

А. С. КУТУЗОВ

ОПТИМАЛЬНАЯ ПО ПОРЯДКУ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Доказана оптимальность по порядку метода проекционной регуляризации при решении задачи восстановления температурного поля и теплового потока на границе рассматриваемой области. Получены точные по порядку оценки решения.

Ключевые слова: обратные задачи теплопроводности, метод проекционной регуляризации, оптимальные по порядку оценки.

В статье рассматривается обратная граничная задача для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом. Подобные задачи могут возникнуть при решении более сложных многомерных задач, а именно, при выполнении полярной замены аргумента для перехода от двумерной задачи на кольце к одномерной задаче на отрезке [1].

1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + a(x)u(x, t), \quad (1)$$

в котором $x \in [0, 1]$, $t \geq 0$, $a(x) \leq 0$ и $a(x) \in C^2[0, 1]$. Пусть известны следующие начальные и граничные условия:

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$u(x_0, t) = f(t), \quad t \geq 0; \quad 0 < x_0 < 1, \quad (4)$$

а граничные значения $u(1, t) = u(t)$ и $\frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = v(t)$ подлежат определению. Задача (1)–(4) является некорректно поставленной.

Предположим, что при $f(t) = f_0(t) \in L_2[0, \infty)$ существуют точные решения $u_0(t) \neq 0$ и $v_0(t) \neq 0$ поставленной задачи, которые принадлежат пространству Соболева $W_2^1[0, \infty)$, причем для этих решений $u_0(0) = 0$, $v_0(0) = 0$ и существует число $T > 2$ такое, что при $t \geq T$

$$u_0(t) = 0. \quad (5)$$

Кроме того, $u_0(t), v_0(t) \in M_r$, где $M_r = \{w \in W_2^1[0, \infty) : \|w\|_{W_2^1} \leq r\}$. Однако точное значение $f_0(t)$ нам неизвестно, а вместо него даны некоторое приближение $f_\delta(t) \in L_2[0, \infty)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_0 - f_\delta\|_{L_2} \leq \delta. \quad (6)$$

Требуется, используя исходные данные f_δ , δ , и M_r задачи (1)–(4) построить приближенные решения $u_\delta(t)$ и $v_\delta(t)$, а также оценить их отклонения $\|u_0 - u_\delta\|_{L_2}$ и $\|v_0 - v_\delta\|_{L_2}$ от точных решений $u_0(t)$ и $v_0(t)$.

Благодаря наложенным на решения задачи (1)–(4) условиям и соотношению (5), к означенной задаче можно применять преобразование Фурье на полупрямой по t в предположении, что

$$u(x, t) = 0 \quad \text{при } t < 0. \quad (7)$$

2. Сведение (1)–(4) к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

Учитывая (7), в качестве рабочего пространства $\overline{H}$ возьмем комплексный вариант $L_2[0, \infty)$ над полем действительных чисел, т. е. его элементы имеют вид $u(t) + iv(t)$, где $u, v \in L_2[0, \infty)$ и норма в нем определяется по формуле $\|u + iv\|_{\overline{H}}^2 = \|u\|_{L_2}^2 + \|v\|_{L_2}^2$. Тогда пространство $\overline{H}$ — гильбертово и преобразование Фурье на нем определим следующим образом:

$$F[u(t)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(t) e^{-i\tau t} dt, \quad \tau \geq 0. \quad (8)$$

Из теоремы Планшереля, сформулированной в [2], следует изометричность преобразования F , определенного формулой (8).

Применяя к уравнению (1), с учетом условия (7), преобразование Фурье F , получаем

$$\frac{d^2 \hat{u}(x, \tau)}{dx^2} + a(x) \hat{u}(x, \tau) = i\tau \hat{u}(x, \tau), \quad \tau \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (9)$$

где $\hat{u}(x, \tau) = F[u(x, t)]$. Для уравнения (9) поставим задачу, добавив условия

$$\hat{u}(0, \tau) = 0, \quad \tau \geq 0, \quad (10)$$

$$\hat{u}(x_0, \tau) = \hat{f}(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (11)$$

где $\hat{f}(\tau) = F[f(t)]$. Из (9)–(11) требуется определить $\hat{u}_0(\tau)$, $\hat{v}_0(\tau)$, $\tau \geq 0$.

