

А. С. КУТУЗОВ

ОПТИМАЛЬНАЯ ПО ПОРЯДКУ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Предложено решение одной двумерной граничной обратной задачи с подвижной границей оптимальным по порядку методом. Впервые для такого класса задач получена точная по порядку оценка решения.

Ключевые слова: обратная задача Стефана, метод проекционной регуляризации, оптимальная по порядку оценка.

Введение

Многомерные математические модели описывают реальные процессы более адекватно, чем одномерные, потому постановка и решение многомерных обратных задач математической физики крайне востребованы и имеют огромное практическое значение.

Широким классом обратных некорректно поставленных задач математической физики являются так называемые обратные задачи Стефана [1], то есть задачи, в которых границы рассматриваемых областей могут со временем менять своё положение. Подобная задача возникает, например, при исследовании процессов непрерывной разливки стали. В этом случае наблюдается фронт фазового перехода, который со временем перемещается. При этом возникает задача определения температуры на границе зоны вторичного охлаждения. Разливка осуществляется внутри цилиндрических труб, а потому ясно, что адекватное описание процесса может дать двумерная задача на цилиндре.

Одна из таких задач предложена и решена в настоящей статье. Впервые для подобной задачи получена оптимальная по порядку оценка решения.

1. Постановка задачи и сведение её к одномерному случаю

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \Delta u(x, y, t), \quad (1)$$

в котором $x, y \in K$, K — кольцо, ограниченное окружностями Γ_1 и Γ_2 с радиусами r_1 и $h(t) > r_1$ соответственно (то есть внешняя граница кольца со временем перемещается), $t \geq 0$, $h(t)$ — непрерывная, ограниченная, строго возрастающая функция, причём $h(0) = h_0 > 0$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

Пусть известны следующие начальные и граничные условия:

$$u(x, y, 0) = 0, \quad x, y \in K, \quad (2)$$

$$u|_{\Gamma_2} = 0, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$|\text{grad } u| \Big|_{\Gamma_2} = \psi(t), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

а граничное значение $u|_{\Gamma_1}$ функции $u(x, y, t)$ подлежит определению.

Будем искать решение этой задачи, удовлетворяющее условию осевой симметрии, то есть такое, что

$$u(x, y, t) = u\left(\sqrt{x^2 + y^2}, t\right). \quad (5)$$

Выполнив замену переменной $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, задачу (1)–(4) можно свести к следующей:

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} \quad t \geq 0, \quad r_1 \leq z \leq h(t), \quad (6)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad r_1 \leq z \leq h_0, \quad (7)$$

$$u|_{z=h(t)} = 0, \quad t \geq 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=h(t)} = \psi(t), \quad t \geq 0, \quad (9)$$

а определить требуется

$$u|_{z=r_1} = u_0(r_1, t). \quad (10)$$

В полученной задаче сделаем замену

$$u(z, t) = v(z, t) \cdot z^{-\frac{1}{2}},$$

тогда задача (6)–(10) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} + \frac{1}{4z^2} v(z, t), \quad t \geq 0, \quad r_1 \leq z \leq h(t), \quad (11)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad r_1 \leq z \leq h_0, \quad (12)$$

$$v|_{z=h(t)} = 0, \quad t \geq 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=h(t)} = \psi(t) \sqrt{h(t)}, \quad t \geq 0, \quad (14)$$

а определить требуется

$$v|_{z=r_1} = v_0(r_1, t). \quad (15)$$

Для исследования и решения полученной задачи (11)–(15) сделаем замену аргумента $\hat{z} = \frac{z - r_1}{h(t) - r_1}$ и искомой функции $v_1(\hat{z}, t) = v(\hat{z}(h(t) - r_1) + r_1, t)$. Тогда от задачи с подвижной границей можно перейти к задаче с неподвижной границей и уравнение (11) при $t \geq 0$ и $\hat{z} \in [0, 1]$ примет вид

$$\frac{\partial v_1(\hat{z}, t)}{\partial t} = \frac{1}{(h(t) - r_1)^2} \frac{\partial^2 v_1(\hat{z}, t)}{\partial \hat{z}^2} + \frac{1}{4(\hat{z}(h(t) - r_1) + r_1)^2} v_1(\hat{z}, t), \quad (16)$$

условия (12)–(14) перепишутся в виде

$$v_1(\hat{z}, 0) = 0, \quad \hat{z} \in [0, 1], \quad (17)$$

$$v_1(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial \hat{z}} \right|_{\hat{z}=1} = (h(t) - r_1)\psi(t)\sqrt{h(t)}, \quad t \geq 0, \quad (19)$$

а граничное условие (15) примет вид

$$v_1(0, t) = v_{10}(t).$$

Из [2, с. 266] следует, что в задаче Стефана граница $h(t)$ определяется формулой

$$\frac{dh(t)}{dt} = -k\psi(t), \quad (20)$$

где $\psi(t)$ определена формулой (4) (или (9)), а $k > 0$ — известная константа. Из (20) следует, что

$$h(t) = h_0 - k \int_0^t \psi(\tau) d\tau. \quad (21)$$

Так как функция $\psi(t)$ известна, то из формулы (21) следует, что свободная граница $h(t)$ также известна.

