

ВОЗМОЖНОСТИ ПРОГРАММЫ GEOGEBRA ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Аннотация. Статья посвящена возможностям использования программы GeoGebra при подготовке к ЕГЭ по математике профильного уровня. Рассмотрены типовые задания повышенного уровня сложности, при изучении которых использование динамических чертежей является целесообразным. Приведены примеры чертежей к таким задачам.

Ключевые слова: GeoGebra, динамические чертежи, единый государственный экзамен, планиметрия, стереометрия, задание с параметром.

Введение. Одним из главных испытаний для современных российских школьников остается единый государственный экзамен (ЕГЭ). Этот экзамен является социальным лифтом, позволяющим попасть в ведущие высшие учебные заведения нашей страны. Подготовка к экзамену требует большого морального и интеллектуального труда. В результате в ученической среде растет конкуренция, а уровень умственной нагрузки и стресса достигает критических значений. Одним из способов решения этой проблемы может стать применение современных образовательных технологий.

Цифровые технологии оказывают все большее влияние на человеческую жизнь, в том числе и на сферу образования. Так, в указе Президента РФ большое внимание уделено важности применения различных информационных и коммуникационных технологий в процессе обучения [12]. Такие инновации, по нашему мнению, не только улучшают качество образования и делают его доступнее для учащихся, но и оптимизируют работу педагогов.

Государственная программа РФ о развитии образования содержит в себе следующую задачу: «...обеспечение возможности детям получать качественное общее образование в условиях, отвечающих современным требованиям, независимо от места проживания ребенка, в том числе за счет ... разработки и верификации цифрового образовательного контента, содержащего интерактивные и адаптивные цифровые инструменты» [13].

Т. С. Ширикова отмечает высокую эффективность систем динамической математики на уроках геометрии в основной школе, в частности программы GeoGebra, чему и посвящает свое диссертационное исследование [17].

Н. В. Иванчук и М. Д. Горощенко пишут о преимуществах использования динамических чертежей для участников образовательного процесса. Они выделяют следующие возможности для учителей: «Пошагово выводить подлежащий усвоению новый учебный материал на экран; направлять мыслительную деятельность учащихся, а не выдавать готовые ответы» [8]; для учащихся: «Проводить небольшие эксперименты, позволяющие увидеть закономерности, связи между изучаемыми объектами» [8].

В научных исследованиях активно рассматриваются вопросы применения систем динамической математики при подготовке к ЕГЭ. Так Л. В. Бойко и Е. М. Лобанова в своей статье пишут о возможности оптимизации подготовки к заданию с параметром с помощью чертежей, выполненных в GeoGebra. Авторы отмечают, что «такие средства обучения как GeoGebra позволят преодолеть страх перед не решаемыми, по мнению многих школьников, задач с параметром» [7]. Отметим также статью Д. А. Кирилловой, посвященную методическому аспекту

использования динамических чертежей в рамках подготовки к решению систем уравнений с параметром [9].

Н. С. Алышова в своем исследовании отмечает потенциал использования динамических чертежей при подготовке к решению планиметрических задач, а также задач на исследование функций [6].

Несмотря на возрастающее внимание исследователей к вопросу о внедрении в учебный процесс цифровых средств, их использование в процессе подготовки к ЕГЭ по математике наблюдается в малочисленных онлайн-школах и у отдельных репетиторов, а в общеобразовательных школах практически отсутствует.

Проблема исследования. Современные технологии позволяют в определенной степени усовершенствовать систему школьного математического образования. Таким образом, задачей данного исследования является демонстрация возможностей программы GeoGebra при подготовке к ЕГЭ по математике.

Материалы и методы. В процессе подготовки чертежей, представленных в статье, использовалась программа динамической математики «GeoGebra Classic» [1], официальные сборники задач для подготовки к ЕГЭ по математике, научная и учебно-методическая литература, посвященная применению GeoGebra на уроках математики.

Результаты. GeoGebra как программа для создания динамических чертежей обладает следующими возможностями:

- *Доступность платформы.* GeoGebra является бесплатной кроссплатформенной программой, с полной поддержкой русского языка. Возможна как установка программы на компьютер или смартфон, так и работа с ней онлайн на одноименном сайте.

- *Гибкость настроек:* в GeoGebra есть возможность настройки как интерфейса программы, так и внешнего вида создаваемых чертежей.

- *Наглядность и точность чертежей.* Программа предоставляет широкие возможности для работы со стереометрическими чертежами: изменение положения фигуры в пространстве, построение выносных чертежей в сечениях фигуры, создание разверток фигур и т.п.