Очевидным образом показывается, что решение задачи (9), (10) линейно зависит от решения задачи

$$\frac{d^2 e(x, \tau)}{dx^2} + a(x) e(x, \tau) = i\tau e(x, \tau), \quad \tau \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (12)$$

$$e(0, \tau) = 0, \quad \tau \geq 0, \quad (13)$$

$$e'_x(0, \tau) = 1, \quad \tau \geq 0, \quad (14)$$

т. е. имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, \tau) &= l(\tau) e(x, \tau) \\ \hat{v}(x, \tau) &= l(\tau) e'(x, \tau) \end{aligned}, \quad \tau \geq 0, \quad x \in [0, 1], \quad (15)$$

где $l(\tau)$ — произвольная функция.

Используя (11), находим

$$l(\tau) = \frac{\hat{f}(\tau)}{e(x_0, \tau)}, \quad \tau \geq 0. \quad (16)$$

Тогда из (15), (16) следует, что

$$\begin{aligned} \hat{u}(\tau) &= \frac{\hat{f}(\tau)}{e(x_0, \tau)} e(1, \tau) \\ \hat{v}(\tau) &= \frac{\hat{f}(\tau)}{e(x_0, \tau)} e'(1, \tau) \end{aligned}, \quad \tau \geq 0. \quad (17)$$

Далее будем рассматривать пространство $H_0 = L_2[0, x_0]$ над полем комплексных чисел и оператор $A : H_0 \rightarrow H_0$, определяемый формулами

$$\begin{aligned} Au &= \frac{d^2 u}{dx^2} + a(x)u, \quad u \in D(A); \\ D(A) &= \{u : u, Au \in H_0, u(0) = u(x_0) = 0\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что оператор A самосопряжен, поэтому согласно условиям и теоремам, например, из [2; 3], $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$. Кроме того, поскольку $a(x) \leq 0$, то нетрудно убедиться, что A ещё и отрицательно определен, в частности $0 \notin \text{Sp}(A)$.

Теперь установим одно свойство функции $l(\tau)$, определенной формулой (16).

Теорема 1. *Функция $l(\tau)$, определенная формулой (16), непрерывна при $\tau \geq 0$.*

Доказательство. Так как $\hat{f}(\tau)$ и $e(x_0, \tau)$ непрерывны при $\tau \geq 0$, то для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что для любого $\tau \geq 0$ $e(x_0, \tau) \neq 0$.

Предположим противное, т. е. найдется число $\tau_0 \geq 0$ такое, что $e(x_0, \tau_0) = 0$. Рассмотрим в пространстве $H_0 = L_2[0, x_0]$ оператор $A : H_0 \rightarrow H_0$, определенный формулами (18). Из (12) следует, что $Ae(x, \tau_0) = i\tau_0 e(x, \tau_0)$; $0 \leq x \leq x_0$.

Точка $i\tau_0$ не принадлежит спектру оператора A , что обосновано выше, следовательно, уравнение $(A - i\tau_0 I)e(x, \tau_0) = 0$ имеет единственное решение $e(x, \tau_0) = 0$ при всех $0 \leq x \leq x_0$. Значит, и $e'_x(0, \tau_0) = 0$, что противоречит условию (14). $\square$

3. Оценка величин $|e(x, \tau)|$ и $|e'(x, \tau)|$

Перепишем уравнение (12) в виде $\frac{d^2 e(x, \tau)}{dx^2} - i\tau e(x, \tau) = -a(x)e(x, \tau)$.

Решая полученное уравнение методом вариации постоянных и используя условия (13), (14), сведем задачу (12)–(14) к интегральному уравнению

$$e_1(x, \lambda) = \frac{\text{sh } \mu_0 \lambda x}{\mu_0 \lambda} - \int_0^x \frac{\text{sh } \mu_0 \lambda (x - \xi)}{\mu_0 \lambda} a(\xi) e_1(\xi, \lambda) d\xi, \quad (19)$$

где $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $x, \xi \in [0, 1]$, $\lambda = \sqrt{\tau} \geq 0$, $e_1(x, \lambda) = e(x, \tau)$.