Перепишем уравнение (16) в виде

$$(h(t) - r_1)^2 \frac{\partial v_1(\hat{z}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_1(\hat{z}, t)}{\partial \hat{z}^2} + \frac{1}{4 \left(\hat{z} + \frac{r_1}{h(t) - r_1} \right)^2} v_1(\hat{z}, t),$$

а также переобозначим $\frac{r_1}{h(t) - r_1} = h_1(t)$ и получим уравнение

$$\frac{r_1^2}{h_1^2(t)} \frac{\partial v_1(\hat{z}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_1(\hat{z}, t)}{\partial \hat{z}^2} + \frac{1}{4 (\hat{z} + h_1(t))^2} v_1(\hat{z}, t), \quad t \geq 0, \quad \hat{z} \in [0, 1]. \quad (22)$$

В уравнении (22) сделаем ещё одну замену переменной, а именно, положим $s = b(t)$, где $b(t) = \int_0^t \frac{h_1^2(\tau)}{r_1^2} d\tau$. Новую неизвестную функцию обозначим

$$v_2(\hat{z}, s) = v_1(\hat{z}, b^{-1}(s)), \quad \hat{z} \in [0, 1], \quad s \geq 0. \quad (23)$$

Подставив функцию $v_2(\hat{z}, s)$, определяемую формулой (23), в уравнение (22), получим

$$\frac{\partial v_2(\hat{z}, s)}{\partial s} = \frac{\partial^2 v_2(\hat{z}, s)}{\partial \hat{z}^2} + \frac{1}{4 (\hat{z} + b_1(s))^2} v_2(\hat{z}, s), \quad s \geq 0, \quad \hat{z} \in [0, 1], \quad (24)$$

где $b_1(s) = r_1 \sqrt{b'(b^{-1}(s))}$. Начальное и граничные условия (17)–(19) примут вид

$$v_2(\hat{z}, 0) = 0, \quad \hat{z} \in [0, 1], \quad (25)$$

$$v_2(1, s) = 0, \quad s \geq 0, \quad (26)$$

$$\left. \frac{\partial v_2}{\partial \widehat{z}} \right|_{\widehat{z}=1} = f(s), \quad s \geq 0, \quad (27)$$

где $f(s) = (h(b^{-1}(s)) - r_1)\psi(b^{-1}(s))\sqrt{h(b^{-1}(s))}$. Определению подлежит граничное значение $v_2(0, s)$.

Наконец, в полученной задаче (24)–(27) сделаем ещё одну замену аргумента $\chi = 1 - \widehat{z}$ и искомой функции $v_2(1 - \chi, s) = u_1(\chi, s)$. Тогда функция $u_1(\chi, s)$ будет удовлетворять следующей задаче:

$$\frac{\partial u_1(\chi, s)}{\partial s} = \frac{\partial^2 u_1(\chi, s)}{\partial \chi^2} + \frac{1}{4(\chi + b_2(s))^2} u_1(\chi, s), \quad s \geq 0, \quad \chi \in [0, 1], \quad (28)$$

$$u_1(\chi, 0) = 0, \quad \chi \in [0, 1], \quad (29)$$

$$u_1(0, s) = 0, \quad s \geq 0, \quad (30)$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial \chi} \right|_{\chi=0} = f(s), \quad s \geq 0, \quad (31)$$

где $b_2(s) = -1 - b_1(s)$, а граничное значение $u_1(1, s)$ подлежит определению.

Эта задача (см. [3]) является некорректно поставленной (неустойчивой), и, как будет показано далее, изометричное преобразование приводит её к задаче вычисления значений неограниченного оператора. Кроме того, при естественных ограничениях на функцию $f(s)$ (см. [3, с. 33]) она имеет не более одного решения.