- *Динамичность чертежей* позволяет наблюдать изменения созданного чертежа при модификации исходных данных в задачах с параметрами (с использованием «ползунков») и в геометрических задачах с неоднозначно определенными условиями. Динамичность чертежа помогает выявлять инвариантные свойства построенных фигур (например, сохранение параллельности или равенства отрезков при трансформациях).

- *Пошаговое построение.* В GeoGebra есть функция «протокол построения», которая позволяет демонстрировать учащимся последовательность построения, управлять отображением вспомогательных конструкций и скрывать отдельные шаги построения.

Основной недостаток программы — отсутствие полноценных официальных руководств на русском языке. В связи с этим, дальнейшие примеры будут сопровождаться ссылками на научную и учебно-методическую литературу, в которой описаны основные приемы создания чертежей.

Далее рассмотрим применение программы GeoGebra при подготовке к ЕГЭ по математике профильного уровня. Наиболее подходящими для использования данного программного обеспечения являются следующие типы заданий:

- Задание 14 (Стереометрическая задача).
- Задание 17 (Планиметрическая задача).
- Задание 18 (Задача с параметром).

Для демонстрации функциональных возможностей программы приведем примеры типовых задач с соответствующими интерактивными чертежами.

Задача 1. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E = 6EA$. Точка T – середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

- Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 4 : 3.
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .

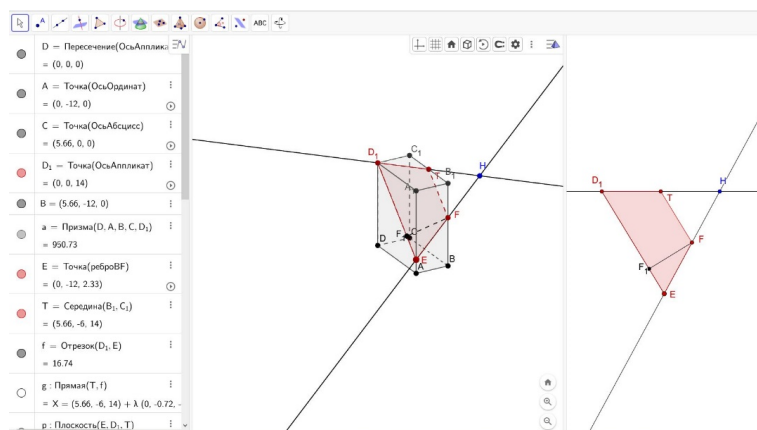


Рис. 1. Чертеж к задаче 1 [5]

На рис. 1 представлен чертеж к данной задаче. Интерактивная версия чертежа доступна по ссылке и позволяет вращать трехмерную модель, изменять размеры прямоугольного параллелепипеда, наблюдая при этом динамику изменения сечения. Методика построения стереометрических чертежей подробно описана в источнике [16].

Задача 2. Окружность с центром в точке O вписана в ромб $ABCD$ и касается его сторон AB , CD и AD соответственно в точках F , K и P .

- Докажите, что прямая FP параллельна диагонали ромба BD .
- Найдите площадь ромба $ABCD$, если известно, что $FP = 6$ и $PK = 8$.

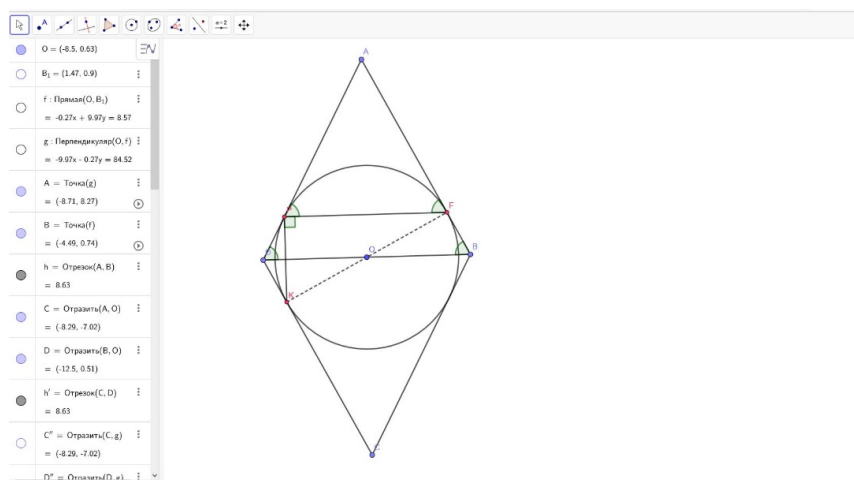


Рис. 2. Чертеж к задаче 2 [4]

При работе с интерактивным чертежом (рис. 2) учащиеся могут выдвигать гипотезы для дальнейшего решения задачи, например, о том, что треугольники AFP и ABC подобны, или что треугольник FKP является прямоугольным.