Лемма 1. При $x \geq 0$ $|\operatorname{sh} \mu_0 \lambda x| \leq e^{\frac{\lambda x}{\sqrt{2}}}$, $|\operatorname{ch} \mu_0 \lambda x| \leq e^{\frac{\lambda x}{\sqrt{2}}}$ и справедливо равенство $|\operatorname{sh} \mu_0 \lambda x|^2 = \frac{1}{4}e^{\sqrt{2}\lambda x} + \frac{1}{4}e^{-\sqrt{2}\lambda x} - \frac{1}{2}\cos \sqrt{2}\lambda x$.

Доказательство следует из определений гиперболических функций, формулы Эйлера и модуля комплексного числа.

Теорема 2. Существуют числа $\lambda_0 > 0$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 > 0$, $c_4 > 0$ такие, что для любого $\lambda \geq \lambda_0$ выполняются оценки

$$c_1 \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}\lambda}}{\lambda} \leq |e_1(x, \lambda)| \leq c_2 \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}\lambda}}{\lambda}, \quad c_3 e^{\frac{x}{\sqrt{2}}\lambda} \leq |e'_1(x, \lambda)| \leq c_4 e^{\frac{x}{\sqrt{2}}\lambda}.$$

Доказательство. Выполним замену $\varepsilon(x, \lambda) = \frac{\mu_0 \lambda}{\operatorname{sh} \mu_0 \lambda x} e_1(x, \lambda)$, тогда уравнение (19) придет к виду

$$\varepsilon(x, \lambda) = 1 - \int_0^x \frac{\operatorname{sh} \mu_0 \lambda (x - \xi) \operatorname{sh} \mu_0 \lambda \xi}{\mu_0 \lambda \operatorname{sh} \mu_0 \lambda x} a(\xi) \varepsilon(\xi, \lambda) d\xi. \quad (20)$$

Функция $a(x)$ непрерывна при всех $x \in [0, 1]$, следовательно, найдется постоянная $c > 0$ такая, что $|a(x)| \leq c$. В частности, можно положить $c = \max_{x \in [0, 1]} |a(x)|$.

Далее, из приведенной леммы следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \frac{\operatorname{sh} \mu_0 \lambda (x - \xi) \operatorname{sh} \mu_0 \lambda \xi}{\mu_0 \lambda \operatorname{sh} \mu_0 \lambda x} \right| = 0,$$

поэтому для любого $\alpha > 0$ найдется $\lambda_0 > 0$ такое, что для всех $\lambda \geq \lambda_0$, $\left| \frac{\operatorname{sh} \mu_0 \lambda (x - \xi) \operatorname{sh} \mu_0 \lambda \xi}{\mu_0 \lambda \operatorname{sh} \mu_0 \lambda x} \right| < \alpha$.

Обозначим $q = \int_0^x \left| \frac{\operatorname{sh} \mu_0 \lambda (x - \xi) \operatorname{sh} \mu_0 \lambda \xi}{\mu_0 \lambda \operatorname{sh} \mu_0 \lambda x} \right| |a(\xi)| d\xi$. Тогда в силу полученных оценок будем иметь: $q < \alpha c$. Поскольку α — любое, то, в частности, можно взять $\alpha = \frac{1}{2c}$, тогда $q < \frac{1}{2}$, а соответствующее значение λ_0 нетрудно подобрать, зная α .

Покажем, что при $\lambda \geq \lambda_0$ решение уравнения (20) можно искать в виде $\varepsilon(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(x, \lambda)$. Здесь $\varepsilon_0(x, \lambda) = 1$,

$$\varepsilon_{n+1}(x, \lambda) = - \int_0^x \frac{\operatorname{sh} \mu_0 \lambda (x - \xi) \operatorname{sh} \mu_0 \lambda \xi}{\mu_0 \lambda \operatorname{sh} \mu_0 \lambda x} a(\xi) \varepsilon_n(\xi, \lambda) d\xi.$$

Применяя индукцию по n , можно показать, что $|\varepsilon_n(x, \lambda)| \leq q^n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Поскольку $q < 1$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(x, \lambda)$ равномерно и абсолютно

сходится при $x \in [0, 1]$, $\lambda \geq \lambda_0$ и его сумма $\varepsilon(x, \lambda)$ равномерно ограничена при $\lambda \rightarrow \infty$. Тогда получаем оценку:

$$1 - \frac{q}{1-q} \leq |\varepsilon(x, \lambda)| \leq \frac{1}{1-q}. \quad (21)$$

Так как $q < \frac{1}{2}$, то оценка снизу — ненулевая.