Предположим, что при $f(s) = f_0(s) \in L_2(0, \infty)$ существует точное решение $u_{10}(1, s) \not\equiv 0$ поставленной задачи, которое принадлежит пространству Соболева $W_2^1(0, \infty)$ (см. [4, с. 102]), причем для этого решения $u_{10}(1, 0) = u'_{10}(1, 0) = 0$ и существует число T такое, что при $s \geq T$ $u_{10}(1, s) = 0$. Кроме того, $u_{10}(1, s) \in M_r$, где $M_r = \left\{ u_{10} \in W_2^1(0, \infty) : \|u_{10}\|_{W_2^1}^2 \leq r^2 \right\}$. Однако точное значение $f_0(s)$ нам неизвестно, а вместо него даны некоторое приближение $f_\delta(s) \in L_2(0, \infty)$ и уровень погрешности $\delta > 0$, такие, что $\|f_0 - f_\delta\|_{L_2} \leq \delta$. Требуется, используя исходные данные f_δ , δ и M_r задачи (28)–(31), построить приближенное решение $u_{1\delta}(s)$ и оценить его отклонение $\|u_{10} - u_{1\delta}\|_{L_2}$ от точного решения $u_{10}(s) = u_{10}(1, s)$.

Используя метод разделения переменных и теорию бесселевых функций (см. [5]), можно показать, что к задаче для уравнения (6), а значит, к задаче (28)–(31) можно применять преобразование, аналогичное преобразованию Фурье на полупрямой по s в предположении, что

$$u_1(\chi, s) = 0 \quad \text{при} \quad s < 0. \quad (32)$$

2. Сведение к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

Учитывая (32), в качестве рабочего пространства $\overline{H}$ возьмем комплексный вариант $L_2(0, \infty)$ над полем действительных чисел, то есть его элементы имеют вид $u(t) + iv(t)$, где $u, v \in L_2(0, \infty)$, и норма в нем определяется по формуле

$\|u + iv\|_{\bar{H}}^2 = \|u\|_{L_2}^2 + \|v\|_{L_2}^2$. Тогда пространство $\bar{H}$ будет гильбертовым, а преобразование Фурье на нем определим следующим образом:

$$F[u(t)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(t) e^{-i\tau t} dt, \quad \tau \geq 0. \quad (33)$$

Из теоремы Планшереля, сформулированной в [6], следует изометричность преобразования F , определенного формулой (33).

Применяя к уравнению (28), с учетом условия (32), преобразование Фурье F , получаем

$$\frac{d^2 \hat{u}_1(\chi, \tau)}{d\chi^2} + B(\chi, \tau) * \hat{u}_1(\chi, \tau) = i\tau \hat{u}_1(\chi, \tau), \quad \tau \geq 0, \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad (34)$$

где $\hat{u}_1(\chi, \tau) = F[u_1(\chi, s)]$, $B(\chi, \tau) = F\left[\frac{1}{4(\chi + b_2(s))^2}\right]$, символ $*$ обозначает операцию свёртки по переменной τ (см. [6; 7]).

Для уравнения (34) поставим задачу, добавив условия

$$\hat{u}_1(0, \tau) = 0, \quad \tau \geq 0, \quad (35)$$

$$\left. \frac{d\hat{u}_1}{d\chi} \right|_{\chi=0} = \hat{f}(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (36)$$

где $\hat{f}(\tau) = F[f(t)]$. Из (34)–(36) требуется определить $\hat{u}_1(1, \tau)$, $\tau \geq 0$.

Поскольку $\hat{u}_1(\chi, 0) = 0$, то далее будем рассматривать значения $\tau > 0$.

Рассмотрим задачу Коши (34)–(36). В силу свойств дифференциальных операторов и линейных дифференциальных уравнений (см. [8]), если $e_1(\chi, \tau)$ и $e_2(\chi, \tau)$ — линейно независимые решения (34), то общее решение (34) имеет вид

$$\hat{u}_1(\chi, \tau) = C_1(\tau)e_1(\chi, \tau) + C_2(\tau)e_2(\chi, \tau).$$

Используя (35), (36), находим:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_1(0, \tau) \\ \hat{u}'_1(0, \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1(0, \tau) & e_2(0, \tau) \\ e'_1(0, \tau) & e'_2(0, \tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(\tau) \\ C_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{f}(\tau) \end{pmatrix}.$$

Тогда решение задачи Коши (41)–(43) определяется из равенства

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_1(\chi, \tau) \\ \hat{u}'_1(\chi, \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1(\chi, \tau) & e_2(\chi, \tau) \\ e'_1(\chi, \tau) & e'_2(\chi, \tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(0, \tau) & e_2(0, \tau) \\ e'_1(0, \tau) & e'_2(0, \tau) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{f}(\tau) \end{pmatrix}.$$

При $\tau > 0$ получаем, что

$$\hat{u}_1(1, \tau) = e(\tau)\hat{f}(\tau), \quad (37)$$

где функция $e(\tau)$ получается простым перемножением всех матриц в последнем матричном равенстве и имеет вид

$$e(\tau) = \frac{e_2(1, \tau)e_1(0, \tau) - e_1(1, \tau)e_2(0, \tau)}{e_1(0, \tau)e'_2(0, \tau) - e_2(0, \tau)e'_1(0, \tau)}. \quad (38)$$

Требуется оценить сверху и снизу величину $|e(\tau)|$. Для этого найдём оценки сверху и снизу модулей всех функций, входящих в правую часть (38).

