

Построение универсальных нейросетевых решений для семейств краевых задач уравнения пьезопроводности

Роман Юрьевич Пономарев¹, Михаил Игоревич Ивлев¹,
Руслан Рамилевич Мигманов¹, Владимир Евгеньевич Вершинин^{1,2}✉

¹ ООО «РН-Геология Исследования Разработка», Тюмень, Россия

² Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

Контакт для переписки: v.e.vershinin@utmn.ru✉

Аннотация. Статья посвящена разработке методов получения нейросетевых аналогов аналитических решений семейств краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Аппроксимация решений краевых задач дифференциальных уравнений является актуальной задачей математического моделирования и неотъемлемым элементом алгоритмов оптимизации. Известны способы получения аналитической аппроксимации решений краевых задач за счет обучения физически информированных нейронных сетей. Выполнение уравнения и начально-краевых условий в ходе обучения такой нейронной сети обеспечивается путем добавления соответствующих слагаемых невязки в целевой функционал обучения. Данный подход приводит к тому, что при обучении нейронной сети учитываются только наперед заданные начально-краевые условия, и при их изменении требуется новое обучение. Это значительно увеличивает время расчета и ограничивает применимость физически информированных нейронных сетей при решении оптимизационных задач.

В работе предложен способ учета параметризованного множества начально-краевых условий при обучении физически информированной нейронной сети. На примере краевых задач с произвольными начальными и граничными условиями для уравнения пьезопроводности с переменными коэффициентами построен физико-информированный нейросетевой оператор, позволяющий получать семейства аппроксимационных решений, и дана оценка их точности. В основе предложенного метода лежит изменение структуры нейронной сети и использование переменных весовых коэффициентов вместо постоянных, что делает такую нейросеть разновидностью сетей Колмогорова–Арнольда.

Для нахождения весовых функций предложено использовать вложенные нейронные сети персептронного вида. Предложенный подход позволяет решать оптимизационные задачи с помощью обученных физически информированных нейронных сетей без обращения к численным сеточным решениям.

Ключевые слова: краевые задачи, физико-информированные нейронные сети, PINN, нейросетевой оператор, сети Колмогорова–Арнольда, KAN

Цитирование: Пономарев Р. Ю., Ивлев М. И., Мигманов Р. Р., Вершинин В. Е. 2025. Построение универсальных нейросетевых решений для семейств краевых задач уравнения пьезопроводности // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 11. № 4 (44). С. 93–118. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2025-11-4-93-118>

Поступила 25.09.2025; одобрена 17.11.2025; принята 18.11.2025

Construction of universal neural network solutions for families of boundary value problems of the piezoelectric equation

Roman Yu. Ponomarev¹, Mikhail I. Ivlev¹, Ruslan R. Migmanov¹, Vladimir E. Vershinin^{1,2}✉

¹ RN-Geology Research Development, Tyumen, Russia

² University of Tyumen, Tyumen, Russia

Corresponding author: v.e.vershinin@utmn.ru✉

Abstract. The article is devoted to the development of methods for obtaining neural network analogues of analytical solutions to families of boundary value problems for partial differential equations. Approximation of solutions to boundary value problems of differential equations is an urgent task of mathematical modeling and an integral element of optimization algorithms. There are known methods for obtaining analytical approximations of solutions to boundary value problems by training physical informed neural networks. The fulfillment of the equation and the initial boundary conditions during the training of such a neural network is ensured by adding the corresponding terms of the discrepancy to the target learning functional. This approach leads to the fact that when training a neural network, only the pre-set initial boundary conditions are taken into account, and when they change, new training is required. This significantly increases the calculation time and limits the applicability of physically informed neural networks in solving optimization problems.

The paper proposes a method for taking into account a parameterized set of initial boundary conditions when training a physically informed neural network. Using the example of boundary value problems with arbitrary initial and boundary conditions for the diffusivity equation with variable coefficients, a physical informed neural network operator is constructed that allows obtaining families of approximation solutions and an estimate of their accuracy is given. The proposed method is based on changing the structure of the neural network and using variable weighting coefficients instead of constant ones, which makes such a neural network a kind of Kolmogorov–Arnold networks. It is proposed to use nested perceptron neural networks to find the weight functions. The proposed approach makes it possible to solve optimization problems using trained physically informed neural networks without resorting to numerical grid solutions.

Keywords: boundary value problems, physical informed neural networks, PINN, neural network operator, Kolmogorov–Arnold networks, KAN

Citation: Ponomarev, R. Yu., Ivlev, M. I., Migmanov, R. R., & Vershinin, V. E. (2025). Construction of universal neural network solutions for families of boundary value problems of the piezoelectric equation. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 11(4), 93–118. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2025-11-4-93-118>

Received Sep. 25, 2025; Reviewed Nov. 17, 2025; Accepted Nov. 18, 2025

Введение

Во множестве практических задач управления требуется решение оптимизационных задач. Например, в нефтегазовой отрасли решаются задачи подбора оптимальных режимов работы скважин. Основной инструмент для моделирования и оптимизации процессов добычи нефти и газа — гидродинамическая модель, в основе которой лежат алгоритмы приближенного численного решения системы дифференциальных уравнений в частных производных (УЧП). При численном моделировании есть существенное ограничение — полученное решение справедливо только для заданных начально-краевых условий (НКУ) расчета. При изменении этих условий потребуются повторная итерационная процедура поиска решения краевой задачи для УЧП. Множественное моделирование различных вариантов работы скважин при решении задач оптимизации в таком случае потребует значительного количества машинного времени, что затрудняет решение таких задач. Этому недостатка лишены аналитические решения краевых задач, содержащие НКУ в явном виде. Каждое такое выражение представляет собой целое семейство решений для начально-граничных условий достаточно произвольного вида. Однако получить их удастся лишь в предельно простых случаях. Поэтому важно разработать методы, позволяющие оперативно получать приближенные решения для семейств краевых задач дифференциальных уравнений.

Известны различные способы получения аналитической (бессеточной) аппроксимации решений краевых задач за счет обучения искусственных нейронных сетей (ИНС), выступающих в качестве универсальных аппроксиматоров решений. При обучении «с учителем» на известных значениях аппроксимируемого решения широкое распространение нашли перцептронные модели ИНС [Cybenko, 1989; Горбань, 1998; Васильев и др., 2015; Васильев и др., 2016]. В случае аппроксимации упорядоченных временных зависимостей наилучшие результаты показывают ИНС рекуррентного типа [Хайкин, 2019]. В прикладных задачах прогнозирования процессов добычи углеводородов обучение ИНС подходящей архитектуры и типа часто осуществляется на результатах множественного численного моделирования гидродинамической модели при различных начально-краевых условиях. Обучающая выборка содержит значения численно найденной сеточной функции в некоторых заданных точках из области допустимых значений (ОДЗ). Такими точками могут являться узлы численной сетки или узлы расположения забоев скважин. Такой подход называют суррогатным моделированием [Mohaghegh et al., 2012; Mohaghegh, 2018; Maarouf et al., 2022; Вершинин, Пономарев, 2023; Ma Xianlin et al., 2024]. Точность нейросетовой аппроксимации напрямую зависит от качества адаптации и размеров ячеек исходной гидродинамической модели. Сами исходные уравнения в межузельном пространстве при таком подходе могут не выполняться. Альтернативным подходом для решения краевых задач является использование физически информированных ИНС (PINN — physical informed neural network), в которых УЧП и НКУ в явном виде учитываются при обучении [Raissi et al., 2019; Thuerey et al., 2022; Галкин и др., 2022; Бутырский и др., 2010]. PINN активно используются при решении задач в различных областях физики [Зрелова, Ульянов, 2022], в том числе и подземной гидромеханике [Fuks et al., 2020], [Cedric et al., 2022]. Выполнение уравнения и НКУ в ходе обучения нейронной сети обеспечивается за счет добавления соответствующих слагаемых невязки в целевой функционал обучения. Однако данный подход приводит к тому, что при обучении PINN, как и в случае численного моделирования, учитываются только единственные, наперед заданные НКУ и коэффициенты, входящие в уравнения. При изменении условий расчета потребуются повторная процедура обучения нейронной сети для получения нового решения. Такой подход по результатам мало чем отличается от традиционного численного моделирования и не решает задачу нахождения семейства приближенных решений для некоторого множества НКУ или вида функций, входящих в коэффициенты уравнения.

