

Определение условий сингулярного поведения плазмы в рамках модели Эйлера–Пуассона с комплексно-сопряженным спектром

Геннадий Николаевич Ефимов✉, Денис Геннадьевич Ефимов

Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия
Контакт для переписки: efimov-mat@mail.ru✉

Аннотация. Будучи высокоэнергетическим состоянием вещества, плазма играет ключевую роль в современных технологиях, астрофизике и управляемом термоядерном синтезе. Ключевая проблема заключается в анализе нелинейных колебаний и волн в плазме, способных приводить к возникновению особенностей, таких как градиентные катастрофы или разрывы колебаний. Эти явления представляют не только теоретический интерес для понимания нелинейных процессов в плазме, но и имеют практическое значение. Объектом исследования выступает система уравнений Эйлера–Пуассона, являющаяся одной из базовых моделей для описания динамики плазмы. Эта система может модифицироваться с учетом различных физических факторов, включая магнитные поля, релятивистские эффекты и столкновения частиц. Целью работы является исследование системы уравнений Эйлера–Пуассона, описывающей нелинейные колебания в плазме. Основное внимание уделяется условиям потери гладкости решений за конечное время.

Ключевые слова: нелинейная динамика плазмы, жорданова форма, матричное уравнение Риккати, лемма Радона, система уравнений Эйлера–Пуассона, особые точки

Благодарности: авторы выражают благодарность Турцынскому Марко Казимировичу, кандидату физико-математических наук, доценту кафедры «Цифровые технологии управления транспортными процессами» РУТ (МИИТ) за полезные обсуждения и критические замечания.

Цитирование: Ефимов Г. Н., Ефимов Д. Г. 2025. Определение условий сингулярного поведения плазмы в рамках модели Эйлера–Пуассона с комплексно-сопряженным спектром // Вестник Тюменского государственного университета.

Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 11.
№ 3 (43). С. 58–70. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2025-11-3-58-70>

Поступила 19.07.2025; одобрена 24.09.2025; принята 25.09.2025

Determination of the conditions for singular plasma behavior in the Euler–Poisson model with a complex-conjugate spectrum

Gennadiy N. Efimov✉, Denis G. Efimov

Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia

Corresponding author: efimov-mat@mail.ru✉

Abstract. Being a high-energy state of matter, plasma plays a key role in modern technologies, astrophysics, and controlled thermonuclear fusion. A central challenge lies in the analysis of nonlinear oscillations and waves in plasma, which can lead to the formation of singularities, such as gradient catastrophes or wave breaks. These phenomena are not only of theoretical interest for understanding nonlinear processes in plasma but also have practical implications. The object of the study is the Euler–Poisson system of equations, which serves as one of the fundamental models for describing plasma dynamics. This system can be modified to account for various physical factors, including magnetic fields, relativistic effects, and particle collisions. The aim of this work is to investigate the Euler–Poisson system describing nonlinear oscillations in plasma. The primary focus is on the conditions for the loss of smoothness in solutions within finite time.

Keywords: nonlinear plasma dynamics, Jordan form, Riccati matrix equation, Radon's lemma, Euler–Poisson system, singular points

Acknowledgements: the authors express their gratitude to Turtsynskiy Marko Kazimirovich, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor at the Department of “Digital Technologies for Transport Process Control” at the Russian University of Transport (MIIT), for valuable discussions and critical remarks.

Citation: Efimov, G. N., & Efimov, D. G. (2005). Determination of the conditions for singular plasma behavior in the Euler–Poisson model with a complex-conjugate spectrum. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 11(3), 58–70. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2025-11-3-58-70>

Received Jul. 19, 2025; Reviewed Sep. 24, 2025; Accepted Sep. 25, 2025

Введение

Исследование динамики плазмы в рамках модели Эйлера–Пуассона представляет значительный интерес для современной физики и математики, особенно в контексте изучения нелинейных процессов и образования сингулярностей. Плазма, как сложная многокомпонентная система, демонстрирует широкий спектр явлений, включая волновые процессы, турбулентность и формирование особенностей, которые могут быть критическими для понимания ее поведения в различных условиях [Котельников, 2023; Янин, 2012].

В данной работе рассматривается система уравнений, описывающая одномерную динамику плазмы, включая закон сохранения массы, уравнение Эйлера и уравнение Пуассона [Гарганц и др., 2024]. Основное внимание уделено анализу условий, при которых возникают сингулярности в решении, что является ключевым аспектом для прогнозирования устойчивости и эволюции плазменных систем [Tan, 2021; Wei, 2020]. Для этого используется метод характеристик, позволяющий свести систему уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, а также лемма Радона и матричное уравнение Риккати, которые играют важную роль в исследовании нелинейных динамических систем [Дзарахохов, Шишкина, 2022; Чижонков, 2018].

Актуальность работы обусловлена необходимостью разработки точных математических методов для описания сложных физических процессов в плазме, что имеет приложения в астрофизике, управляемом термоядерном синтезе и других областях [Dafermos, 2016]. Целью исследования является определение условий, при которых решение системы уравнений Эйлера–Пуассона теряет гладкость, а также анализ влияния параметров системы на образование особенностей.