Помимо решения конкретных задач, GeoGebra эффективна для иллюстрации различных теорем и объектов, например, прямая Симсона (рис. 3).

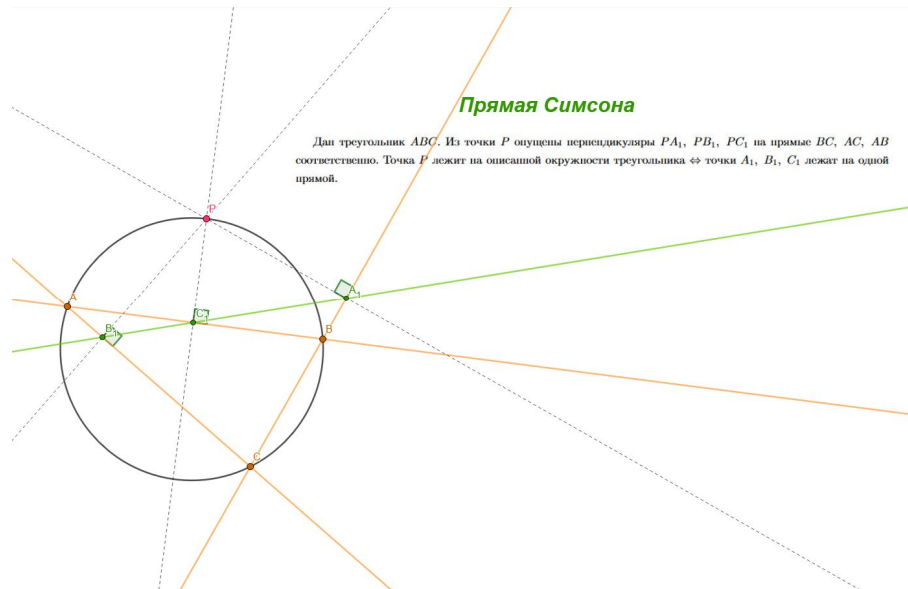


Рис. 3. Чертеж к прямой Симсона [2]

Подробнее о построении планиметрических чертежей можно прочесть в [11, 15].

Еще раз отметим, что функциональные возможности программы GeoGebra не ограничиваются геометрическими построениями. Программа также предоставляет отличный инструмент для построения графиков функций и анализа задач с параметрами.

Задача 3. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений имеет ровно два различных решения

$$\begin{cases} \log_{11}(16 - y^2) = \log_{11}(16 - a^2x^2) \\ x^2 + y^2 = 2x + 4y \end{cases} \quad (1)$$

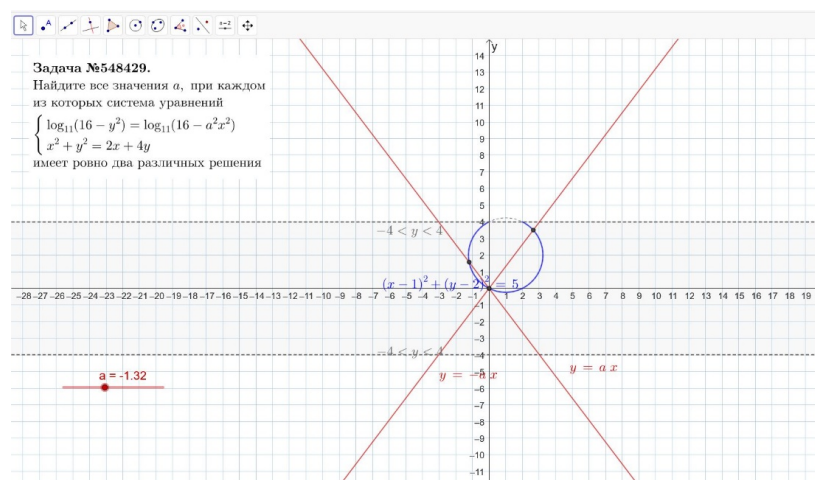


Рис. 4. Чертеж к задаче 3 [3]

С помощью данного чертежа (рис. 4) учащийся может, во-первых, исследовать вид графика заданной функции, во-вторых, проанализировать изменение графика при варьировании параметра (с помощью инструмента «ползунок»).

Построение графиков различных функций подробно описано в [10], о создании чертежей к задачам с параметром можно прочесть в [14].