В последнее время активно развиваются методы решения семейств краевых задач для УЧП с использованием нейронных операторов. Нейронные операторы представляют собой обобщение нейронных сетей, позволяющее аппроксимировать отображения между бесконечномерными векторными пространствами, в то время как классические нейронные сети осуществляют отображения между конечномерными пространствами. Например, УЧП с переменными коэффициентами представляет собой оператор $\hat{J}: k(\mathbf{x}) \rightarrow u(\mathbf{x})$, заданный на множестве функций $k(\mathbf{x})$, входящих в коэффициенты уравнения, и отображающий их на множество $u(\mathbf{x})$ — решений уравнения. Нейронный оператор представляет собой нейронную сеть, обученную на парах

$(k(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}))$. Дискретная структура нейронной сети требует дискретизации функций, входящих в обучающие пары. Нейронные операторы отличаются от конечномерных нейронных сетей архитектурой и алгоритмами обучения. На данный момент существует множество различных нейронных операторов, среди которых наибольший интерес представляют глубокие операторные сети [Lu Lu et al., 2019] (DeepONet) и операторы, основанные на интегральных преобразованиях: нейронный оператор Фурье (FNO) [Zongyi Li et al., 2020], вейвлетный оператор (WNO) [Tripura et al., 2022], вейвлетный оператор на основе нестандартного вейвлетного преобразования (MWNO) [Gupta et al., 2021]. Архитектура DeepONet позволяет проводить обучение с использованием сеточных значений конечного множества отображаемых функций $\{k_i(\mathbf{x}_h)\}$ и соответствующих эталонных значений $u_i(\mathbf{y})$ решения УЧП в произвольных точках $\mathbf{y}$. Эталонные значения при этом находятся одним из классических численных методов (конечных разностей, конечных элементов, конечных объемов и др.). FNO решают задачи аппроксимации с помощью перехода в сопряженные пространства Фурье-образов исходных пар функций $(k(\mathbf{x}), u(\mathbf{y}))$. Такой переход позволяет без потери точности ускорить процесс обучения за счет использования разреженных сеток и быстрых алгоритмов Фурье-преобразований. Дискретность архитектуры нейронных сетей и ограниченность числа нейронов приводит к использованию конечного числа гармоник ряда Фурье и фактической конечномерности такого отображения [Фанасков, Оседлец, 2023]. Преимуществом FNO является инвариантность относительно дискретизации сетки $\mathbf{x}_h$, на которой производится обучение. В основе FNO лежит теорема Котельникова–Найквиста–Шеннона о возможности восстановления коэффициентов ряда Фурье из значений функции на равномерной сетке. Обучение FNO, как и в случае с DeepONet, требует нахождения эталонных решений одним из классических численных методов.

В работе рассматриваются подходы к построению нейросетевых операторов с использованием физически информированных ИНС. Это позволяет полностью отказаться от использования эталонных сеточных решений, получаемых традиционными численными методами. В случае решения задач подземной гидромеханики такой нейросетевой оператор может выступать в качестве альтернативного метода гидродинамического моделирования, не требующего для своего обучения множественных расчетов на гидродинамических симуляторах.

Исследование проводилось на семействах краевых задач, отличающихся значениями функций, входящих в НКУ и коэффициентов УЧП, и последующей аппроксимации решений семейств краевых задач. Показано, что для этого необходимо вместо весовых коэффициентов использовать весовые функции. Получающаяся при этом нейронная сеть будет являться разновидностью ИНС Колмогорова–Арнольда (KAN — Kolmogorov–Arnold network) [Колмогоров, 1957], [Liu et al., 2024]. Предложена архитектура и алгоритм обучения физически информированной ИНС с использованием вложенных нейронных сетей персептронного типа. Точность аппроксимации предложенного нейросетевого алгоритма тестируется на семействах краевых задач одномерной, однофазной фильтрации.

Реализация «тривиального» способа учета произвольных условий расчета

Идея обучить нейронную сеть воспроизводить решения при произвольных НКУ является весьма заманчивой, поскольку это позволило бы решать практически важные задачи прогнозирования и оптимизации режимов разработки с помощью единожды обученной ИНС. Наиболее простым для изучения является пример параметрически задаваемого семейства функций, входящих в НКУ. Для обучения ИНС на таком семействе информации о параметрах НКУ необходимо подавать не только в функцию невязок, но и на вход нейронной сети. Тем самым будет строиться семейство решений, параметрически зависящее от выбора краевых условий. Самым очевидным является «тривиальный» способ расширения входного вектора физически информированной нейронной сети за счет добавления в него начально-краевых параметров. Это сказывается на архитектуре ИНС: увеличивается количество нейронов входного слоя и число связей между слоями.

Рассмотрим такой подход на примере начально-краевой задачи для дифференциального уравнения параболического типа — уравнения пьезопроводности в одномерном варианте (1), с заданными граничными условиями 1 типа (2)–(4) [Баренблатт и др., 1984; Азиз, Сеттари, 2004; Басниев и др., 1993].

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$p(x, 0) = p_0, \text{ при } 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$p(0, t) = p_1, \text{ при } 0 < t \leq 1, \quad (3)$$

$$p(1, t) = p_2, \text{ при } 0 < t \leq 1, \quad (4)$$

где p_0 — начальное давление, p_1 — давление на левой границе, p_2 — давление на правой границе. Граничные и начальные условия соответствуют одной из стандартных задач подземной гидромеханики, описывающей динамику пластового давления при одновременном включении в работу двух скважин с различными забойными давлениями. Отметим, что в точках $(0,0)$ и $(1,0)$ краевой задачи (1)–(4) в общем случае наблюдается разрыв между начальными и граничными значениями. Это приводит к тому, что представляемое в виде ряда точное аналитическое решение, удовлетворяющее уравнению (1) и граничным условиям (2)–(3), стремится к начальному условию (4) лишь в пределе $t \rightarrow 0$. Причем эта сходимость не является равномерной из-за особенностей в точках $(0,0)$ и $(1,0)$.

Структура полносвязной нейронной сети для реализации «тривиального» способа, описанного выше, должна быть аналогична представленной на рис. 1. Количество нейронов скрытого слоя на рис. 1 показано условно.

Часть нейронов входного слоя при этом служит для задания координат и времени точек обучения. Эти данные необходимы для оценки невязки слагаемых в уравнении (1). Другая часть входных нейронов отвечает за задание значений параметров, входящих в НКУ (2), (3), (4).

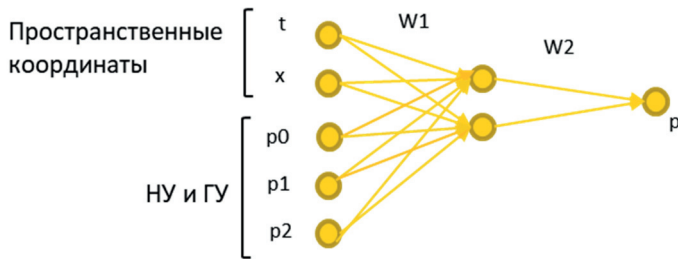


Рис. 1. Пример архитектуры полносвязной нейронной сети персептронного типа
Fig. 1. Example of the architecture of a fully connected perceptron-type neural network

Целевой функционал обучения ИНС формируется следующим образом:

$$loss = \sum (P_{ну и гу} - P)^2 + \sum (\frac{\partial P}{\partial t} - a \frac{\partial^2 P}{\partial x^2})^2 \rightarrow 0. \tag{5}$$

Суммирование в (5) проводится по всем точкам обучающей выборки.

Проведем обучение такой ИНС на примере одной краевой задачи. Создание и обучение проводилось с применением языка программирования Python и библиотеки PyTorch.

Примем параметры $a = 0.1$, p_0 (начальное давление) = 1, $p_1 = 0$ (левая граница) и $p_2 = 1$ (правая граница). Разрыв НКУ при этом задан в точке (0,0). Динамика целевой функции обучения в зависимости от эпох обучения представлена на рис. 2.



Рис. 2. Динамика целевой функции обучения
Fig. 2. Dynamics of the learning objective function

График на рис. 2 указывает на хорошую сходимость к нулю loss-функции при обучении. Сравнение рассчитанных с помощью ИНС безразмерных давлений с аналитическим решением показано на рис. 3.

Из рис. 3 следует, что несмотря на то, что целевая функция обучения имеет значение, близкое к нулю, нейросетевое решение не совпадает с аналитическим в области левого конца. Очевидно, что связано это в первую очередь с тем, что начально-краевые условия испытывают разрыв на левом конце в точке (0,0). Измельчение сетки, на которой ведется обучение, незначительно улучшает точность аппроксимации.