3. Первое решение задачи (34)–(36)

Рассмотрим интегральное уравнение

$$e_1(\chi, \tau) = e^{\mu_0 \sqrt{\tau} \chi} - \int_0^\chi \frac{\operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\tau} (\chi - \xi)}{\mu_0 \sqrt{\tau}} [B(\xi, \tau) * e_1(\xi, \tau)] d\xi, \quad (39)$$

где $\mu_0 = \sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$, $\chi, \xi \in [0, 1]$, $\tau > 0$. Нетрудно убедиться, что если уравнение (39) имеет решение, то оно также будет являться решением уравнения (34).

Для удобства вычисления свёртки, чтобы не вводить новых обозначений, будем считать e_1 функцией аргумента $\sqrt{\tau}$.

Теорема 1. Пусть интеграл $I_1 = \int_0^1 \int_0^\infty |B(\xi, \theta)| e^{-\frac{\theta \xi}{\sqrt{2}}} d\theta d\xi$ сходится, тогда существует число $\tau_0 > 0$ и постоянные $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ такие, что для всех $\tau \geq \tau_0$ выполняется оценка

$$c_1 e^{\frac{\chi}{\sqrt{2}} \sqrt{\tau}} \leq |e_1(\chi, \tau)| \leq c_2 e^{\frac{\chi}{\sqrt{2}} \sqrt{\tau}}. \quad (40)$$

Кроме того, при $\tau \geq \tau_0$, $\tau \rightarrow +\infty$ справедливо равенство

$$|e_1'(\chi, \tau)| = \sqrt{\tau} e^{\frac{\chi}{\sqrt{2}} \sqrt{\tau}} (1 + o(1)). \quad (41)$$

Доказательство. Выполним в уравнении (39) замену

$$\varepsilon_1(\chi, \tau) = \frac{1}{e^{\mu_0 \sqrt{\tau} \chi}} e_1(\chi, \tau),$$

тогда оно примет вид

$$\varepsilon_1(\chi, \tau) = 1 - \int_0^\chi \frac{\operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\tau} (\chi - \xi)}{\mu_0 \sqrt{\tau} e^{\mu_0 \sqrt{\tau} \chi}} [B(\xi, \tau) * e^{\mu_0 \sqrt{\tau} \xi} \varepsilon_1(\xi, \tau)] d\xi. \quad (42)$$

Найдём оценку для величины $\left| - \int_0^\chi \frac{\operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\tau} (\chi - \xi)}{\mu_0 \sqrt{\tau} e^{\mu_0 \sqrt{\tau} \chi}} [B(\xi, \tau) * e^{\mu_0 \sqrt{\tau} \xi}] d\xi \right|$. Из определений гиперболического синуса и модуля комплексного числа получаем, что при $\tau > 0$ $|\operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\tau} (\chi - \xi)| \leq e^{\frac{\sqrt{\tau}(\chi - \xi)}{\sqrt{2}}}$. Кроме того, очевидно, что $|e^{\mu_0 \sqrt{\tau} \chi}| = e^{\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}} \chi}$. Тогда из определения и свойств свёртки на интервале $(0, \infty)$ следует, что

$$\left| - \int_0^\chi \frac{\operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\tau} (\chi - \xi)}{\mu_0 \sqrt{\tau} e^{\mu_0 \sqrt{\tau} \chi}} [B(\xi, \tau) * e^{\mu_0 \sqrt{\tau} \xi}] d\xi \right| \leq \int_0^\chi \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_0^\infty |B(\xi, \theta)| e^{-\frac{\theta \xi}{\sqrt{2}}} d\theta d\xi \leq \frac{I_1}{\sqrt{\tau}}.$$

Таким образом, найдётся значение $\tau_0 > 0$ такое, что $q_1 = \frac{I_1}{\sqrt{\tau}} < \frac{1}{2}$ для всех $\tau \geq \tau_0$. Покажем теперь, что решение уравнения (42) можно искать в виде

$$\varepsilon_1(\chi, \tau) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{1\nu}(\chi, \tau),$$

где $\varepsilon_{10}(\chi, \tau) = 1$, $\varepsilon_{1\nu+1}(\chi, \tau) = - \int_0^\chi \frac{\operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\tau} (\chi - \xi)}{\mu_0 \sqrt{\tau} e^{\mu_0 \sqrt{\tau} \chi}} [B(\xi, \tau) * e^{\mu_0 \sqrt{\tau} \xi} \varepsilon_{1\nu}(\xi, \tau)] d\xi$.

