

# ТОЧНАЯ ПО ПОРЯДКУ ОЦЕНКА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА КОЛЬЦЕ

А.С. Кутузов

С использованием метода проекционной регуляризации построено приближенное решение одной многомерной обратной задачи для уравнения теплопроводности и получена точная по порядку оценка этого решения.

**1. Постановка обратной задачи.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \Delta u(x, y, t), \quad (1)$$

в котором  $x, y \in K$ ,  $K$  – кольцо, ограниченное окружностями  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  соответственно,  $t \geq 0$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – оператор Лапласа. Пусть известны следующие начальные и граничные условия:

$$u(x, y, 0) = 0, \quad x, y \in K, \quad (2)$$

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$u|_{\Gamma_0} = f(t); \quad \Gamma_0 = \{x, y \in K : x^2 + y^2 = r_0^2, r_1 < r_0 < r_2\}, t \geq 0, \quad (4)$$

а граничное значение  $u|_{\Gamma_2}$  функции  $u(x, y, t)$  подлежит определению.

Будем искать решение этой задачи, являющееся осесимметричным, то есть таким, что

$$u(x, y, t) = u(\sqrt{x^2 + y^2}, t). \quad (5)$$

Выполним замену переменной  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Тогда задача (1)–(4) сводится к следующей:

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} \quad t \geq 0, \quad r_1 \leq z \leq r_2, \quad (6)$$

$$u|_{r=0} = 0, \quad r_1 \leq z \leq r_2, \quad (7)$$

$$u|_{z=r_1} = 0, \quad t \geq 0, \quad (8)$$

$$u|_{z=r_0} = f(t), \quad t \geq 0, \quad r_1 < r_0 < r_2, \quad (9)$$

а определить требуется  $u|_{z=r_2} = u_0(r_2, t), \quad t \geq 0$ .

Задача (6)–(9) является некорректно поставленной.

Предположим, что при  $f(t) = f_0(t) \in L_2[0, \infty)$  существует точное решение  $u_0(r_2, t) \not\equiv 0$  поставленной задачи, которое принадлежит пространству  $W_2^1[0, \infty)$ , причем для этого решения  $u_0(r_2, 0) = 0$  и существует число  $T > 2$  такое, что при  $t \geq T$

$$u_0(r_2, t) = 0. \quad (10)$$

Кроме того,  $u_0(r_2, t) \in M_r$ , где

$$M_r = \left\{ u_0 \in W_2^1[0, \infty) : \|u_0\|_{W_2^1}^2 \leq r^2 \right\}. \quad (11)$$

Однако точное значение  $f_0(t)$  нам неизвестно, а вместо него даны некоторое приближение  $f_\delta(t) \in L_2[0, \infty)$  и уровень погрешности  $\delta > 0$  такие, что

$$\|f_0 - f_\delta\|_{L_2} \leq \delta. \quad (12)$$

Требуется, используя исходные данные  $f_\delta, \delta,$  и  $M_r$  задачи (6)–(9) построить приближенное решение  $u_\delta(t)$  и оценить его отклонение  $\|u_0 - u_\delta\|_{L_2}$  от точного решения  $u_0(t) = u_0(r_2, t)$ .

Используя метод разделения переменных, можно показать, что к задаче (6)–(9) можно применять преобразование Фурье на полупрямой по  $t$  в предположении, что

$$u(z, t) = 0 \text{ при } t < 0. \quad (13)$$

**2. Сведение уравнения (6) к обыкновенному дифференциальному уравнению.** Учитывая (13), в качестве рабочего пространства  $\overline{H}$  возьмем комплексный вариант  $L_2[0, \infty)$  над полем действительных чисел, то есть его элементы имеют вид  $u(t) + iv(t)$ , где  $u, v \in L_2[0, \infty)$  и норма в нем определяется по формуле  $\|u + iv\|_{\overline{H}}^2 = \|u\|_{L_2}^2 + \|v\|_{L_2}^2$ . Тогда пространство  $\overline{H}$  будет гильбертовым, а преобразование Фурье на нем определим формулой

$$F[u(t)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(t) e^{-it\tau} dt, \quad \tau \geq 0. \quad (14)$$

Из теоремы Планшереля, сформулированной в [2], следует изометричность преобразования  $F$ , определенного формулой (14).