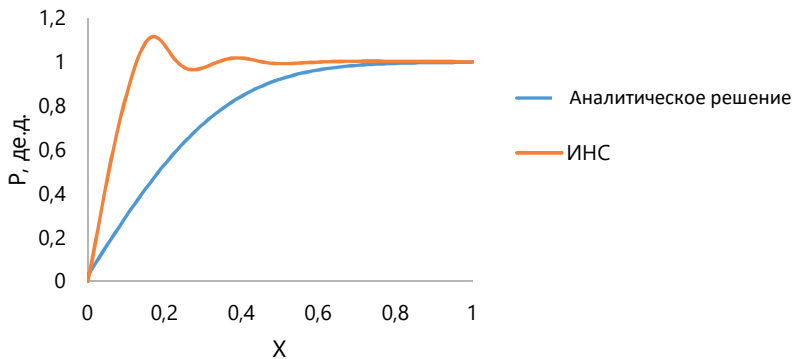


Рис. 3. Сопоставление решений в момент $t = 1$

Fig. 3. Comparison of solutions at time $t = 1$

Введение дополнительных весовых коэффициентов в слагаемые loss-функции позволяет несколько повысить точность аппроксимации для конкретного набора параметров НКУ, но не решает проблему плохой точности кардинально и, кроме того, не может быть применено при поиске семейства решений. Данный пример демонстрирует наличие одной из проблем обучения PINN: одновременное выполнение дифференциального уравнения и независимых от него НКУ. При традиционном подходе, используемом при обучении PINN, возможно разделить выполнение условий на границе и во внутренних точках за счет введения проверки принадлежности точки к границе при расчете loss-функции. При введении параметров НКУ во входной вектор они начинают напрямую влиять на выполнение уравнения во внутренних точках. Это происходит за счет связей между входными нейронами для задания параметров НКУ и внутренними нейронами, формирующими аппроксимирующее решение (показаны красным цветом на рис. 4).

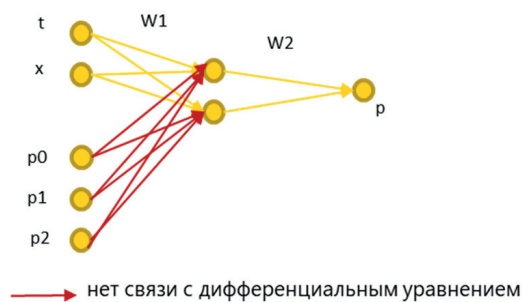


Рис. 4. Схема влияния весов

Fig. 4. Scheme of weights influence

Множественные расчеты по обучению ИНС показали, что эти связи негативно сказываются на точности аппроксимации даже в рамках решения отдельных краевых задач для уравнения (1). В ряде случаев обучение приводило к формированию три-

виальных (нулевых) решений во внутренних точках с быстрым выходом к значениям НКУ в окрестности границ ОДЗ.

На основе вышесказанного можно сделать вывод, что «тривиальный» способ практически не применим для нахождения решений краевых задач при произвольных НКУ, если использовать для обучения целевую функцию типа (5), которая не содержит в себе контрольных значений давлений в области решения.

Методы получения универсальных решений с помощью глубоких нейронных операторов (DeepONet) реализуют более сложный вариант «тривиального» способа обучения (рис. 5).

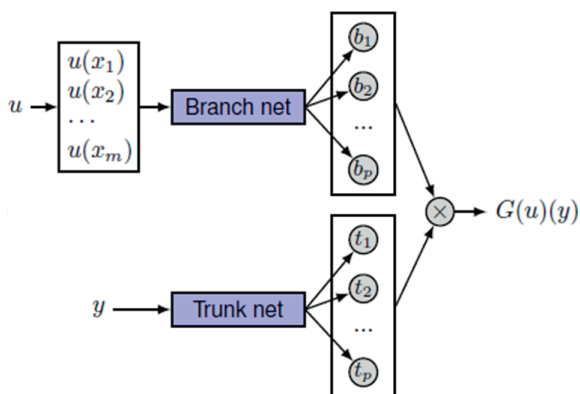


Рис. 5. Схема DeepONet [Lu Lu, 2019]

Fig. 5. DeepONet scheme (Lu Lu et al., 2019)

Итоговое решение $G(u)(y)$ в явном виде зависит от условий НКУ совместно с пространственными координатами. Следовательно, этим моделям свойственны проблемы «тривиального» способа, описанного выше. Часто в таких моделях для обучения используют заранее сгенерированный набор численных или аналитических решений для обучения ИНС. Применение контрольных значений аппроксимируемой функции позволяет избежать нелогичности в получении аппроксимации решения краевой задачи дифференциального уравнения.

Метод вложенных нейронных сетей для учета произвольных НКУ

Один из возможных способов учета произвольных НКУ может быть получен исходя из анализа поведения весовых коэффициентов при обучении ИНС на семействе краевых задач. Рассмотрим его на примере краевой задачи (1)–(4) в общем виде. Для упрощения примем, что $a = \text{const} = 0.1 \text{ м}^2/\text{с}$ и вариативными являются только параметры НКУ.

Запишем в общем виде модель многослойного персептрона для аппроксимации решения краевой задачи:

$$P(x, t) = W_2 \cdot \text{th}(W_1 \cdot (x, t) + b_1) + b_2. \quad (6)$$

При обучении ИНС веса W_1 , W_2 , b_1 и b_2 находятся из условия минимизации целевого функционала (5), что обеспечивает максимально точное выполнение дифференциального уравнения (1) и начально-краевых условий (2)–(4). Результат обучения на каждом наборе параметров семейства НКУ будет индивидуальным. Это значит, что веса ИНС не являются константами и после обучения должны зависеть от параметров НКУ. Они могут быть представлены как функции p_0 , p_1 и p_2 :

$$W(\text{ИНС}) = f(p_0, p_1, p_2), \quad (7)$$

где $W(\text{ИНС})$ — вектор весов модели ИНС (6).

Естественный переход к переменным весовым коэффициентам (7) в ИНС (6) делает ее разновидностью сетей Колмогорова–Арнольда (KAN — Kolmogorov–Arnold network) [Liu et al., 2024]. При традиционном KAN подходе каждая обучаемая связь между нейронами описывается функцией одной переменной, которая обычно задается в виде сплайна [Liu et al., 2024] или радиально-базисной функции [Li, 2024]. Отличие рассматриваемого примера состоит в том, что веса в (6) зависят от выделенного набора нескольких переменных: множества параметров НКУ и не зависят от координат точек (x, t) . В этом случае применение обучаемых сплайнов может давать значительную погрешность [Li, 2024]. Поэтому для нахождения вида неизвестных весовых функций f (7) многих переменных целесообразно воспользоваться моделью многослойного персептрона, который может быть реализован в виде вложенной ИНС. На вход такой вложенной ИНС подаются возможные значения p_0 , p_1 , p_2 , на выходе получаем весовые функции основной модели $W(\text{ИНС})$.

$$W(\text{ИНС}) = W_{20} \cdot \tanh(W_{10} \cdot (p_0, p_1, p_2) + b_{10}) + b_{20}. \quad (8)$$

Для того чтобы проверить корректность рассчитанных весов $W(\text{ИНС})$, их нужно подставить в основную ИНС (6) и рассчитать функционал (5).

В новой постановке цель обучения — оптимизировать веса модели (8) таким образом, чтобы минимизировать суммарный функционал (9) на множестве заданных обучающих наборов параметров (p_0, p_1, p_2) .

$$\text{loss} = \sum_{p_0, p_1, p_2} (\sum_{p_{\text{ну и ГУ}}} (p - p_{\text{ну и ГУ}})^2 + \sum (\frac{\partial p}{\partial t} - a \frac{\partial^2 p}{\partial x^2})^2) \rightarrow 0. \quad (9)$$

Предлагаемая схема взаимодействия основной и вложенной ИНС представлена на рис. 6.

Предлагаемый подход позволяет использовать для обучения ИНС только дифференциальное уравнение и НКУ без применения расчетных контрольных точек и без риска получения противоречивости УЧП и НКУ в аппроксимации решений краевых задач. Данное свойство является главным отличием от DeepONet.