Поскольку $\frac{\text{sh } \mu_0 \lambda x}{\mu_0 \lambda} \varepsilon(x, \lambda) = e_1(x, \lambda)$ и $\left| \frac{\text{sh } \mu_0 \lambda x}{\mu_0 \lambda} \right| \sim \frac{1}{2} e^{\frac{\lambda x}{\sqrt{2}}}$ при $\lambda \rightarrow \infty$, то из (21) находим:

$$c_1 \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}} \lambda}}{\lambda} \leq |e_1(x, \lambda)| \leq c_2 \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}} \lambda}}{\lambda},$$

где $c_1 = \frac{1-2q}{2(1-q)}$, $c_2 = \frac{1}{2(1-q)}$.

Продифференцируем (19) по x :

$$e'_1(x, \lambda) = \text{ch } \mu_0 \lambda x - \int_0^x \text{ch } \mu_0 \lambda (x - \xi) a(\xi) e_1(\xi, \lambda) d\xi.$$

Тогда, с учетом полученной выше оценки, при $\lambda \geq \lambda_0$ имеем

$$|e'_1(x, \lambda)| \leq e^{\frac{\lambda x}{\sqrt{2}}} + \frac{c_2 e^{\frac{\lambda x}{\sqrt{2}}}}{\lambda} \int_0^x |a(\xi)| d\xi \leq e^{\frac{\lambda x}{\sqrt{2}}} \left(1 + \frac{c_2 C}{\lambda} \right) \leq c_4 e^{\frac{\lambda x}{\sqrt{2}}}.$$

Здесь $c_4 = \left(1 + \frac{c_2 C}{\lambda_0} \right)$.

С другой стороны, $|e'_1(x, \lambda)| \geq \left| \text{ch } \mu_0 \lambda x - \int_0^x \text{ch } \mu_0 \lambda (x - \xi) |a(\xi)| e_1(\xi, \lambda) d\xi \right| \geq \left| e^{\frac{\lambda x}{\sqrt{2}}} - \frac{c_2 e^{\frac{\lambda x}{\sqrt{2}}}}{\lambda} \int_0^x |a(\xi)| d\xi \right| \geq e^{\frac{\lambda x}{\sqrt{2}}} \left| 1 - \frac{c_2 C}{\lambda} \right| \geq c_3 e^{\frac{\lambda x}{\sqrt{2}}}$, где $c_3 = \left| 1 - \frac{c_2 C}{\lambda_0} \right|$. В силу произвольности выбора λ_0 всегда можно добиться выполнения условия $c_3 \neq 0$. $\square$

Возвращаясь к переменной τ , получаем, что при $\tau \rightarrow +\infty$ имеют место оценки

$$c_1 \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{\tau}}}{\sqrt{\tau}} \leq |e(x, \tau)| \leq c_2 \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{\tau}}}{\sqrt{\tau}}, \quad c_3 e^{\frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{\tau}} \leq |e'(x, \tau)| \leq c_4 e^{\frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{\tau}}. \quad (22)$$

4. Оценка величины $\|l_\delta(\tau) - l_0(\tau)\|_{L_2}$

В силу изометричности преобразования Фурье F , определенного формулой (8), и в силу оценки (6) имеем

$$\|\hat{f}_\delta(\tau) - \hat{f}_0(\tau)\|_{L_2} \leq \delta, \quad (23)$$

где $\widehat{f}_\delta(\tau) = F[f_\delta(t)]$, $\widehat{f}_0(\tau) = F[f_0(t)]$.