Применяя к уравнению (6), с учетом условия (13), преобразование Фурье  $F$ , получаем

$$\frac{d^2 \hat{u}(z, \tau)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\hat{u}(z, \tau)}{dz} = i\tau \hat{u}(z, \tau); \quad \tau \geq 0, \quad r_1 \leq z \leq r_2, \quad (15)$$

где  $\hat{u}(z, \tau) = F[u(z, t)]$ .

Для уравнения (15) поставим задачу, добавив условия

$$\hat{u}(r_1, \tau) = 0, \quad \tau \geq 0, \quad (16)$$

$$\hat{u}(r_0, \tau) = \hat{f}(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (17)$$

где  $\hat{f}(\tau) = F[f(t)]$ .

Из (15)–(17) требуется определить  $\hat{u}(r_2, \tau) = \hat{u}_0(\tau), \tau \geq 0$ .

Выполним замену

$$\hat{u}(z, \tau) = \hat{v}(z, \tau) \cdot z^{-\frac{1}{2}}, \quad (18)$$

предложенную в [5, с.131], чтобы привести уравнение (15) к нормальному виду.

После преобразований задача (15)–(17) сводится к следующей:

$$\frac{d^2 \hat{v}(z, \tau)}{dz^2} + \frac{1}{4z^2} \hat{v}(z, \tau) = i\tau \hat{v}(z, \tau); \quad \tau \geq 0, \quad r_1 \leq z \leq r_2, \quad (19)$$

$$\hat{v}(r_1, \tau) = 0, \quad \tau \geq 0, \quad (20)$$

$$\hat{v}(r_0, \tau) = \hat{f}(\tau) \sqrt{r_0}, \quad \tau \geq 0. \quad (21)$$

Далее, пусть

$$z = \theta + r_1, \quad \hat{v}(\theta + r_1, \tau) = \hat{w}(\theta, \tau). \quad (22)$$

Тогда из (19)–(22) имеем

$$\frac{d^2 \hat{w}(\theta, \tau)}{d\theta^2} + \frac{1}{4(\theta + r_1)^2} \hat{w}(\theta, \tau) = i\tau \hat{w}(\theta, \tau); \quad \tau \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq r_2 - r_1, \quad (23)$$

$$\hat{w}(0, \tau) = 0, \quad \tau \geq 0, \quad (24)$$

$$\hat{w}(r_0 - r_1, \tau) = \hat{f}(\tau) \sqrt{r_0}, \quad \tau \geq 0, \quad r_1 \leq r_0 \leq r_2. \quad (25)$$

В работе [1] указано, что решение задачи (23), (24) линейно зависит от решения задачи

$$\frac{d^2 e(\theta, \tau)}{d\theta^2} + \frac{1}{4(\theta + r_1)^2} e(\theta, \tau) = i\tau e(\theta, \tau); \quad \tau \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq r_2 - r_1, \quad (26)$$

$$e(0, \tau) = 0, \quad \tau \geq 0, \quad (27)$$

$$e'_\theta(0, \tau) = 1, \quad \tau \geq 0, \quad (28)$$

то есть имеет место соотношение

$$\hat{w}(\theta, \tau) = l(\tau)e(\theta, \tau), \quad \tau \geq 0, \theta \in [0, r_2 - r_1], \quad (29)$$

где  $l(\tau)$  – произвольная функция.