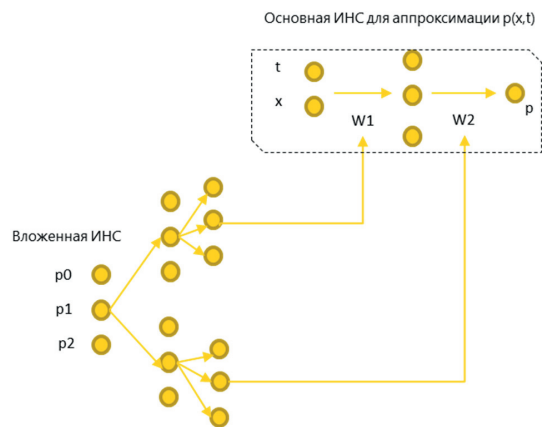


Рис. 6. Схема взаимодействия и обучения ИНС

Fig. 6. Scheme of interaction and training of the ANN

Тестирование метода вложенных нейронных сетей

Протестируем предлагаемую схему на переменных начально-краевых условиях, где каждый параметр p_0 , p_1 и p_2 изменяется в диапазоне от 0 до 1. Для обучения ИНС использовалось по 3 равномерно расположенных в диапазоне $(0,1)$ значения каждого параметра. Всего было сгенерировано 27 тренировочных наборов различных НКУ из возможных сочетаний значений p_0 , p_1 и p_2 . Обучение предлагаемой архитектуры проводилось на регулярной сетке 20×80 , где 20 точек по оси x и 80 точек по оси t . В качестве оптимизатора использовался градиентный алгоритм Adam. Гиперпараметры модели, такие как шаг градиента, количество нейронов на слоях и весовые коэффициенты в целевой функции модели, подбирались с помощью алгоритмов GridSearch. Критерий остановки обучения — достижение максимального количества эпох обучения или рост ошибки на валидационной выборке в течении 1000 эпох.

Время обучения ИНС с применением видеокарты NVIDIA RTX A4000 составляет — 9 часов 72 минуты.

Подобранные гиперпараметры обучения представлены в табл. 1.

Таблица 1. Гиперпараметры обучения модели

Table 1. Hyperparameters of the model training

Название параметров	Значение
Кол-во нейронов на вложенных ИНС (1 промежуточный слой)	500
Кол-во нейронов на основной ИНС (2 промежуточных слоя)	500,100
Шаг градиента	1e-4
Множитель целевой функции на ДУ	Экспоненциальное изменение от 1e-5 до 1
Множитель l2-регуляризации	1e-4
Максимальное кол-во эпох обучения	50 000

Динамика целевой функции обучения на подобранных оптимальных гиперпараметрах модели в зависимости от эпох обучения представлена на рис. 7.

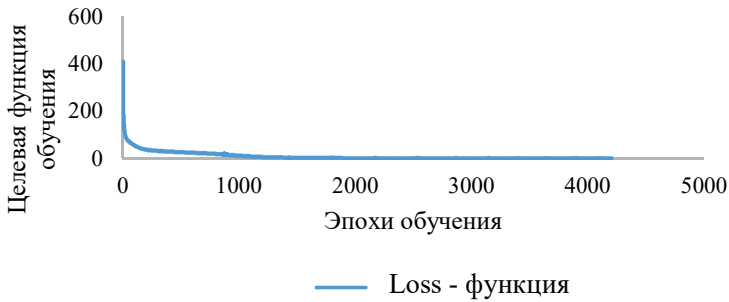


Рис. 7. Динамика обучения ИНС

Fig. 7. ANN learning dynamics

Из рис. 6 следует, что ИНС успешно обучилась. Динамика давления для одного из вариантов НКУ, входившего в обучающую выборку, в сравнении с эталонным аналитическим решением показана на рис. 8.

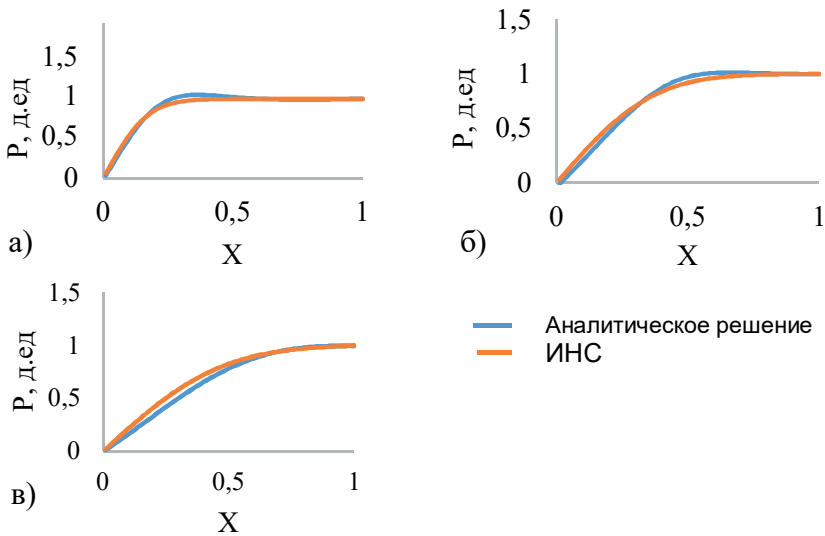


Рис. 8. Динамика распределения давления для $p_0 = 1$, $p_1 = 0$, $p_2 = 1$.

а) Момент времени $t = 0.1$, б) момент времени $t = 0.5$, в) момент времени $t = 1.0$

Fig. 8. Dynamics of pressure distribution for $p_0 = 1$, $p_1 = 0$, $p_2 = 1$.

а) At $t = 0.1$; б) at $t = 0.5$; в) at $t = 1.0$

Средняя точность моделирования по метрике MAPE при этом составила 3%.

Проведем аналогичные вычисления для сочетаний p_0 , p_1 и p_2 , которые отсутствовали в обучающей выборке. Динамика давления на сетке 100×100 для одного из таких вариантов НКУ в сравнении с эталонным решением показана на рис. 9.

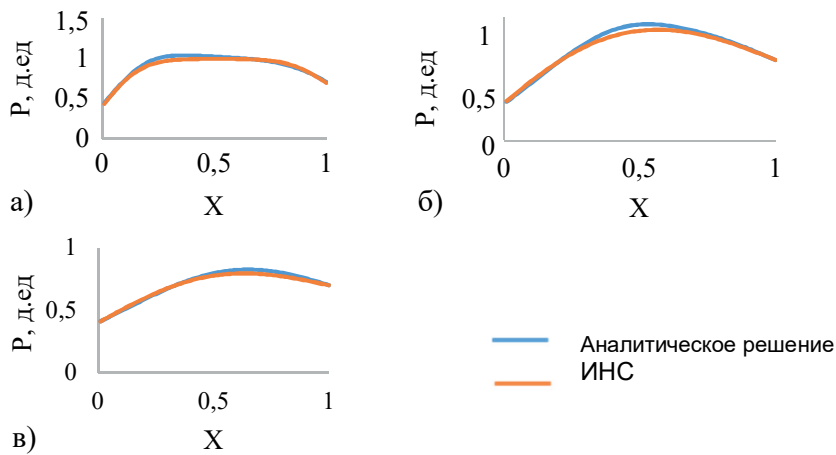


Рис. 9. Распределение давления для $p_0 = 1, p_1 = 0.4, p_2 = 0.7$.
а) Момент времени $t = 0.1$; б) момент времени $t = 0.5$; в) момент времени $t = 1.0$
Fig. 9. Pressure distribution for $p_0 = 1, p_1 = 0.4, p_2 = 0.7$.
а) At $t = 0.1$; б) at $t = 0.5$; в) at $t = 1.0$

Точность моделирования по метрике MAPE составляет 1.7%. Ниже представлена табл. 2 оценки точности для различных комбинаций (p_0, p_1, p_2) .

Таблица 2. Результаты моделирования для различных комбинаций p_0, p_1 и p_2
Table 2. Simulation results for various combinations of p_0, p_1 and p_2

№	Режим расчета			MAPE*, %	MAE	RMSE
	p_0	p_1	p_2			
1	1	0	1	3.1	0.036	0.049
2	0	0.5	0.5	3.1	0.016	0.022
3	0.5	0	1	3.7	0.030	0.037
4	1	0.4	0.7	1.7	0.034	0.044
5	0.5	0.4	0.5	0.4	0.003	0.004
6	0.4	0	1	4.0	0.028	0.035
7	0.1	0.2	0.9	3.6	0.017	0.024
8	0.5	0.4	0.7	1.2	0.009	0.011
9	0.7	1	0.5	1.5	0.016	0.021
10	0.8	0.6	0.7	0.6	0.009	0.011
11	0.4	0.6	0.9	1.3	0.008	0.013
12	0.6	0.4	0.4	0.7	0.006	0.008
13	0.8	0.7	0.9	0.7	0.007	0.009
14	0.8	0.4	0.9	1.6	0.020	0.025

Окончание табл. 2
Table 2 (end)

№	Режим расчета			MAPE*, %	MAE	RMSE
	p0	p1	p2			
15	0.6	0.7	0.5	0.7	0.006	0.008
Среднее	-	-	-	1.86	0.016	0.021

*оценка MAPE пересчитана после ренормировки давлений к реальным промышленным диапазонам по формуле: $P_{\text{атм.}} = P_{\text{д.ед.}} \cdot (250 - 50) + 50$.