Далее, пусть $l_0(\tau) = \frac{\widehat{f}_0(\tau)}{e(x_0, \tau)}$, $l_\delta(\tau) = \frac{\widehat{f}_\delta(\tau)}{e(x_0, \tau)}$. Тогда

$$\|l_\delta(\tau) - l_0(\tau)\|_{L_2}^2 = \int_0^{\lambda_0^2} \frac{1}{|e(x_0, \tau)|^2} |\widehat{f}_\delta(\tau) - \widehat{f}_0(\tau)|^2 d\tau + \int_{\lambda_0^2}^{\infty} \frac{1}{|e(x_0, \tau)|^2} |\widehat{f}_\delta(\tau) - \widehat{f}_0(\tau)|^2 d\tau.$$

Поскольку функция $e(x_0, \tau)$ непрерывна для всех $\tau \geq 0$ и из теоремы 1 следует, что она нигде не обращается в 0, то $\frac{1}{|e(x_0, \tau)|^2}$ непрерывна при $\tau \in [0, \lambda_0^2]$, значит, на этом отрезке она достигает своего наибольшего значения, т. е. $\frac{1}{|e(x_0, \tau)|^2} \leq c_5^2$, где $c_5^2 = \max_{\tau \in [0, \lambda_0^2]} \left\{ \frac{1}{|e(x_0, \tau)|^2} \right\}$. Используя (23), получаем:

$$\int_0^{\lambda_0^2} \frac{1}{|e(x_0, \tau)|^2} |\widehat{f}_\delta(\tau) - \widehat{f}_0(\tau)|^2 d\tau \leq c_5^2 \delta^2. \quad (24)$$

Из теоремы 2 следует, что $\frac{1}{|e(x_0, \tau)|^2} \leq \frac{\tau}{c_1^2 e^{\sqrt{2x_0}\sqrt{\tau}}}$ при $\tau \in [\lambda_0^2, \infty]$. Так как $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{c_1^2 e^{\sqrt{2x_0}\sqrt{\tau}}} = 0$, то при $\tau \rightarrow \infty$ функция $\frac{\tau}{c_1^2 e^{\sqrt{2x_0}\sqrt{\tau}}}$ ограничена, т. е. существует постоянная $c_6 > 0$ такая, что $\frac{\tau}{c_1^2 e^{\sqrt{2x_0}\sqrt{\tau}}} \leq c_6^2$. При этом в качестве c_6^2 можно выбрать $\sup_{\tau \in [\lambda_0^2, +\infty)} \left\{ \frac{\tau}{c_1^2 e^{\sqrt{2x_0}\sqrt{\tau}}} \right\}$. Тем самым

$$\int_{\lambda_0^2}^{\infty} \frac{1}{|e(x_0, \tau)|^2} |\widehat{f}_\delta(\tau) - \widehat{f}_0(\tau)|^2 d\tau \leq c_6^2 \delta^2. \quad (25)$$

Из (24), (25) следует, что $\|l_\delta(\tau) - l_0(\tau)\|_{L_2} \leq \delta \sqrt{c_5^2 + c_6^2}$.

5. Применение метода проекционной регуляризации

Используя формулы (15), перепишем нашу задачу в виде операторных уравнений

$$A_1 \widehat{u}(\tau) = \frac{1}{e(1, \tau)} \widehat{u}(\tau) = l_\delta(\tau), \quad A_2 \widehat{v}(\tau) = \frac{1}{e'(1, \tau)} \widehat{v}(\tau) = l_\delta(\tau), \quad (26)$$

где $A_1, A_2 : \overline{H} \rightarrow \overline{H}$.

Пусть $\widehat{u}_0(\tau), \widehat{v}_0(\tau) \in W_2^1[0, \infty]$ — точные решение задачи (26), соответствующие правой части $l_0(\tau)$, тогда пусть найдется постоянная $r > 0$ такая, что $\|\widehat{u}_0\|_{L_2}^2 + \|\widehat{u}_0'\|_{L_2}^2 \leq r^2$ и $\|\widehat{v}_0\|_{L_2}^2 + \|\widehat{v}_0'\|_{L_2}^2 \leq r^2$.