Применяя индукцию по ν , можно показать, что $|\varepsilon_{1\nu}(\chi, \tau)| \leq q_1^\nu$, где $\nu = 0, 1, 2, \dots$

Поскольку $q_1 < \frac{1}{2}$, то ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{1\nu}(\chi, \tau)$ равномерно и абсолютно сходится при $\chi \in [0, 1]$, $\tau \geq \tau_0$ и его сумма $\varepsilon_1(\chi, \tau)$ равномерно ограничена при $\tau \rightarrow \infty$. Тогда получаем оценку

$$c_1 e^{\frac{\chi}{\sqrt{2}} \sqrt{\tau}} \leq |e_1(\chi, \tau)| \leq c_2 e^{\frac{\chi}{\sqrt{2}} \sqrt{\tau}}.$$

Здесь $c_1 = 1 - \frac{q_1}{1 - q_1}$ и $c_2 = 1 + \frac{q_1}{1 - q_1}$.

Продифференцируем уравнение (39) по переменной χ :

$$e_1'(\chi, \tau) = \mu_0 \sqrt{\tau} e^{\mu_0 \sqrt{\tau} \chi} - \int_0^\chi \operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\tau} (\chi - \xi) [B(\xi, \tau) * e_1(\xi, \tau)] d\xi.$$

Тогда при $\tau \rightarrow +\infty$, используя (40) и неравенства для модуля суммы и разности, получаем, что выполняется равенство (41). $\square$

4. Второе решение задачи (34)–(36)

Рассмотрим интегральное уравнение

$$e_2(\chi, \tau) = e^{-\mu_0 \sqrt{\tau} \chi} - \int_\chi^{\sqrt{2}} \frac{\operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\tau} (\xi - \chi)}{\mu_0 \sqrt{\tau}} [B(\xi, \tau) * e_2(\xi, \tau)] d\xi, \quad (43)$$

где $\mu_0 = \sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$, $\chi \in [0, 1]$, $\tau > 0$, $\xi \in [\chi, \sqrt{2}]$. Легко проверяется, что если уравнение (43) имеет решение, то оно также будет являться решением уравнения (34). Как и в случае с функцией e_1 , чтобы не вводить новых обозначений, будем считать e_2 функцией аргумента $\sqrt{\tau}$.

Теорема 2. Пусть интеграл $I_2 = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^\infty |B(\xi, \theta)| e^{\frac{\theta}{\sqrt{2}} \xi} d\theta d\xi$ сходится, тогда существуют число $\tau_0 > 0$ и постоянные $c_3 > 0$, $c_4 > 0$ такие, что для всех $\tau \geq \tau_0$ выполняется оценка

$$c_3 e^{-\frac{\chi}{\sqrt{2}} \sqrt{\tau}} \leq |e_2(\chi, \tau)| \leq c_4 e^{-\frac{\chi}{\sqrt{2}} \sqrt{\tau}}.$$

Кроме того, при $\tau \geq \tau_0$, $\tau \rightarrow +\infty$ справедливо равенство

$$|e_2'(\chi, \tau)| = \sqrt{\tau} e^{-\frac{\chi}{\sqrt{2}} \sqrt{\tau}} (1 + o(1)).$$

Доказательство. Выполним в уравнении (43) замену

$$\varepsilon_2(\chi, \tau) = \frac{1}{e^{-\mu_0 \sqrt{\tau} \chi}} e_2(\chi, \tau),$$

тогда оно придёт к виду

$$\varepsilon_2(\chi, \tau) = 1 - \int_{\chi}^{\sqrt{2}} \frac{\operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\tau} (\xi - \chi)}{\mu_0 \sqrt{\tau} e^{-\mu_0 \sqrt{\tau} \chi}} \left[B(\xi, \tau) * e^{-\mu_0 \sqrt{\tau} \xi} \varepsilon_2(\xi, \tau) \right] d\xi.$$

Далее действуем аналогично предыдущей теореме и находим $c_3 = 1 - \frac{q_2}{1 - q_2}$ и $c_4 = 1 + \frac{q_2}{1 - q_2}$. $\square$

Всюду в дальнейшем будем считать, что условия доказанных теорем выполнены, кроме того, примем за $\tau_0 > 0$ то значение, начиная с которого выполняются все оценки из доказанных теорем.