* the MAPE estimate was recalculated after renormalization of pressures to real field ranges using the formula $P_{\text{атм.}} = P_{\text{д.ед.}} \cdot (250 - 50) + 50$.

По результатам вычислительного эксперимента можно сделать вывод, что предлагаемый метод построения и обучения ИНС позволяет найти нейросетевую аппроксимацию семейства решений краевой задачи (1)–(4) для произвольных значений параметров (p0, p1, p2) из промежутка (0,1).

Усложним задачу: введем зависимость начального давления от пространственной координаты X. Для обучения ИНС сгенерируем 200 вариантов случайного ступенчато изменяющегося распределения начального давления. Примеры распределения начального давления представлены на рис. 10.

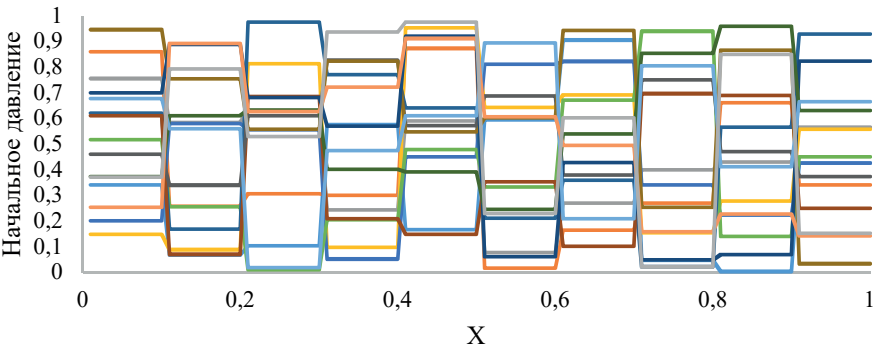


Рис. 10. Примеры вариантов распределения начального давления

Fig. 10. Examples of initial pressure distribution options

Для учета зависимости начального давления от X на вход вложенных нейронных сетей были добавлены дополнительные 10 нейронов, на которые последовательно подавалась информация о заданном начальном давлении в 10 пространственных точках. Для тестирования обученной ИНС были сгенерированы дополнительные случайные варианты распределения начального давления, которые не участвовали в обучении. Расчеты на ИНС сравнивались с «эталонными» численными расчетами.

Время обучения ИНС с применением видеокарты NVIDIA RTX A4000 составляет — 24 часа.

Подобранные гиперпараметры обучения представлены в табл. 3.

Таблица 3. Гиперпараметры обучения модели (переменное начальное давление)
Table 3. Hyperparameters of model training (variable initial pressure)

Название параметров	Значение
Кол-во нейронов на вложенных ИНС (1 промежуточный слой)	500
Кол-во нейронов на основной ИНС (2 промежуточных слоя)	500,100
Шаг градиента	1e-5
Множитель целевой функции на ДУ	Экспоненциальное изменение от 1e-5 до 1
Множитель l2-регуляризации	1e-3
Максимальное кол-во эпох обучения	50 000

Результаты сравнения тестовых режимов с эталонными сведены в табл. 4.

Таблица 4. Результаты моделирования для тестовых распределений начального давления

Table 4. Simulation results for test distributions of initial pressure

№ случайного режима	MAPE*, %	MAE	RMSE
1	4.0	0.033	0.044
2	2.3	0.018	0.028
3	1.9	0.015	0.026
4	1.6	0.012	0.020
5	1.8	0.014	0.026
6	1.8	0.014	0.025
7	2.4	0.019	0.033
8	2.3	0.017	0.027
9	2.4	0.020	0.032
10	1.8	0.013	0.025
11	1.8	0.013	0.021
12	3.1	0.022	0.031
13	1.8	0.014	0.029
14	1.8	0.014	0.027
15	1.8	0.014	0.021
Итого	2.18	0.017	0.028

* оценка MAPE пересчитана после ренормировки давлений к реальным промысловым диапазонам по формуле: $P_{\text{атм.}} = P_{\text{д.сд.}} (250 - 50) + 50$.

* the MAPE estimate was recalculated after renormalization of pressures to real field ranges using the formula $P_{\text{атм.}} = P_{\text{д.сд.}} (250 - 50) + 50$.

На рис. 11–13 приведены графики распределения давления в различные моменты времени для режимов № 1–3 (соответственно) табл. 4, рассчитанные с помощью ИНС и численным методом.

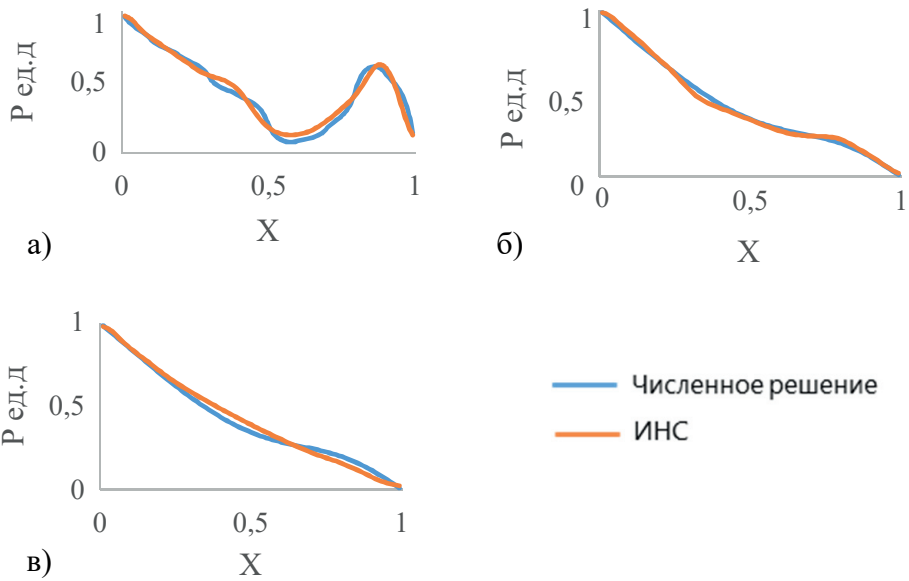


Рис. 11. Распределение давления режима № 1. а) Момент времени $t = 0.1$; б) момент времени $t = 0.5$; в) момент времени $t = 1.0$

Fig. 11. Pressure distribution of mode no. 1. а) At $t = 0.1$; б) at $t = 0.5$; в) at $t = 1.0$

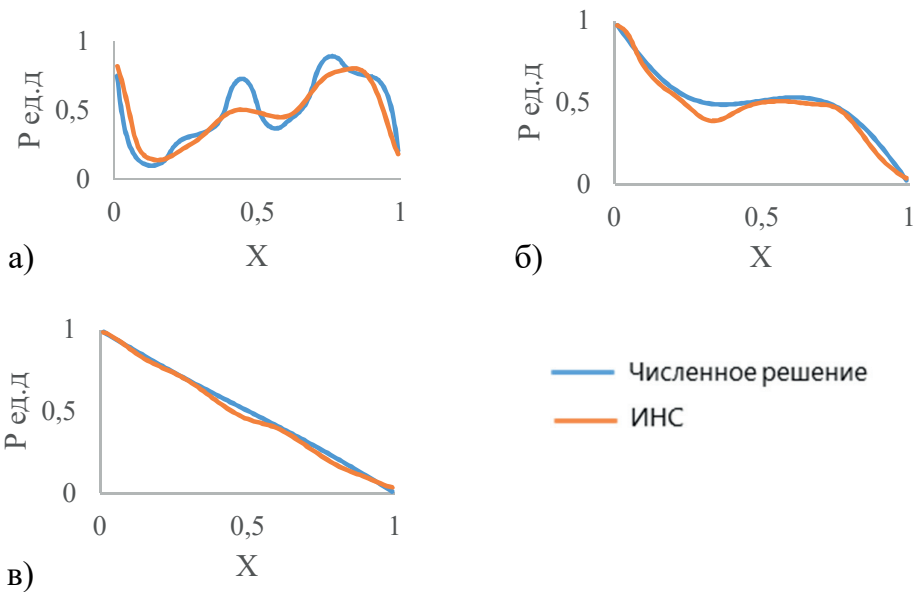


Рис. 12. Распределение давления режима № 2. а) Момент времени $t = 0.1$; б) момент времени $t = 0.5$; в) момент времени $t = 1.0$

Fig. 12. Pressure distribution of mode no. 2. а) At $t = 0.1$; б) at $t = 0.5$; в) at $t = 1.0$

