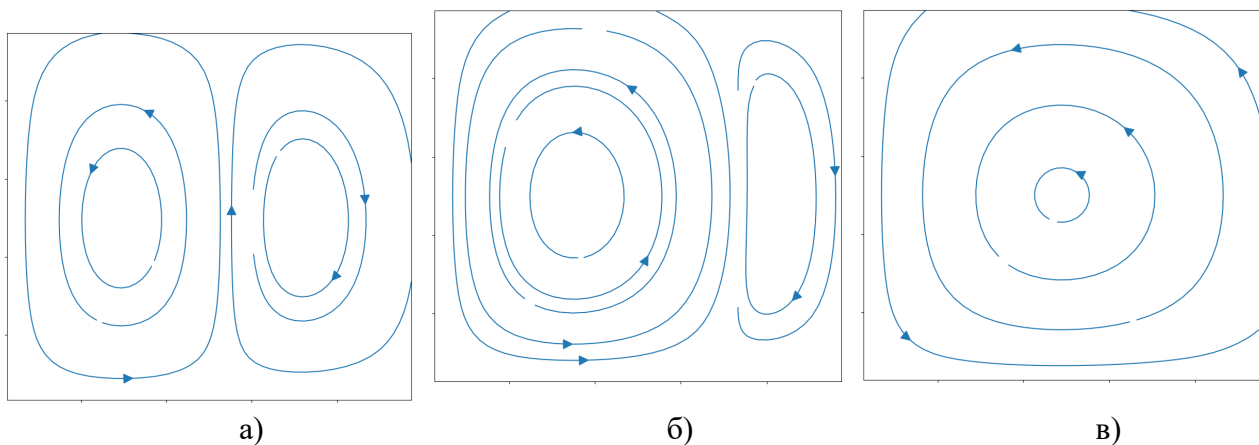


Рис. 3. Вихревые течения: а) симметричное двух вихревое течение; б) эффект перехода; в) несимметричное одно вихревое течение ($\tau > 11.5$)

Из полученных результатов можно сделать следующий **вывод** о более выгодном энергетически режиме вихревого течения. Принимая во внимание то, что течения подобны, если их числа Pr и Gr одинаковы [9], можно утверждать, что для всех случаев с числами $Pr = 6.94$, $Gr = 886.89$ одно вихревой режим энергетически выгоднее, чем двух вихревой. Следует отметить ускорение времени стабилизации температурного поля в квадратной области при размещении точечного мгновенного источника энергии вблизи середины левой стенки области, «запускающего» энергетически более эффективный вихрь в жидкости.

Заключение/ В результате исследования течения в условиях свободной (естественной) конвекции в приближении Буссинеска установлен энергетически выгодный режим естественной конвекции несжимаемой жидкости в квадратной области с теплоизолированными боковыми стенками (рис. 3в), соответствующий общим положениям об устойчивости течения, изложенным в работах [11, 12, 13, 14]. Следовательно, данную математическую модель можно считать достоверной. Данная тестовая задача пригодна для проверки достоверности математической модели при решении учебных задач и, благодаря использованию фундаментальных законов сохранения физических величин, для применения в комплексе тестовых задач при разработке программных комплексов гидродинамического моделирования промышленного или коммерческого назначения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башев А. А. О выборе математических моделей, идентификации и адекватности динамических систем / А. А. Башев // Актуальные проблемы электроэнергетики : сборник научно-технических статей: посвящается 80-летию со дня рождения проф. С. В. Хватова, Нижний Новгород, 21 декабря 2018 года / Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Образовательно-научный институт электроэнергетики. — Нижний Новгород: Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, 2018. — С. 66-69. — EDN XTPIDJ.
2. Ряжских В. И., Попов М. И. О численном интегрировании нестационарного неоднородного бигармонического уравнения в задачах кондуктивной свободной конвекции / В. И. Ряжских, М. И. Попов // Вестник Воронежского государственного технического университета. — 2014. — Т. 10, № 1. — С. 56-62. — EDN RWUBRH.