Используя (25), находим

$$l(\tau) = \frac{\hat{f}(\tau)\sqrt{r_0}}{e(r_0 - r_1, \tau)}, \quad \tau \geq 0. \quad (30)$$

Из (18), (22), (29), (30) следует, что

$$\hat{u}(z, \tau) = \frac{\hat{f}(\tau)\sqrt{r_0}}{e(r_0 - r_1, \tau)} e(z - r_1, \tau) z^{-\frac{1}{2}}, \quad z \in [r_1, r_2], \tau \geq 0. \quad (31)$$

$$\text{Тогда при } \tau \geq 0 \quad \hat{u}(r_2, \tau) = \frac{\hat{f}(\tau)\sqrt{r_0}}{e(r_0 - r_1, \tau)\sqrt{r_2}} e(r_2 - r_1, \tau).$$

**Теорема 1.** Функция  $l(\tau)$ , определенная формулой (30) непрерывна при  $\tau \geq 0$ .

*Доказательство.* Так как  $\hat{f}(\tau)$  и  $e(r_0 - r_1, \tau)$  непрерывны при  $\tau \geq 0$ , то для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что для любого  $\tau \geq 0$   $e(r_0 - r_1, \tau) \neq 0$ .

Предположим противное, т.е. найдется число  $\tau_0 > 0$  такое, что  $e(r_0 - r_1, \tau_0) = 0$ .

Рассмотрим пространство  $H_0 = L_2[0, r_0 - r_1]$  над полем комплексных чисел и оператор  $A_1 : H_0 \rightarrow H_0$ , определяемый формулами

$$A_1 u = \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{1}{4(\theta + r_1)^2} u; \quad u \in D(A_1), \quad (32)$$

$$D(A_1) = \{u : u, A_1 u \in H_0, u(0) = u(r_0 - r_1) = 0\}. \quad (33)$$

Из (32), (33) следует, что оператор  $A_1$  самосопряжен, поэтому согласно [2] его спектр  $Sp(A_1) \subset \mathbb{R}$ .

Из (26) следует, что  $A_1 e(\theta, \tau_0) = i\tau_0 e(\theta, \tau_0)$ ;  $0 \leq \theta \leq r_0 - r_1$ .

Точка  $i\tau_0$  не принадлежит спектру оператора  $A_1$ , следовательно, уравнение  $(A_1 - i\tau_0 I)e(\theta, \tau_0) = 0$  имеет единственное решение  $e(\theta, \tau_0) = 0$  при всех  $0 \leq \theta \leq r_0 - r_1$ . Значит и  $e'_\theta(0, \tau_0) = 0$ , что противоречит условию (28). Теорема доказана.

*Замечание:* при доказательстве теоремы мы считали, что нулевая точка не принадлежит спектру оператора  $A_1$ . Следуя теоремам и определениям из [2, 3], для этого достаточно, варьируя  $r_1$ , добиться выполнения одного из неравенств:  $\inf_{\|u\|=1} (A_1 u, u) > 0$  или  $\sup_{\|u\|=1} (A_1 u, u) < 0$ .

**3. Оценка по порядку для решения задачи (26)–(28).** Перепишем уравнение (26) в виде  $\frac{d^2 e(\theta, \tau)}{d\theta^2} - i\tau e(\theta, \tau) = -\frac{1}{4(\theta + r_1)^2} e(\theta, \tau)$ . Решая полученное уравнение методом вариации постоянных и, используя условия (27), (28), сведем задачу (26)–(28) к следующему интегральному уравнению

$$e_1(\theta, \lambda) = \frac{\text{sh } \mu_0 \lambda \theta}{\mu_0 \lambda} - \int_0^\theta \frac{\text{sh } \mu_0 \lambda (\theta - \xi)}{\mu_0 \lambda} \frac{1}{4(\xi + r_1)^2} e_1(\xi, \lambda) d\xi, \quad (34)$$

где  $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ ,  $\theta, \xi \in [0, r_2 - r_1]$ ,  $\lambda = \sqrt{\tau} \geq 0$ ,  $e_1(\theta, \lambda) = e(\theta, \tau)$ .