Определим $\widehat{u}_0(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u_0(t) e^{-i\tau t} dt$. Тогда $\widehat{u}'_0(\tau) = i\tau \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u_0(t) e^{-i\tau t} dt = i\tau \widehat{u}_0(\tau)$. Значит, для точного решения $\widehat{u}_0(\tau)$ справедливо неравенство $(1 + \tau^2) \|\widehat{u}_0\|_{L_2}^2 \leq r^2$. Аналогично получаем, что $(1 + \tau^2) \|\widehat{v}_0\|_{L_2}^2 \leq r^2$.

Каждая из задач (26) распадается на две: первая из них — на отрезке $\tau \in [0, \lambda_0^2] = [0, \tau_0]$, вторая — при $\tau \in [\tau_0, +\infty)$. Вторые задачи некорректны. Для первых же задач сразу находим оценки $\|\widehat{u}_\delta - \widehat{u}_0\| \leq c_5 c_7 \delta$, где $c_7 = \left(\max_{\tau \in [0, \tau_0]} |e(1, \tau)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ и $\|\widehat{v}_\delta - \widehat{v}_0\| \leq c_5 c_8 \delta$, где $c_8 = \left(\max_{\tau \in [0, \tau_0]} |e'(1, \tau)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Найдем решения вторых задач. Из теоремы 1 и формул (26) следует инъективность операторов A_1, A_2, A_1^* и A_2^* , поэтому в силу леммы 6, сформулированной в работе [4], существуют изометрические операторы $Q_1, Q_2 : \overline{H} \rightarrow \overline{H}$ такие, что $A_1 \widehat{u}(\tau) = Q_1 C_1 \widehat{u}(\tau)$ и $A_2 \widehat{v}(\tau) = Q_2 C_2 \widehat{v}(\tau)$, где

$$C_1 \widehat{u}(\tau) = \left| \frac{1}{e(1, \tau)} \right| \widehat{u}(\tau), \quad C_2 \widehat{v}(\tau) = \left| \frac{1}{e'(1, \tau)} \right| \widehat{v}(\tau), \quad (27)$$

т. е. операторы C_1 и C_2 положительно определены и самосопряжены. Таким образом, уравнения (26) могут быть записаны в виде

$$C_1 \widehat{u}(\tau) = \widehat{l}_\delta(\tau), \quad C_2 \widehat{v}(\tau) = \bar{l}_\delta(\tau), \quad (28)$$

где $\widehat{l}_\delta(\tau) = Q_1^* l_\delta(\tau)$, $\bar{l}_\delta(\tau) = Q_2^* l_\delta(\tau)$, а Q_1^*, Q_2^* — операторы, сопряженные соответственно с $Q_1(\tau) = \frac{|e(1, \tau)|}{e(1, \tau)}$ и $Q_2(\tau) = \frac{|e'(1, \tau)|}{e'(1, \tau)}$.

Из сказанного выше следует, что при $\widehat{l}_0(\tau) = Q_1^* l_0(\tau)$, $\bar{l}_0(\tau) = Q_2^* l_0(\tau)$ уравнения (28) имеют точные решения $\widehat{u}_0(\tau), \widehat{v}_0(\tau) \in B\overline{S}_r$. Здесь $\overline{S}_r = \{\widehat{w} : \widehat{w} \in \overline{H}, \|\widehat{w}\| \leq r\}$, $\tau \geq \tau_0$, а

$$B\widehat{w}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2}} \widehat{w}(\tau), \quad \tau \geq \tau_0, \quad \widehat{w}(\tau) \in \overline{H}. \quad (29)$$

Из формул (27)–(29) следует, что $B = g_1(C_1)$ и $B = g_2(C_2)$, где функции $g_1(\sigma), g_2(\sigma)$ являются строго возрастающими, непрерывными, удовлетворяющими условиям $g_1(0) = 0, g_2(0) = 0$ [4].