3. Попов М. И., Соболева Е. А. Приближенное аналитическое решение внутренней задачи кондуктивно-ламинарной свободной конвекции / М. И. Попов, Е. А. Соболева // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. — 2016. — № 4(70). — С. 78-84. — DOI 10.20914/2310-1202-2016-4-78-84. — EDN XWESHF.
4. Черкасов С. Г., Лаптев И. В., Ананьев А. В., Городнов А. О. Математические модели естественной конвекции / С. Г. Черкасов, И. В. Лаптев, А. В. Ананьев, А. О. Городнов // Труды седьмой Российской национальной конференции по теплообмену: В 3х томах, Москва, 22–26 октября 2018 года. Том 1. — Москва: Издательский дом МЭИ, 2018. — С. 51-54. — EDN YUUCYN.
5. Черкасов С. Г., Лаптев И. В., Ананьев А. В., Городнов А. О. Ламинарная естественная конвекция газа в замкнутой квадратной области // Тепловые процессы в технике. — 2018. — Т. 10, № 5-6. — С. 182-191. — EDN YPQCQX.
6. Винниченко Н. А., Уваров А. В. Модернизация приближения Обербека-Буссинеска для решения нестационарных задач конвекции в замкнутой полости / Н. А. Винниченко, А. В. Уваров // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. — 2010. — № 6. — С. 28-32. — EDN NBFKSR.
7. Козлов В. К., Кудряшов Н. А., Чмыхов М. А. Математическое моделирование конвекции в поле сил тяжести, в приближении Буссинеска с использованием OpenFOAM // Вестник Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". — 2018. — Т. 7, № 4. — С. 347-355. — DOI 10.1134/S2304487X18040053. — EDN XWJIYP.
8. Патанкар С. В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости [Книга]. — Москва : Энергоатомиздат, 1984.
9. Томчик П. И., Кислицын А. А., Зубков П. Т. Численное исследование механической устойчивости течения в условиях естественной конвекции / П. И. Томчик, П. Т. Зубков, А. А. Кислицын // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. — 2024. — Т. 10, № 3(39). — С. 71-87. — DOI 10.21684/2411-7978-2024-10-3-71-87. — EDN BWZRPE.
10. Томчик П. И., Кислицын А. А. Численное исследование устойчивости естественной конвекции / П. И. Томчик, А. А. Кислицын // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. — 2024. — Т. 10, № 4(40). — С. 50-67. — DOI 10.21684/2411-7978-2024-10-4-50-67. — EDN AWWXIB.
11. Зубков П. Т., Нарыгин Э. И. Труды седьмой Российской национальной конференции по теплообмену: в 3 т. Москва, 22–26 октября 2018 года. Том 1 / Зубков П.Т., Нарыгин Э.И. // Москва: Издательский дом МЭИ, 2018. — С. 323-326. — EDN VSEQHP.
12. Сагитов Р. В., Шарифулин А. Н. Бифуркации и устойчивость стационарных режимов конвективных течений в наклоненной прямоугольной полости / Р. В. Сагитов, А. Н. Шарифулин // Вычислительная механика сплошных сред. — 2018. — Т. 11, № 2. — С. 185-201. — DOI 10.7242/1999-6691/2018.11.2.15. — EDN XUAMVV/
13. Зубков П.Т., Канашина М.В., Калабин Е.В. Процесс переноса тепла естественной конвекцией в квадратной полости, температура одной из стенок которой изменяется по синусоидальному закону / Зубков П.Т., Канашина М.В., Калабин Е.В. // ТВТ/ 2004/ Том 42, вып. 1, 118–124.
14. Ландау Л. Д. Теоретическая физика: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц; отв. ред. Л. П. Питаевский. Том 6: Гидродинамика. — Москва : Наука, 1988. — 736 с.