**Теорема 2.** Существуют числа  $\lambda_0 > 0$ ,  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$  такие, что для любого  $\lambda \geq \lambda_0$  выполняется неравенство:  $c_1 \frac{e^{\frac{\theta}{\sqrt{2}}\lambda}}{\lambda} \leq |e_1(\theta, \lambda)| \leq c_2 \frac{e^{\frac{\theta}{\sqrt{2}}\lambda}}{\lambda}$ .

*Доказательство.* Выполним замену  $\varepsilon(\theta, \lambda) = \frac{\mu_0 \lambda}{\text{sh } \mu_0 \lambda \theta} e_1(\theta, \lambda)$ , тогда уравнение (34) придет к виду

$$\varepsilon(\theta, \lambda) = 1 - \int_0^\theta \frac{\text{sh } \mu_0 \lambda (\theta - \xi) \text{sh } \mu_0 \lambda \xi}{\mu_0 \lambda \text{sh } \mu_0 \lambda \theta} \frac{1}{4(\xi + r_1)^2} \varepsilon(\xi, \lambda) d\xi. \quad (35)$$

Функция  $\frac{1}{4(\theta + r_1)^2}$  непрерывна при всех  $\theta \in [0, r_2 - r_1]$ , следовательно, найдется постоянная  $c > 0$  такая, что  $\frac{1}{4(\theta + r_1)^2} \leq c$ .

Далее, при  $\lambda \rightarrow \infty$   $\left| \frac{\text{sh } \mu_0 \lambda (\theta - \xi) \text{sh } \mu_0 \lambda \xi}{\mu_0 \lambda \text{sh } \mu_0 \lambda \theta} \right| \rightarrow 0$ , поэтому для любого  $\alpha > 0$  найдется  $\lambda_0 > 0$  такое, что для всех  $\lambda \geq \lambda_0$   $\left| \frac{\text{sh } \mu_0 \lambda (\theta - \xi) \text{sh } \mu_0 \lambda \xi}{\mu_0 \lambda \text{sh } \mu_0 \lambda \theta} \right| < \alpha$ .

Обозначим  $q = \int_0^\theta \left| \frac{\text{sh } \mu_0 \lambda (\theta - \xi) \text{sh } \mu_0 \lambda \xi}{\mu_0 \lambda \text{sh } \mu_0 \lambda \theta} \right| \frac{1}{4(\xi + r_1)^2} d\xi$ . Тогда в силу полученных оценок будем иметь:  $q < \alpha c(r_2 - r_1)$ . Поскольку  $\alpha$  – любое, то его можно подобрать таким образом, чтобы величина  $q$  оказалась строго меньше  $1/2$ .

Покажем, что решение уравнения (35) можно искать в виде  $\varepsilon(\theta, \lambda) = \sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon_v(\theta, \lambda)$ , где  $\varepsilon_0(\theta, \lambda) = 1$ ,  $\varepsilon_{v+1}(\theta, \lambda) = - \int_0^\theta \frac{\text{sh } \mu_0 \lambda (\theta - \xi) \text{sh } \mu_0 \lambda \xi}{\mu_0 \lambda \text{sh } \mu_0 \lambda \theta} \frac{1}{4(\xi + r_1)^2} \varepsilon_v(\xi, \lambda) d\xi$ .

Применяя индукцию по  $v$ , можно показать, что  $|\varepsilon_v(\theta, \lambda)| \leq q^v$ , где  $v = 0, 1, 2, \dots$

Поскольку  $q < 1$ , то ряд  $\sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon_v(\theta, \lambda)$  равномерно и абсолютно сходится при  $\theta \in [0, r_2 - r_1]$ ,  $\lambda \geq \lambda_0$  и его сумма  $\varepsilon(\theta, \lambda)$  равномерно ограничена при  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Таким образом, получаем:

$$1 - \frac{q}{1 - q} \leq |\varepsilon(\theta, \lambda)| \leq \frac{1}{1 - q}. \quad (36)$$