Результаты работы могут быть полезны для дальнейших теоретических и прикладных исследований в области нелинейной динамики плазмы, а также для разработки численных методов моделирования подобных систем [Rozanova, Chizhonkov, 2022]. В статье представлены как аналитические выводы, так и графические иллюстрации, демонстрирующие поведение решений при различных начальных условиях и параметрах. Исследование создает основу для междисциплинарных коллабораций между специалистами в разных областях.

Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений, описывающих динамику одномерной плазмы:

$$n_t + (nV)_x = 0, \quad V_t + VV_x = -k\Phi_x - \gamma V, \quad \Delta\Phi = n - N,$$

где x — пространственная переменная, t — время; первое уравнение системы выражает закон сохранения массы, где $n(t, x)$ — плотность среды, $V(t, x)$ — скорость среды; второе уравнение — уравнение движения (Эйлера), где $\Phi(t, x)$ — потенциал некоторой силы, k — константа ($k = -1$ — потенциал отталкивающий, $k = 1$ — потенциал притягивающий), γ — постоянный коэффициент трения ($\gamma \geq 0$); третье уравнение — уравнение Пуассона, где Δ — оператор Лапласа; N — постоянная нормализованная фоновая плотность ($N \in \{0, 1\}$ в зависимости от модели).

Введем новые неизвестные функции $V_1 = V$, $V_2 = -\Phi_x$. Подставив выражение для n из уравнения Пуассона в уравнение неразрывности и выполнив преобразования, получим эквивалентную систему двух уравнений:

$$(V_1)_t + V_1(V_1)_x = -\gamma V_1 + kV_2, (V_2)_t + V_1(V_2)_x = NV_1. \quad (1)$$

Введем коэффициенты:

$$a = -\gamma, \quad b = k, \quad c = N, \quad d = 0.$$

Перепишем систему в векторном виде с учетом новых обозначений и зададим начальные условия:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + V_1 \mathbb{E} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} = Q \bar{V}, \quad (2)$$

$$\bar{V}|_{t=0} = \bar{V}_0(x) \in C^2(\mathbb{R}), \quad (3)$$

где $\bar{V} = (V_1, V_2)^T$, $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{V}_0(x) = ((V_1)_0(x), (V_2)_0(x))^T$.

Таким образом, в полученной системе осталось всего две неизвестные функции, что упрощает ее дальнейшее исследование.

Сведем систему дифференциальных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Если продифференцировать систему (2) по x , то вдоль характеристик $\dot{x}(t) = V_1$, $x(0) = x_0$ [Демин, Марышев, 2021; Палин, Радкевич, 2025] получим расширенную квадратично-нелинейную систему на производные $\bar{v} = (v_1, v_2)^T$, $v_1 = (V_1)_x$, $v_2 = (V_2)_x$:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -v_1 \bar{v} + Q \bar{v}. \quad (4)$$

Для матрицы $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ существует такая невырожденная матрица A ($\det A \neq 0$), что

$$AQA^{-1} = J,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — матрица перехода, $J = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix}$ — жорданова нормальная форма матрицы Q [Колыбасова и др., 2009; Ильин, Ким, 2018].

Введя новые неизвестные функции $\bar{w} = A\bar{v}$, получим

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = -v_1 \bar{w} + J\bar{w}, \quad (5)$$

где $v_1 = \frac{1}{\det A} (a_{22}w_1 - a_{12}w_2)$.

Основным инструментом дальнейшего исследования будет служить лемма Радона [Freiling, 2002]. Рассмотрим матричное уравнение Риккати

$$\dot{W} = M_{21}(t)W + M_{22}(t)W - WM_{11}(t) - WM_{12}(t)W, \quad (6)$$

где $W = W(t)$ — матрица размера $n \times m$; M_{21} — матрица размера $n \times m$; M_{22} — матрица размера $n \times n$; M_{11} — матрица размера $m \times m$; M_{12} — матрица размера $m \times n$. Это уравнение эквивалентно однородному линейному матричному уравнению

$$\dot{Y} = M(t)Y, \quad M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $Y = Y(t)$ — матрица размера $(n+m) \times m$; M — матрица размера $(n+m) \times (n+m)$.

Пусть на некотором интервале $I \subset \mathbb{R}$ определена матричная функция

$$Y(t) = \begin{pmatrix} R(t) \\ S(t) \end{pmatrix},$$

где $R(t)$ — матрица размера $m \times m$; $S(t)$ — матрица размера $n \times m$.

$Y(t)$ является решением системы (7) с начальным условием $Y(0) = \begin{pmatrix} \mathbb{E} \\ W_0 \end{pmatrix}$, где $\mathbb{E}$ — единичная матрица размера $m \times m$; W_0 — постоянная матрица размера $n \times m$. Тогда решение матричного уравнения Риккати (6) с начальным условием $W(0) = W_0$ на интервале I задается формулой

$$W(t) = S(t)R^{-1}(t).$$

Для применения леммы Радо на переписываем систему (5) в виде (6). Тогда

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = -\bar{w} \left(\frac{a_{22}}{\det(A)} - \frac{a_{12}}{\det(A)} \right) \bar{w} + J\bar{w},$$

где $W = \bar{w}$; $M_{11} = (0)$; $M_{12} = \left(\frac{a_{22}}{\det(A)} - \frac{a_{12}}{\det(A)} \right)$; $M_{21} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$; $M_{22} = J$.