5. Оценка величины $|e(\tau)|$

Следствие 1. При $c_2 \neq 2$, $c_4 \neq 2$ и $\tau \geq \tau_0$ найдутся постоянные c_5 , c_6 , c_7 и c_8 такие, что справедливы оценки:

$$\begin{aligned} c_5 \sqrt{\tau} e^{\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}} \chi} &\leq |e'_1(\chi, \tau)| \leq c_6 \sqrt{\tau} e^{\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}} \chi}, \\ c_7 \sqrt{\tau} e^{-\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}} \chi} &\leq |e'_2(\chi, \tau)| \leq c_8 \sqrt{\tau} e^{-\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}} \chi}. \end{aligned} \quad (44)$$

Доказательство сразу же следует из теорем 1 и 2, если принять $c_5 = \left| 1 - \frac{c_2}{2} \right|$, $c_6 = 1 + \frac{c_2}{2}$, $c_7 = \left| 1 - \frac{c_4}{2} \right|$, $c_8 = 1 + \frac{c_4}{2}$.

Следствие 2. При $\tau \geq \tau_0$ и $c_1 c_7 \neq c_4 c_6$ решения $e_1(\chi, \tau)$ и $e_2(\chi, \tau)$ линейно независимы, а значит, образуют фундаментальную систему решений уравнения (34).

Доказательство. Достаточно доказать, что определитель Вронского, составленный из этих решений, не равен нулю.

$$W(e_1, e_2) = \begin{vmatrix} e_1(\chi, \tau) & e_2(\chi, \tau) \\ e'_1(\chi, \tau) & e'_2(\chi, \tau) \end{vmatrix} = e_1(\chi, \tau) e'_2(\chi, \tau) - e_2(\chi, \tau) e'_1(\chi, \tau).$$

Воспользуемся оценками модуля суммы и разности, тогда из теорем 1, 2 и формул (44) следует, что

$$\sqrt{\tau} |c_1 c_7 - c_4 c_6| \leq |W(e_1, e_2)| \leq \sqrt{\tau} (c_2 c_8 + c_4 c_6).$$

Отсюда непосредственно вытекает доказываемое утверждение. $\square$

Заметим, что выполнения условия $c_1 c_7 \neq c_4 c_6$ всегда можно добиться в силу произвольности выбора констант q_1 и q_2 из теорем 1 и 2.

Следствие 3. Для функции $e(\tau)$ при $\tau \geq \tau_0$ и $c_1 c_7 \neq c_4 c_6$ имеет место оценка

$$c_9 \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\tau}}}{\sqrt{\tau}} \leq |e(\tau)| \leq c_{10} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\tau}}}{\sqrt{\tau}}. \quad (45)$$

Доказательство. Следует из формулы (38), теорем 1 и 2, а также формулы (44), если применить неравенства для модуля суммы и разности и обозначить $c_9 = \frac{c_2 c_4}{c_2 c_8 + c_4 c_6}$, $c_{10} = \frac{c_2 c_4}{|c_1 c_7 - c_4 c_6|}$. $\square$

Из следствия 3, в частности, получаем, что при $\tau \geq \tau_0$ выполняется $e(\tau) \neq 0$.

6. Метод проекционной регуляризации и оптимальная по порядку оценка решения

Рассмотрим интервал $0 < \tau \leq \tau_0$ и будем считать, что для таких τ функция $\widehat{f}(\tau) \neq 0$. Выполним в задаче Коши (34)–(36) замену

$$\widehat{u}_1(\chi, \tau) = e_3(\chi, \tau) \widehat{f}(\tau), \quad \tau \in (0, \tau_0], \quad \chi \in [0, 1].$$