Поскольку  $\frac{\text{sh } \mu_0 \lambda \theta}{\mu_0 \lambda} \varepsilon(\theta, \lambda) = e_1(\theta, \lambda)$  и  $\left| \frac{\text{sh } \mu_0 \lambda \theta}{\mu_0 \lambda} \right| \sim \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{\lambda \theta}{\sqrt{2}}}}{\lambda}$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ , то из (36) находим:

$$c_1 \frac{e^{\frac{\theta}{\sqrt{2}}\lambda}}{\lambda} \leq |e_1(\theta, \lambda)| \leq c_2 \frac{e^{\frac{\theta}{\sqrt{2}}\lambda}}{\lambda}.$$

Теорема доказана.

**4. Оценка приближенного значения функции  $l(\tau)$ .** В силу изометричности преобразования Фурье  $F$ , определенного формулой (14) и в силу оценки (12) имеем

$$\|\widehat{f}_\delta(\tau) - \widehat{f}_0(\tau)\|_{L_2} \leq \delta, \quad (37)$$

где  $\widehat{f}_\delta(\tau) = F[f_\delta(t)]$ ,  $\widehat{f}_0(\tau) = F[f_0(t)]$ .

Далее, пусть  $l_0(\tau) = \frac{\widehat{f}_0(\tau)\sqrt{r_0}}{e(r_0 - r_1, \tau)}$ ,  $l_\delta(\tau) = \frac{\widehat{f}_\delta(\tau)\sqrt{r_0}}{e(r_0 - r_1, \tau)}$ . Тогда

$$\|l_\delta(\tau) - l_0(\tau)\|_{L_2}^2 = \int_0^{\lambda_0^2} \frac{r_0}{e^2(r_0 - r_1, \tau)} |\widehat{f}_\delta(\tau) - \widehat{f}_0(\tau)|^2 d\tau + \int_{\lambda_0^2}^{\infty} \frac{r_0}{e^2(r_0 - r_1, \tau)} |\widehat{f}_\delta(\tau) - \widehat{f}_0(\tau)|^2 d\tau.$$

Поскольку функция  $e(r_0 - r_1, \tau)$  непрерывна для всех  $\tau \geq 0$  и из теоремы 1 следует, что она нигде не обращается в нуль, то  $\frac{r_0}{e^2(r_0 - r_1, \tau)}$  непрерывна при  $\tau \in [0, \lambda_0^2]$ , значит на этом отрезке

она достигает своего наибольшего значения, то есть  $\frac{r_0}{e^2(r_0 - r_1, \tau)} \leq c_3^2$ , где

$$c_3^2 = \max_{\tau \in [0, \lambda_0^2]} \left\{ \frac{r_0}{e^2(r_0 - r_1, \tau)} \right\}.$$

Тем самым из (37) следует

$$\int_0^{\lambda_0^2} \frac{r_0}{e^2(r_0 - r_1, \tau)} |\widehat{f}_\delta(\tau) - \widehat{f}_0(\tau)|^2 d\tau \leq c_3^2 \delta^2 \quad (38)$$

Из теоремы 2 следует, что  $\frac{r_0}{e^2(r_0 - r_1, \tau)} \leq \frac{r_0 \tau}{c_1 e^{\sqrt{2}(r_0 - r_1)\sqrt{\tau}}}$  при  $\tau \in [\lambda_0^2, \infty]$ . Так как

$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{r_0 \tau}{c_1 e^{\sqrt{2}(r_0 - r_1)\sqrt{\tau}}} = 0$ , то при  $\tau \rightarrow \infty$  функция  $\frac{r_0 \tau}{c_1 e^{\sqrt{2}(r_0 - r_1)\sqrt{\tau}}}$  ограничена, то есть существует  $c_4 > 0$

такая, что  $\frac{r_0 \tau}{c_1 e^{\sqrt{2}(r_0 - r_1)\sqrt{\tau}}} \leq c_4^2$ .