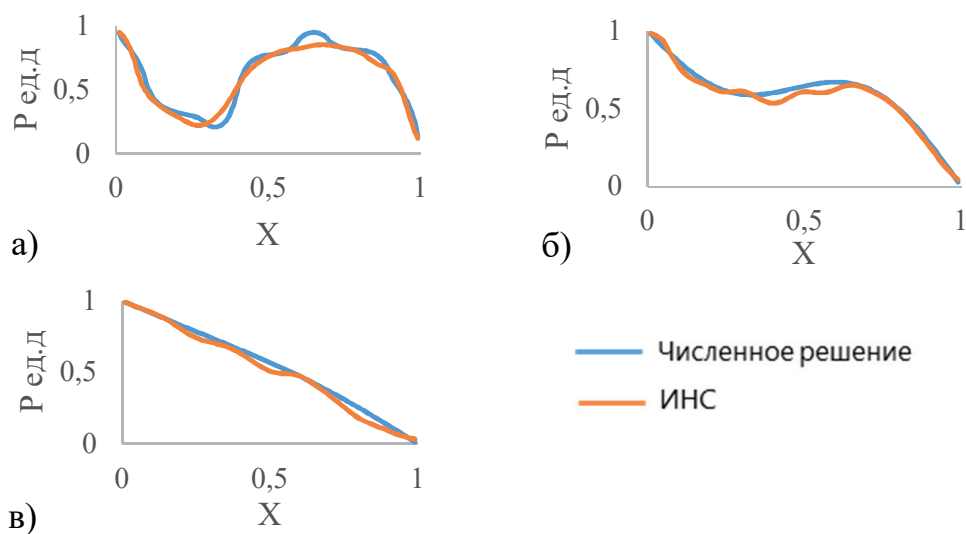


Рис. 13. Распределение давления режима № 3. а) Момент времени $t = 0.1$; б) момент времени $t = 0.5$; в) момент времени $t = 1.0$

Fig. 13. Pressure distribution of mode no. 3. а) At $t = 0.1$; б) at $t = 0.5$; в) at $t = 1.0$

Из табл. 2 и графиков, приведенных на рис. 10–12, можно сделать вывод, что ИНС в целом корректно воспроизводит решения при различных вариантах распределения начального давления. Наиболее значимые отклонения ИНС-решения от эталонного (численного) решения наблюдаются в начальные моменты времени. Нейросетевое решение сглаживает отдельные скачки начального распределения. Средняя ошибка моделирования (MAPE) во времени по 15 тестовым режимам в среднем составляет 2,2%.

Тестирование учета произвольных геологических условий расчета

Используем подход вложенных ИНС для учета вариативности значений проницаемости пласта — α , входящей в уравнение (1). Для упрощения примем, что проницаемость имеет постоянное значение и не зависит от координаты X . Проведем процедуру обучения ИНС, используя 5 значений α , равномерно расположенных в диапазоне от 0.01 до 0.5. Обучение модели производится на сетке 20×80 , где 20 точек по оси x и 80 точек по оси t . Расчет прогнозных значений давления проводился на сетке 100×100 .

Размер обучающей выборки составляет 12 примеров. Время обучения ИНС с применением видеокарты NVIDIA RTX A4000 составляет 50 минут.

Подобранные гиперпараметры обучения представлены в табл. 5.

Таблица 5. Гиперпараметры обучения модели (переменное начальное давление)

Table 5. Hyperparameters of model training (variable initial pressure)

Название параметров	Значение
Кол-во нейронов на вложенных ИНС (1 промежуточный слой)	250
Кол-во нейронов на основной ИНС (2 промежуточных слоя)	250,100
Шаг градиента	1e-5
Множитель целевой функции на ДУ	Экспоненциальное изменение от 1e-5 до 1
Множитель L2-регуляризации	1e-5
Кол-во эпох обучения	50 000

Результаты расчетов представлены на рис. 14 и в табл. 6.

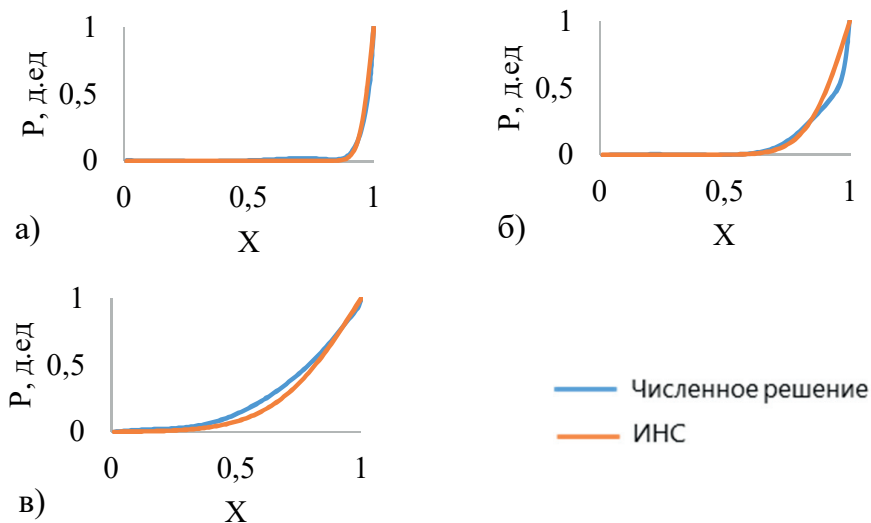


Рис. 14. Распределение давления при различных значениях параметра a в момент времени $t = 0.1$. а) $a = 0.01$; б) $a = 0.1$; в) $a = 0.4$

Fig. 14. Pressure distribution at different values of parameter a at $t = 0.1$. а) $a = 0.01$; б) $a = 0.1$; в) $a = 0.4$

Усложним задачу и рассмотрим случай зависимости пьезопроводности от пространственной координаты X , а именно ступенчатое изменение пьезопроводности на 4 фиксированных участках. Значения пьезопроводности внутри участков задавались случайным образом в диапазоне от 0 до $0,5 \text{ м}^2/\text{с}$.

Размер обучающей выборки составляет 100 примеров. Время обучения ИНС с применением видеокарты NVIDIA RTX A4000 составляет 19 часов.

Таблица 6. Результаты моделирования для различных значений пьезопроводности пласта

Table 6. Simulation results for different values of the piezoelectric conductivity of the reservoir

№	Режим расчета	MAPE*, %	MAE	RMSE
	а			
1	0.010	3.1	0.009	0.016
2	0.100	3.0	0.013	0.029
3	0.230	4.0	0.008	0.020
4	0.050	5.7	0.033	0.063
5	0.433	2.8	0.006	0.020
6	0.436	2.8	0.006	0.020
7	0.325	2.3	0.007	0.020
8	0.071	4.6	0.025	0.049
9	0.075	4.3	0.027	0.052
10	0.274	1.9	0.007	0.020
11	0.037	5.0	0.035	0.065
12	0.377	2.6	0.006	0.020
13	0.121	2.2	0.008	0.023
14	0.159	1.8	0.009	0.022
15	0.081	4.0	0.021	0.042
Итого	–	3.39	0.015	0.032

* оценка MAPE пересчитана после ренормировки давлений к реальным промышленным диапазонам по формуле: $P_{атм.} = P_{А.еД} \cdot (250 - 50) + 50$.

* the MAPE estimate was recalculated after renormalization of pressures to real field ranges using the formula $P_{атм.} = P_{А.еД} \cdot (250 - 50) + 50$.

Подобранные гиперпараметры обучения представлены в табл. 7.

Таблица 7. Гиперпараметры обучения модели (переменное начальное давление)

Table 7. Hyperparameters of model training (variable initial pressure)

Название параметров	Значение
Кол-во нейронов на вложенных ИНС (1 промежуточный слой)	500
Кол-во нейронов на основной ИНС (2 промежуточных слоя)	1 000,100
Шаг градиента	1e-5
Множитель целевой функции на ДУ	Экспоненциальное изменение от 1e-5 до 1
Множитель l2-регуляризации	1e-5
Максимальное кол-во эпох обучения	50 000

Для последующего тестирования было сгенерировано 15 распределений пьезопроводности (рис. 15).

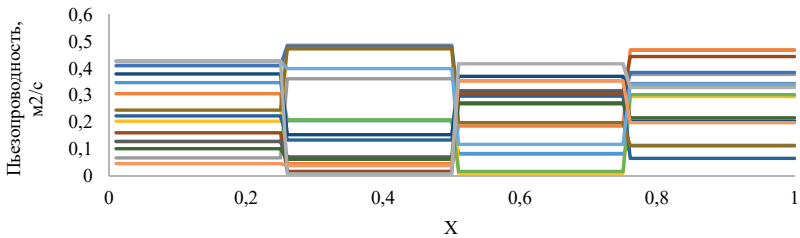


Рис. 15. Варианты распределения пьезопроводности в зависимости от X

Fig. 15. Piezoelectric conductivity distribution options depending on X

Сравнение результатов расчета давления после обучения ИНС с эталонным численным решением представлено в табл. 8.