Используя оценки (22) и формулы (27), (29), можно показать, что имеют место эквивалентности:

$$\begin{aligned} g_1(\sigma) &\sim \frac{1}{2} \ln^{-2} \left(\frac{1}{\sigma} \right) \\ g_2(\sigma) &\sim \frac{1}{2} \ln^{-2} \left(\frac{1}{\sigma} \right) \end{aligned} \quad \text{при } \sigma \rightarrow 0. \quad (30)$$

Используя метод проекционной регуляризации, предложенный в [4], регуляризуем исходные данные $(\widehat{l}_\delta(\tau), \delta)$, т. е. определим функцию $\widehat{l}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}(\delta)]$ следующим образом:

— при условии $\|\widehat{l}_\delta\| > 3c_6\delta$ определим $\widehat{l}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}(\delta)] = \begin{cases} \widehat{l}_\delta(\tau) & \text{при } \tau \leq \widehat{\alpha}(\delta) \\ 0 & \text{при } \tau > \widehat{\alpha}(\delta) \end{cases}$,

где $\widehat{\alpha}(\delta)$ удовлетворяет уравнению $\int_{\widehat{\alpha}(\delta)}^{\infty} |\widehat{l}_\delta(\tau)|^2 d\tau = 9c_6^2\delta^2$;

— при условии $\|\widehat{l}_\delta\| \leq 3c_6\delta$ определим $\widehat{l}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}(\delta)] \equiv 0$.

При выполнении этих условий функция $\widehat{l}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}(\delta)]$ определяется однозначно даже в случае неединственности решения уравнения из первого условия. Аналогичным образом регуляризуем исходные данные $(\bar{l}_\delta(\tau), \delta)$.

Далее, приближенные решения $\widehat{u}_\delta(\tau)$ и $\widehat{v}_\delta(\tau)$ уравнений (28) определим формулами $\widehat{u}_\delta(\tau) = C_1^{-1}\widehat{l}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}(\delta)]$, $\widehat{v}_\delta(\tau) = C_2^{-1}\widehat{l}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}(\delta)]$. В силу леммы 13 из работы [4] найдется постоянная c_9 такая, что при $\tau \geq \tau_0$ справедливы оценки

$$\|\widehat{u}_\delta - \widehat{u}_0\| \leq c_9 \ln^{-2} \left(\frac{1}{c_6\delta} \right), \quad \|\widehat{v}_\delta - \widehat{v}_0\| \leq c_9 \ln^{-2} \left(\frac{1}{c_6\delta} \right). \quad (31)$$

Постоянная c_9 определяется соотношениями (30) и условием леммы 13 из работы [4] следующим образом: $c_9 = 12b\frac{1}{2} = 6b$, где $b \geq r\|B\| \geq 1$. Радиус r известен из постановки задачи. Находим $\|B\| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau_0^2}}$, тогда выбираем $b \geq \frac{r}{\sqrt{1 + \tau_0^2}} \geq 1$.

Из теоремы, сформулированной в работе [4], следует, что оценки (31) являются точными по порядку на классе $B\bar{S}_r$, а соответствующий метод проекционной регуляризации оптимален по порядку на этом классе решений.

Чтобы окончательно получить приближенные решения $u_\delta(t)$ и $v_\delta(t)$ исходной задачи (1)–(4), применим обратное к F преобразование F^{-1} и получим $u_\delta(t) = \operatorname{Re} \{F^{-1}[\widehat{u}_\delta(\tau)]\}$ и $v_\delta(t) = \operatorname{Re} \{F^{-1}[\widehat{v}_\delta(\tau)]\}$. Поскольку преобразование F изометрично, то для приближенных решений $u_\delta(t)$ и $v_\delta(t)$ для любого $t \geq 0$ при $\delta \rightarrow 0$ справедливы оценки

$$\|u_\delta - u_0\| \leq c_9 \ln^{-2} \left(\frac{1}{c_6\delta} \right), \quad \|v_\delta - v_0\| \leq c_9 \ln^{-2} \left(\frac{1}{c_6\delta} \right).$$

Список литературы

1. **Кутузов, А. С.** Точная по порядку оценка приближенного решения обратной задачи для уравнения теплопроводности на кольце / А. С. Кутузов // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математика. Физика. Химия.— 2007.— Вып. 9, № 19 (91).— С. 30—36.
2. **Колмогоров, А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин.— М. : Наука, 1972.
3. **Наймарк, М. А.** Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк.— М. : Наука, 1969.
4. **Танана, В. П.** Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратных задач / В. П. Танана. Сиб. журн. вычисл. математики.— 2004.— Т. 7, № 2.— С. 117—132.