Тем самым

$$\int_{\lambda_0^2}^{\infty} \frac{r_0}{e^2(r_0 - r_1, \tau)} |\widehat{f}_\delta(\tau) - \widehat{f}_0(\tau)|^2 d\tau \leq c_4^2 \delta^2 \quad (39)$$

Из (38), (39) следует, что

$$\|l_\delta(\tau) - l_0(\tau)\|_{L_2} \leq \delta \sqrt{c_3^2 + c_4^2} \quad (40)$$

**5. Метод проекционной регуляризации.** Используя формулу (29) и обозначив  $\widehat{w}(r_2 - r_1, \tau) = \widehat{w}(\tau)$ , перепишем нашу задачу в виде операторного уравнения

$$A\widehat{w}(\tau) = \frac{1}{e(r_2 - r_1, \tau)} \widehat{w}(\tau) = l_\delta(\tau), \quad (41)$$

где  $A: \overline{H} \rightarrow \overline{H}$ .

Из теоремы 1 и формулы (41) следует инъективность операторов  $A$  и  $A^*$ , поэтому в силу леммы 6, сформулированной в работе [4], существует изометрический оператор  $Q: \overline{H} \rightarrow \overline{H}$  такой, что  $A\widehat{w}(\tau) = QC\widehat{w}(\tau)$ , где

$$C\widehat{w}(\tau) = \left| \frac{1}{e(r_2 - r_1, \tau)} \right| \widehat{w}(\tau), \quad (42)$$

то есть оператор  $C$  положителен и самосопряжен.

Таким образом, уравнение (41) может быть сведено к виду

$$C\hat{w}(\tau) = \hat{l}_\delta(\tau), \quad (43)$$

в котором  $\hat{l}_\delta(\tau) = Q^* l_\delta(\tau)$ , а  $Q^*$  – оператор, сопряженный с  $Q(\tau) = \frac{|e(r_2 - r_1, \tau)|}{e(r_2 - r_1, \tau)}$ .

Пусть  $\hat{w}_0(\tau) \in W_2^{-1}[0, \infty]$  – точное решение задачи, тогда пусть найдется постоянная  $a > 0$  такая, что  $\|\hat{w}_0\|_{L_2}^2 + \|\hat{w}'_0\|_{L_2}^2 \leq a^2$ . Значит, в частности  $\|\hat{w}'_0\|_{L_2}^2 \leq a^2$ .

Определим  $\hat{w}_0(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty w_0(t) e^{-i\tau t} dt$ . Тогда  $\hat{w}'_0(\tau) = i\tau \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty w_0(t) e^{-i\tau t} dt = i\tau \hat{w}_0(\tau)$ .

Таким образом, при  $\hat{l}_0(\tau) = Q^* l_0(\tau)$  уравнение (43) имеет точное решение  $\hat{w}_0(\tau) \in B\bar{S}_a$ , где  $\bar{S}_a = \{\hat{\gamma} : \hat{\gamma} \in \bar{H}, \|\hat{\gamma}\| \leq a\}$  и  $B\hat{\gamma}(\tau) = \frac{1}{i\tau} \hat{\gamma}(\tau)$ ,  $\tau > 0$ .

Из последнего равенства и леммы 6, сформулированной в работе [4] следует существование изометрического оператора  $Q_1 : \bar{H} \rightarrow \bar{H}$  такого, что  $B\hat{\gamma}(\tau) = B_1 Q_1 \hat{\gamma}(\tau)$ , где  $\hat{\gamma}(\tau) \in \bar{H}$ , а

$$B_1 \hat{\rho}(\tau) = \frac{1}{\tau} \hat{\rho}(\tau), \quad \tau > 0, \hat{\rho}(\tau) \in \bar{H}. \quad (44)$$

Таким образом, в силу изометричности  $Q_1$  точное решение  $\hat{w}_0(\tau) \in B_1 \bar{S}_a$ .