Заключение. Подводя итоги, можно сказать что использование динамических чертежей GeoGebra при подготовке к ЕГЭ по математике облегчает усвоение материала учащимися, а также сокращает временные затраты преподавателя. При этом опыт работы авторов в данной области позволяет выделить следующие рекомендации по внедрению GeoGebra в учебный процесс:

– Использовать динамические чертежи эффективно на начальном этапе изучения темы и при ее повторении. На этапе закрепления знаний учащиеся должны научиться самостоятельно выполнять построение чертежей к задачам, поэтому использование готовых чертежей нежелательно.

– При работе с готовым чертежом существует риск использования не доказанных свойств фигур. Так, например, при изменении чертежа к задаче 2 (рис. 2) видно, что треугольники AFP и ABC являются подобными, но этот факт не обозначен в условии задачи и требует доказательства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. GeoGebra Classic : [сайт]. — 2025. — URL: <https://www.geogebra.org/classic> (дата обращения: 12.05.2025).
2. GeoGebra Classic : Прямая Симсона : [сайт]. — 2025. — URL: <https://www.geogebra.org/classic/dnnchbmn> (дата обращения: 12.05.2025).
3. GeoGebra Classic : Чертеж к задаче с параметром : [сайт]. — 2025. — URL: <https://www.geogebra.org/classic/dzsxw84q> (дата обращения: 12.05.2025).
4. GeoGebra Classic : Чертеж к планиметрической задаче : [сайт]. — 2025. — URL: <https://www.geogebra.org/classic/fzkmvu4j> (дата обращения: 12.05.2025).
5. GeoGebra Classic : Чертеж к стереометрической задаче : [сайт]. — 2025. — URL: <https://www.geogebra.org/classic/tgmeptev> (дата обращения: 12.05.2025).
6. Алышова Н. С. Использование программы GEOGEBRA на уроках математики как средство подготовки учащихся к ЕГЭ / Н. С. Алышова // Альманах современной науки и образования. — 2013. — № 1(68). — С. 19-21.
7. Бойко Л. В. Использование интерактивной среды программы GeoGebra при подготовке учащихся к ЕГЭ по математике / Л. В. Бойко, Е. М. Лобанова // Символ науки: международный научный журнал. — 2021. — № 2. — С. 69-72.
8. Иванчук Н. В. Использование компьютерных динамических моделей на уроках геометрии в средней школе / Н. В. Иванчук, М. Д. Горощеня // Научные исследования и инновации : сборник статей V Международной научно-практической конференции, Саратов, 12 апреля 2021 года. — Саратов: НОО «Цифровая наука», 2021. — С. 336-345.
9. Кириллова Д. А. Применение среды GeoGebra при изучении темы «Уравнение окружности» как способ перехода к решению задач с параметром / Д. А. Кириллова // Наука и школа. — 2022. — № 2. — С. 152-160. — DOI 10.31862/1819-463X-2022-2-152-160.

10. Ларин С. В. Методика обучения математике: компьютерная анимация в среде Geogebra : учебное пособие для вузов / С. В. Ларин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2024. — 233 с.
11. Люблинская И. Е. Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «GeoGebra Classic» : Пособие для учителей и учащихся 7-9 классов / И. Е. Люблинская, В. И. Рыжик. — Санкт-Петербург: СМИО Пресс, 2020. — 208 с.
12. О Стратегии развития информационного общества в Российской Федерации на 2017 — 2030 годы : указ Президента РФ от 9 мая 2017 г. № 203 // Информационно-правовой портал Гарант.ру : сайт. — URL: <https://base.garant.ru/71670570/> (дата обращения: 09.05.2025)
13. Об утверждении государственной программы Российской Федерации «Развитие образования» (с изменениями и дополнениями) : постановление Правительства РФ от 26 декабря 2017 г. № 1642 // Информационно-правовой портал Гарант.ру : сайт. — URL: <https://base.garant.ru/71848426/> (дата обращения: 09.05.2025)
14. Павлова Т. В. Создание интерактивных чертежей к заданиям с параметром из профильного ЕГЭ по математике в программе GeoGebra / Т. В. Павлова, Н. П. Камшилов // Дидактика математики: проблемы и исследования. — 2024. — № 3(63). — С. 54-62.
15. Сгибнев А. И. Геометрия на подвижных чертежах / А.И. Сгибнев — 2-е изд., пер. и доп. — Москва: МЦНМО, 2024. — 240 с.
16. Смирнов В. А. Геометрия с GeoGebra. Стереометрия / В. А. Смирнов, И. М. Смирнова. — Москва: Прометей, 2018. — 172 с.
17. Ширикова Т. С. Методика обучения учащихся основной школы доказательству теорем при изучении геометрии с использованием GeoGebra : специальность 13.00.02 «Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования)» : диссертация на соискание ученой степени кандидата педагогических наук / Ширикова Татьяна Сергеевна. — Архангельск, 2014. — 250 с.