Таблица 8. Результаты моделирования для различных случайных распределений пьезопроводности пласта

Table 8. Simulation results for various random distributions of the piezoelectric conductivity of the reservoir

№ случайного режима	MAPE*, %	MAE	RMSE
1	3.6	0.022	0.035
2	2.0	0.013	0.020
3	3.3	0.020	0.035
4	3.5	0.021	0.033
5	4.6	0.032	0.040
6	3.7	0.022	0.035
7	2.5	0.017	0.025
8	3.5	0.023	0.033
9	1.9	0.012	0.019
10	1.9	0.012	0.019
11	2.1	0.013	0.021
12	1.9	0.012	0.019
13	4.5	0.035	0.054
14	2.0	0.012	0.019
15	1.7	0.011	0.018
Итого	2.84	0.018	0.028

* оценка MAPE пересчитана после ренормировки давлений к реальным промысловым диапазонам по формуле: $P_{\text{атм.}} = P_{\text{А.еА}} \cdot (250 - 50) + 50$.

* the MAPE estimate was recalculated after renormalization of pressures to real field ranges using the formula $P_{\text{атм.}} = P_{\text{А.еА}} \cdot (250 - 50) + 50$.

По результатам численного эксперимента можно сделать вывод о том, что обученная нейронная сеть способна воспроизводить динамику распределения давления при случайных значениях пьезопроводности на разных участках X со средней ошибкой (MAPE), не превосходящей 5.2%.

Анализ полученных результатов и перспективы

Основной целью работы была разработка метода получения нейросетевых аналогов аналитических решений семейств краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных. Параметрическое задание семейств НКУ и уравнений естественным образом привело к необходимости использования параметрически зависящих весовых коэффициентов. Их нахождение проводилось с помощью вложенных нейронных сетей. Метод показал свою работоспособность и существенный прирост в скорости получения решений по сравнению с итерационным численным методом (в 15 раз относительно численного решения).

Однако нужно отметить трудности, возникшие при реализации метода и проведении расчетов:

- При большом количестве входных параметров на вложенных нейронных сетях требуется тонкая настройка гиперпараметров градиентных алгоритмов обучения ИНС для получения качественных результатов.
- Требуется достаточно большая обучающая выборка для получения удовлетворительных результатов, особенно при случайных распределениях параметров.
- Для обучения ИНС требуется большое количество времени.

Но при всех сложностях обучения ИНС имеются и плюсы:

- Получение бессеточного решения семейства краевых задач. Обученная ИНС с удовлетворительной точностью генерирует решения в любой расчетной области.
- Скорость получения решения на обученной ИНС на порядок выше численного расчета, что позволяет использовать метод для решения различных оптимизационных задач.

Несмотря на то, что метод протестирован на решении простых задач для одномерного уравнения пьезопроводности, он может быть применен для аппроксимации решений многомерных краевых задач подземной гидродинамики. Предложенный алгоритм обучения не является единственно возможным. Существуют варианты применения параметрически задаваемых сплайнов или использования других архитектур вложенных нейронных сетей при аппроксимации весов для основной ИНС. К примеру, применение сверточных нейронных сетей, возможно, позволит более эффективно обработать информацию о пространственной неоднородности геологических свойств объектов моделирования в двух и трехмерных задачах.

Развитие данной темы при решении более сложных нелинейных задач гидродинамики представляет предмет дальнейших исследований авторов.

Выводы

В работе предложен способ обучения физически информированных ИНС на параметрически заданных семействах начально-краевых условий и коэффициентов дифференциальных уравнений. В основе предложенного метода лежит использование переменных весовых коэффициентов вместо постоянных, что делает такую нейросеть разновидностью сетей Колмогорова–Арнольда. Для нахождения вида весовых функций предложено использовать вложенные нейронные сети персептронного вида. Рассмотренный подход был апробирован при построении приближенных решений семейств краевых задач для уравнения пьезопроводности. Максимальная ошибка нейросетевой аппроксимации по всем 75 тестовым расчетам составляет не более 5% относительно эталонных аналитических и численных решений.

Обученная ИНС

- дает приближенное бессеточное (непрерывное) решение;
- способна на порядок быстрее, чем численные методы, генерировать решения на произвольной расчетной сетке за счет аналитического типа аппроксимации, что делает метод пригодным для решения различных реальных промышленных задач;
- позволяет решать оптимизационные задачи без обращения к численным сеточным решениям.

Список источников

- Азиз Х., Сеттари Э. 2004. Математическое моделирование пластовых систем. Ижевск; М.: Институт компьютерных исследований. 406 с.
- Басниев К. С, Кочина И. Н., Максимов В. М. 1993. Подземная гидромеханика. Учебник для вузов. М.: Недра. С. 227–252.
- Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. 1984. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра. 211 с.
- Бутырский Е. Ю., Кувалдин И. А., Чалкин В. П. 2010. Аппроксимация многомерных функций // Научное приборостроение. Т. 20. № 2. С. 82–92.
- Вершинин В. Е., Пономарев Р. Ю. 2023. Применение методов нейросетевого моделирования при решении начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Т. 9. № 3(35). С. 132–147. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-132-147>
- Васильев А. Н., Тархов Д. А., Шемякина Т. А. 2016. Приближенные аналитические решения обыкновенных дифференциальных уравнений // Современные информационные технологии и ИТ-образование. Т. 12. № 2-3. С. 188–195.
- Васильев А. Н., Тархов Д. А., Шемякина Т. А. 2015. Нейросетевой подход к задачам математической физики. СПб.: Нестор-История. 260 с.
- Галкин В. А., Гавриленко Т. В., Смородинов А. Д. 2022. Некоторые аспекты аппроксимации и интерполяции функций искусственными нейронными сетями // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. Т. 38. № 1. С. 54–73.

- Горбань А. Н. 1998. Обобщенная аппроксимационная теорема и вычислительные возможности нейронных сетей // Сибирский журнал вычислительной техники. Т. 1. № 1. С. 12–24.
- Зрелова Д. П., Ульянов С. В. 2022. Модели физически информированных / осведомленных классических Лагранжевых / Гамильтоновых нейронных сетей в глубоком обучении // Современные информационные технологии и ИТ-образование. Т. 18. № 2. С. 310–325.
- Колмогоров А. Н. 1957. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного // Доклады АН СССР. Т. 114. № 5. С. 953–956.
- Хайкин С. 2019. Нейронные сети. Полный курс. М.: Диалектика. 1103 с.
- Фанасков В. С., Оселедец И. В. 2023. Спектральные нейронные операторы // ДРАН. Математика, информатика, процессы управления. Т. 514. № 2. С. 72–79.
- Cybenko G. V. 1989. Approximation by superpositions of a sigmoidal function // Mathematics of Control Signals and Systems. Vol. 2. No. 4. Pp. 303–314.
- Fraces Gasmi C., Tchelepi H. 2022. Uncertainty quantification for transport in porous media using parameterized physics informed neural networks // arXiv:2205.12730. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.12730>
- Fuks O., Tchelepi H. A. 2020. Limitations of physics informed machine learning for nonlinear two-phase transport in porous media // Journal of Machine Learning for Modeling and Computing. Vol. 1(1). Pp. 19–37.
- Gupta G., Xiongye Xiao, Bogdan P. 2021. Multiwavelet-based operator learning for differential equations // B: Advances in Neural Information Processing Systems. Vol. 34. Pp. 24048–24062. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2109.13459>
- Liu C., Murari D., Liu L., Liu Y., Budd C., Schönlieb C.-B. 2025. Enhancing Fourier neural operators with local spatial features // arXiv:2503.17797v2.
- Liu Z., Wang Y., Vaidya S., Ruehle F. 2024. KAN: Kolmogorov–Arnold networks // arXiv:2404.19756v1.
- Lu Lu, Jin P., Karniadakis G. E. 2019. DeepONet: Learning nonlinear operators for identifying differential equations based on the universal approximation theorem of operators // arXiv:1910.03193.2019. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1910.03193>
- Ma X. et al. 2024. Enhancing subsurface multiphase flow simulation with Fourier neural operator // Heliyon. Vol. 10. No. 18. Art. no. e38103. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e38103>
- Maarouf A., Tahir S., Su S., Ramatullayev S., Rat C., Kloucha Ch. K., Mustapha H. 2022. Deep-learning-based surrogate reservoir model for history-matching optimization // ADIPEC, Abu Dhabi, UAE. SPE-211061-MS. <https://doi.org/10.2118/211061-MS>
- Mohaghegh S. D., Liu J., Gaskari R., Maysami M., Olukoko O. A. 2012. Application of surrogate reservoir model (SRM) to an Onshore Green Field in Saudi Arabia; Case Study // North Africa Technical Conference and Exhibition, Cairo, Egypt. SPE-151994-MS. <https://doi.org/10.2118/151994-MS>
- Mohaghegh S. D. 2018. Contribution of artificial intelligence and machine learning in U.S. DOE's efforts during the aftermath of Deepwater Horizon // SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas. SPE-191613-MS. <https://doi.org/10.2118/191613-MS>

- Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E. 2019. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // *Journal of Computational Physics*. Vol. 378. Pp. 686–707. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045>
- Thuerey N., et al. 2022. Physics-based deep learning // *arXiv:2109.05237*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2109.05237>
- Tripura T., Chakraborty S. 2022. Wavelet neural operator: A neural operator for parametric partial differential equation // *arXiv:2205.02191*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.02191>
- Li Z. Kolmogorov–Arnold networks are radial basis function networks // *arXiv:2405.06721v1*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.06721>
- Li Z., et al. 2020. Fourier neural operator for parametric partial differential equations // *arXiv:2010.08895*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2010.08895>

References

- Aziz, H., & Settari, E. (2004). *Mathematical Modeling of Reservoir Systems*. Institute of Computer Research. [In Russian]
- Basniev, K. S., Kochina, I. N., & Maksimov, V. M. (1993). *Underground Hydromechanics*. Pp. 227–252. Nedra. [In Russian]
- Barenblatt, G. I., Entov, V. M., & Ryzhik, V. M. (1984). *Movement of Liquids and Gases in Natural Formations*. Nedra. [In Russian]
- Butyrskiy, E. Yu., Kuvaldin, I. A., Chalkin, V. P. (2010). Approximation of multidimensional functions // *Scientific Instrument Engineering*, 20(2), 82–92. [In Russian]
- Vershinin, V. E., & Ponomarev, R. Yu. (2023). Application of neural network modeling methods in solving initial boundary value problems for partial differential equations. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 9(3), 132–147. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-132-147> [In Russian]
- Vasiliev, A. N., Tarkhov, D. A., & Shemyakina, T. A. (2016). Approximate analytical solutions of ordinary differential equations. *Modern Information Technologies and IT Education*, 12(2-3), 188–195. [In Russian]
- Vasiliev, A. N., Tarkhov, D. A., & Shemyakina, T. A. (2015). *Neural Network Approach to the Problems of Mathematical Physics*. Nestor-Istoriya. [In Russian]
- Galkin, V. A., Gavrilenko, T. V., & Smorodinov, A. D. (2022). Some aspects of approximation and interpolation of functions by artificial neural networks. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences*, 38(1), 54–73. [In Russian]
- Gorban, A. N. (1998). Generalized approximation theorem and computational capabilities of neural networks. *Siberian Journal of Computer Engineering*, 1(1), 12–24. [In Russian]
- Zrelova, D. P., & Ulyanov, S. V. (2022). Models of physically informed classical Lagrangian/Hamiltonian neural networks in deep learning. *Modern Information Technologies and IT Education*, 18(2), 310–325. [In Russian]
- Kolmogorov, A. N. (1957). On the representation of continuous functions of several variables as a superposition of continuous functions of one variable. *Reports of the USSR Academy of Sciences*, 114(5), 953–956. [In Russian]
- Khaykin, S. (2019). *Neural Networks*. Dialektika. [In Russian]

- Fanaskov, V. S., & Oseledets, I. V. (2023). Spectral neural operators. *DRAS. Mathematics, Informatics, Control Processes*, 514(2), 72–79. [In Russian]
- Cybenko, G. V. (1989). Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Mathematics of Control Signals and Systems*, 2(4), 303–314.
- Fraces Gasmi, C., & Tchelepi, H. (2022). Uncertainty quantification for transport in porous media using parameterized physics informed neural networks. *arXiv:2205.12730*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.12730>
- Fuks, O., & Tchelepi, H. A. 2020. Limitations of physics informed machine learning for nonlinear two-phase transport in porous media. *Journal of Machine Learning for Modeling and Computing*, 1(1), 19–37.
- Gupta, G., Xiongye, Xiao, & Bogdan, P. (2021). Multiwavelet-based operator learning for differential equations. *B: Advances in Neural Information Processing Systems*, 34, 24048–24062. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2109.13459>
- Liu, C., Murari, D., Liu, L., Liu, Y., Budd, C., & Schönlieb, C.-B. (2025). Enhancing Fourier neural operators with local spatial features. *arXiv:2503.17797v2*.
- Liu, Z., Wang, Y., Vaidya, S., & Ruehle, F. (2024). KAN: Kolmogorov–Arnold networks. *arXiv:2404.19756v1*.
- Lu, Lu, Jin, P., & Karniadakis, G. E. (2019). DeepONet: Learning nonlinear operators for identifying differential equations based on the universal approximation theorem of operators. *arXiv:1910.03193.2019*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1910.03193>
- Ma, X. et al. (2024). Enhancing subsurface multiphase flow simulation with Fourier neural operator. *Heliyon*, 10(18), e38103. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e38103>
- Maarouf, A., Tahir, S., Su, S., Ramatullayev, S., Rat, C., Kloucha, Ch. K., & Mustapha, H. (2022). Deep-learning-based surrogate reservoir model for history-matching optimization. *ADIPEC, Abu Dhabi, UAE*. SPE-211061-MS. <https://doi.org/10.2118/211061-MS>
- Mohaghegh, S. D., Liu, J., Gaskari, R., Maysami, M., & Olukoko, O. A. (2012). Application of surrogate reservoir model (SRM) to an Onshore Green Field in Saudi Arabia; Case Study. *North Africa Technical Conference and Exhibition, Cairo, Egypt*. SPE-151994-MS. <https://doi.org/10.2118/151994-MS>
- Mohaghegh, S. D. (2018). Contribution of artificial intelligence and machine learning in U.S. DOE's efforts during the aftermath of Deepwater Horizon. *SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, Texas*. SPE-191613-MS. <https://doi.org/10.2118/191613-MS>
- Raissi, M., Perdikaris, P., & Karniadakis, G. E. (2019). Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 378, 686–707. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045>
- Thurey, N., et al. (2022). Physics-based deep learning. *arXiv:2109.05237*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2109.05237>
- Tripura, T., & Chakraborty, S. (2022). Wavelet neural operator: A neural operator for parametric partial differential equation. *arXiv:2205.02191*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.02191>
- Li, Z. Kolmogorov–Arnold networks are radial basis function networks. *arXiv:2405.06721v1*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.06721>
- Li, Z., et al. (2020). Fourier neural operator for parametric partial differential equations. *arXiv:2010.08895*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2010.08895>

Информация об авторах

Роман Юрьевич Пономарев, менеджер, ООО «РН-Геология Исследования Разработка», Тюмень, Россия
ryponomarev@rn-gir.rosneft.ru

Михаил Игоревич Ивлев, главный специалист, ООО «РН-Геология Исследования Разработка», Тюмень, Россия
miivlev@rn-gir.rosneft.ru

Руслан Рамилевич Мигманов, главный специалист, ООО «РН-Геология Исследования Разработка», Тюмень, Россия
rrmigmanov@rn-gir.rosneft.ru

Владимир Евгеньевич Вершинин, главный специалист, ООО «РН-Геология Исследования Разработка», Тюмень, Россия; доцент, кафедра моделирования физических процессов и систем, Школа естественных наук, Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия
VE_Vershinin2@rn-gir.rosneft.ru v.e.vershinin@utmn.ru

Information about the authors

Roman Yu. Ponomarev, Manager, RN-Geology Research and Development, Tyumen, Russia
ryponomarev@rn-gir.rosneft.ru

Mikhail I. Ivlev, Chief Specialist, RN-Geology Research and Development, Tyumen, Russia
miivlev@rn-gir.rosneft.ru

Ruslan R. Migmanov, Chief Specialist, RN-Geology Research and Development, Tyumen, Russia
rrmigmanov@rn-gir.rosneft.ru

Vladimir E. Vershinin, Chief Specialist, RN-Geology Research and Development, Tyumen, Russia; Associate Professor of the Department of Modeling of Physical Processes and Systems, University of Tyumen, Tyumen, Russia
VE_Vershinin2@rn-gir.rosneft.ru, v.e.vershinin@utmn.ru