Из (43), (44) следует, что

$$B_1 = g(C). \quad (45)$$

Из теоремы 2:  $C \sim \frac{\tau}{e^\tau}$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Переобозначив  $\sigma = \frac{\tau}{e^\tau}$  и используя (44) и (45), получим

$$g(\sigma) \sim \ln^{-1}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \text{ при } \sigma \rightarrow 0. \quad (46)$$

Используя метод проекционной регуляризации, предложенный в [4], регуляризуем исходные данные задачи  $(\hat{l}_\delta(\tau), \delta)$ , то есть определим функцию  $\hat{l}_\delta[\tau, \hat{\alpha}(\delta)]$  следующим образом:

1) при условии  $\|\hat{l}_\delta\| > 3\sqrt{c_3^2 + c_4^2} \delta$   $\hat{l}_\delta[\tau, \hat{\alpha}(\delta)] = \begin{cases} \hat{l}_\delta(\tau) & \text{при } \tau \leq \hat{\alpha}(\delta) \\ 0 & \text{при } \tau > \hat{\alpha}(\delta) \end{cases}$ , где  $\hat{\alpha}(\delta)$  удовлетво-

ряет уравнению  $\int_{\hat{\alpha}(\delta)}^\infty |\hat{l}_\delta(\tau)|^2 d\tau = 9(c_3^2 + c_4^2) \delta^2$ .

2) при условии  $\|\hat{l}_\delta\| \leq 3\sqrt{c_3^2 + c_4^2} \delta$   $\hat{l}_\delta[\tau, \hat{\alpha}(\delta)] \equiv 0$ .

При выполнении условий 1)–2) функция  $\hat{l}_\delta[\tau, \hat{\alpha}(\delta)]$  определяется однозначно даже в случае неединственности решения уравнения в условии 1).

Далее, приближенное решение  $\hat{w}_\delta(\tau)$  уравнения (43) определим формулой

$$\hat{w}_\delta(\tau) = C^{-1} \hat{l}_\delta[\tau, \hat{\alpha}(\delta)], \quad (47)$$

где оператор  $C$  определен формулой (43), а  $\hat{l}_\delta[\tau, \hat{\alpha}(\delta)]$  – условиями 1), 2).

В силу того, что  $\hat{w}_0(\tau) \in B_1 \bar{S}_a$  и (45), (46), найдется постоянная  $c_5$  такая, что справедлива оценка

$$\|\hat{w}_\delta - \hat{w}_0\| \leq c_5 \ln^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\right). \quad (48)$$

Из теоремы, сформулированной в работе [4] следует, что оценка (48) является точной по порядку на классе  $B_1 \bar{S}_a$ , а соответствующий метод проекционной регуляризации оптимален по порядку на этом классе решений.

Чтобы окончательно получить приближенное решение  $u_\delta(t)$  исходной задачи (6)–(9) (а значит и (1)–(4)), используем сначала формулы (18), (22) и выведем оценку

$$\|\hat{u}_\delta - \hat{u}_0\| \leq \frac{c_5}{\sqrt{r_2}} \ln^{-1} \left( \frac{1}{\delta} \right),$$

а затем, применив обратное к  $F$  преобразование  $F^{-1}$ , получим  $u_\delta(t) = \operatorname{Re} \left\{ F^{-1} \left[ \hat{u}_\delta(\tau) \right] \right\}$ . Поскольку преобразование  $F$  изометрично, то для приближенного решения  $u_\delta(t)$  последняя оценка остается в силе.

### Литература

1. Танана, В.П. Об оптимальном по порядку методе решения одной обратной задачи для параболического уравнения / В.П. Танана // Докл. РАН. – 2006. – Т. 407, № 3. – С. 316–318.
2. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
3. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. – М.: Наука, 1969. – 529 с.
4. Танана, В.П. Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратных задач / В.П. Танана // Сиб. журн. индустр. матем. – 2004. – Т. 7, № 2. – С. 117–132.
5. Ватсон, Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть первая / Г.Н. Ватсон. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1949. – 748 с.

*Поступила в редакцию 29 мая 2007 г.*