Тогда получаем

$$\frac{d^2 e_3(\chi, \tau)}{d\chi^2} + \frac{1}{\widehat{f}(\tau)} B(\chi, \tau) * \widehat{f}(\tau) e_3(\chi, \tau) = i\tau e_3(\chi, \tau), \quad \tau \in (0, \tau_0], \quad 0 \leq \chi \leq 1,$$

$$e_3(0, \tau) = 0, \quad \tau \in (0, \tau_0],$$

$$\left. \frac{de_3}{d\chi} \right|_{\chi=0} = 1, \quad \tau \in (0, \tau_0].$$

Данная задача Коши имеет единственное решение, а потому выполнено равенство $\widehat{u}_1(1, \tau) = e_3(1, \tau) \widehat{f}(\tau)$. Кроме того, задача вычисления значений $\widehat{u}_1(1, \tau)$ при $\tau \in (0, \tau_0]$ является корректной и справедлива оценка $\|\widehat{u}_{1\delta} - \widehat{u}_{10}\| \leq c_{11} \delta$, где

$$c_{11} = \left(\sup_{\tau \in (0, \tau_0]} |e_3(1, \tau)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Используя формулу (44) и обозначив $\widehat{u}_1(1, \tau) = \widehat{u}_1(\tau)$, перепишем нашу задачу в виде операторного уравнения

$$\widehat{f}(\tau) = A_1 \widehat{u}_1(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{e_3(1, \tau)} \widehat{u}_1(\tau) & \text{при } \tau \in (0, \tau_0]; \\ \frac{1}{e(\tau)} \widehat{u}_1(\tau) & \text{при } \tau \in [\tau_0, +\infty), \end{cases}$$

где $A_1 : \overline{H} \rightarrow \overline{H}$.

Пусть $\widehat{u}_{10}(\tau) \in W_2^1(0, \infty)$ — точное решение полученной задачи, соответствующее точно заданной правой части $\widehat{f}_0(\tau)$, тогда по условию задачи найдется постоянная $r > 0$ такая, что $\|\widehat{u}_{10}\|_{L_2}^2 + \|\widehat{u}'_{10}\|_{L_2}^2 \leq r^2$.

Как и ранее, определим $\widehat{u}_{10}(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u_{10}(t) e^{-i\tau t} dt$. Тогда

$$\widehat{u}'_{10}(\tau) = i\tau \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u_{10}(t) e^{-i\tau t} dt = i\tau \widehat{u}_{10}(\tau).$$

И потому для точного решения справедливо неравенство $(1 + \tau^2)\|\widehat{u}_0\|^2 \leq r^2$.

При $\tau \in [0, \tau_0]$ задача решена, оценка решения найдена выше, потому далее будем рассматривать следующую некорректную задачу при $\tau \geq \tau_0$ (задачу вычисления значений неограниченного оператора):

$$A\widehat{u}_1(\tau) = \frac{1}{e(\tau)}\widehat{u}_1(\tau) = \widehat{f}_\delta(\tau), \quad (46)$$

где $A : \overline{H} \rightarrow \overline{H}$.

Поскольку функция $e(\tau) \neq 0$, из формулы (46) следует инъективность операторов A и A^* , поэтому в силу леммы 6, сформулированной в работе [9], существует изометрический оператор $Q : \overline{H} \rightarrow \overline{H}$ такой, что $A\widehat{u}_1(\tau) = QC\widehat{u}_1(\tau)$, где

$$C\widehat{u}_1(\tau) = \left| \frac{1}{e(\tau)} \right| \widehat{u}_1(\tau), \quad (47)$$

то есть оператор C положителен и самосопряжён.

Таким образом, уравнение (46) может быть приведено к виду

$$C\widehat{u}_1(\tau) = \widehat{\overline{f}}_\delta(\tau), \quad (48)$$

в котором $\widehat{\overline{f}}_\delta(\tau) = Q^*\widehat{f}_\delta(\tau)$, а Q^* — оператор, сопряженный с $Q(\tau) = \frac{|e(\tau)|}{e(\tau)}$.

Из сказанного выше следует, что при $\widehat{\overline{f}}_0(\tau) = Q^*\widehat{f}_0(\tau)$ уравнение (48) имеет точное решение $\widehat{u}_{10}(\tau) \in E\overline{S}_r$, где $\overline{S}_r = \{\widehat{\gamma} : \widehat{\gamma} \in \overline{H}, \|\widehat{\gamma}\| \leq r\}$, $\tau \geq \tau_0$, а

$$E\widehat{\gamma}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2}}\widehat{\gamma}(\tau), \quad \tau \geq \tau_0, \quad \widehat{\gamma}(\tau) \in \overline{H}. \quad (49)$$

Из формул (47)–(49) следует, что $E = g(C)$, где функция $g(\sigma)$ является строго возрастающей, непрерывной, удовлетворяющей условию $g(0) = 0$ (см. [9; 10]). Используя следствие 3, легко доказать, что имеет место эквивалентность

$$g(\sigma) \sim \frac{1}{2} \ln^{-2} \left(\frac{1}{\sigma} \right) \quad \text{при } \sigma \rightarrow 0. \quad (50)$$

Используя метод проекционной регуляризации, предложенный в [9], регуляризуем исходные данные задачи $(\widehat{f}_\delta(\tau), \delta)$, то есть определим функцию $\widehat{f}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}(\delta)]$ следующим образом:

- при условии $\|\widehat{f}_\delta\| > 3\delta$ определим $\widehat{f}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}(\delta)] = \begin{cases} \widehat{f}_\delta(\tau) & \text{при } \tau \leq \widehat{\alpha}(\delta) \\ 0 & \text{при } \tau > \widehat{\alpha}(\delta) \end{cases}$, где

$$\widehat{\alpha}(\delta) \text{ удовлетворяет уравнению } \int_{\widehat{\alpha}(\delta)}^{\infty} |\widehat{f}_\delta(\tau)|^2 d\tau = 9\delta^2;$$

- при условии $\|\widehat{f}_\delta\| \leq 3\delta$ определим $\widehat{f}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}(\delta)] \equiv 0$.

При выполнении этих условий функция $\widehat{f}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}(\delta)]$ определяется однозначно даже в случае неединственности решения уравнения из первого условия (см. [9; 10]).

Далее, приближенное решение $\widehat{u}_{1\delta}(\tau)$ уравнения (48) определим как $\widehat{u}_{1\delta}(\tau) = C^{-1}\widehat{f}_\delta[\tau, \widehat{\alpha}(\delta)]$, где оператор C определен формулой (47). В силу леммы 13 из работы [9] найдется постоянная c_{12} такая, что справедлива оценка

$$\|\widehat{u}_{1\delta} - \widehat{u}_{10}\| \leq c_{12} \ln^{-2} \left(\frac{1}{\delta} \right). \quad (51)$$

Постоянная c_{12} определяется соотношением (50) и условием леммы 13 из работы [9] следующим образом: $c_{12} = 12d \cdot \frac{1}{2} = 6d$, где $d \geq r\|E\| \geq 1$. Так как $\|E\| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau_0^2}}$, то выбираем $d \geq \frac{r}{\sqrt{1 + \tau_0^2}} \geq 1$.

Из теоремы, сформулированной в работе [9], следует, что оценка (62) является точной по порядку на классе $E\overline{S}_r$, а соответствующий метод проекционной регуляризации оптимален по порядку на этом классе решений.

Далее, соберём воедино обе полученные оценки для корректной и некорректной задачи и получим для всех $\tau \geq 0$ и при $\delta \rightarrow 0$

$$\|\widehat{u}_{1\delta} - \widehat{u}_{10}\| \leq c_{12} \ln^{-2} \left(\frac{1}{\delta} \right).$$

Чтобы окончательно получить приближенное решение $u_{1\delta}(s)$, применим обратное к F преобразование F^{-1} и тогда $u_{1\delta}(s) = \operatorname{Re}\{F^{-1}[\widehat{u}_{1\delta}(\tau)]\}$. Поскольку преобразование F изометрично, то для приближённого решения $u_{1\delta}(s)$ последняя оценка остается в силе. Остаётся только выполнить все проведённые замены аргументов в обратном порядке.

Теорема 3. *Если интегралы I_1 и I_2 сходятся, то метод проекционной регуляризации для решения граничной обратной задачи Стефана (1)–(4) является оптимальным по порядку на классе $E\overline{S}_{r_1}$, где радиус r_1 связан с радиусом r и их связь устанавливается при проведении обратных замен аргумента.*

Список литературы

1. Гольдман, Н. Л. Обратные задачи Стефана. Теория и методы решения / Н. Л. Гольдман. — М. : Изд-во МГУ, 1999. — 294 с.
2. Фридман, А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. — М. : Мир, 1968. — 427 с.
3. Алифанов, О. М. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, Л. Я. Савельев. — М. : Наука, 1988. — 285 с.
4. Лаврентьев, М. М. Теория операторов и некорректные задачи / М. М. Лаврентьев, Л. Я. Савельев. — Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 1999. — 702 с.
5. Ватсон, Г. Н. Теория бесселевых функций. I / Г. Н. Ватсон. — М. : Иностран. лит., 1949. — 748 с.

-
6. **Колмогоров, А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1972. — 496 с.
 7. **Зорич, В. А.** Математический анализ. II / В. А. Зорич. — М. : Наука, 1984. — 640 с.
 8. **Наймарк, М. А.** Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 529 с.
 9. **Танана, В. П.** Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратных задач / В. П. Танана // Сиб. журн. вычисл. математики. — 2004. — Т. 7, № 2. — С. 117–132.
 10. **Танана, В. П.** Методы решения операторных уравнений / В. П. Танана. — М. : Наука, 1981. — 160 с.