Таким образом, получим задачу Коши для линейной системы на матрицы $R(t) = (q(t))$, $S(t) = (u_1(t) \ u_2(t))^T$:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{22}}{\det(A)} & -\frac{a_{12}}{\det(A)} \\ 0 & j_{11} & j_{12} \\ 0 & j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

с начальным условием

$$\begin{pmatrix} q(0) \\ u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ w_1(0) \\ w_2(0) \end{pmatrix}.$$

Начальные условия системы (5) $w_1(0)$, $w_2(0)$ связаны с начальными условиями $v_1(0)$, $v_2(0)$ системы (4) следующими соотношениями:

$$w_1(0) = a_{11}v_1(0) + a_{12}v_2(0), \quad w_2(0) = a_{21}v_1(0) + a_{22}v_2(0),$$

где

$$v_1(0) = ((V_1)_0)_x(x_0), v_2(0) = ((V_2)_0)_x(x_0), x_0 \in \mathbb{R}.$$

Условия образования особенностей у решения

Из леммы Радона следует, что

$$\bar{w}(t) = \left(\frac{u_1(t)}{q(t)}, \frac{u_2(t)}{q(t)} \right)^T.$$

Значит, у производных решения особенность образуется тогда и только тогда, когда $q(t)$ — часть решения системы (8) — обращается в ноль на положительной полуоси (в дальнейшем функцию $q(t)$ будем называть определяющей функцией). Сформулируем этот результат в виде следующей теоремы:

1. Решение задачи Коши (2), (3) остается гладким для всех $t > 0$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ определяющая функция $q(t)$ не обращается в ноль для всех $t > 0$.

2. Если существует точка $x_0 \in \mathbb{R}$ такая, что для некоторого конечного значения $t_* > 0$ имеет место $q(t_*) = 0$, то у решения задачи Коши (2), (3) образуется особенность за конечное время. Точный момент времени T_* , в который происходит формирование особенности, можно найти, используя соотношение $T_* = \inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \{t_* > 0 \mid q(t_*) = 0\}$.

Система (8) является линейной однородной системой с постоянными коэффициентами, поэтому ее можно решить, что позволит получить необходимые и достаточные условия для образования особенностей решения.

Чтобы найти решение $q(t)$ системы (8), необходимо в первую очередь решить систему

$$\dot{\bar{u}} = J\bar{u}, \quad \bar{u} = (u_1, u_1)^T, \quad (9)$$

где $J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$.

Для решения системы (9) воспользуемся методом Эйлера [Арнольд, 2024; Васильева и др., 2010]. Тогда с учетом условия $\bar{u}(0) = \bar{w}(0)$, частное решение системы (9) примет вид:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = w_1(0) \cdot e^{at} \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} + w_2(0) \cdot e^{at} \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Зная $u_1(t)$ и $u_2(t)$, вычислим $q(t)$, решая уравнение:

$$\dot{q} = \frac{a_{22}}{\det A} u_1 - \frac{a_{12}}{\det A} u_2. \quad (10)$$

Подставим в (10) u_1 , u_2 и воспользуемся связью между $w_1(0)$, $w_2(0)$ и $v_1(0)$, $v_2(0)$.

Тогда

$$\dot{q} = e^{\alpha t} (K \cos \beta t + H \sin \beta t),$$

$$\text{где } K = v_1(0), \quad H = \frac{a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21}}{\det A} v_1(0) + \frac{a_{12}^2 + a_{22}^2}{\det A} v_2(0).$$

Проведя последовательное двукратное интегрирование по частям [Эльсгольц, 2024] и воспользовавшись условием $q(0) = 1$, получим:

$$q(t) = \widetilde{C}_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + \widetilde{C}_2 e^{\alpha t} \sin \beta t + 1 - \widetilde{C}_1,$$

$$\text{где } \widetilde{C}_1 = \frac{\alpha K - \beta H}{\beta^2 + \alpha^2}, \quad \widetilde{C}_2 = \frac{\beta K + \alpha H}{\beta^2 + \alpha^2}.$$

Упростим функцию $q(t)$, введя вспомогательный угол [Зорич, 2019]. Тогда

$$q(t) = \sqrt{\widetilde{C}_1^2 + \widetilde{C}_2^2} \sin(\beta t + \varphi) e^{\alpha t} + 1 - \widetilde{C}_1,$$

$$\text{где } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\widetilde{C}_1}{\widetilde{C}_2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad \widetilde{C}_1^2 + \widetilde{C}_2^2 > 0.$$

Найдем необходимые и достаточные условия на коэффициенты $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2$ при разных значениях параметра α .

При $\alpha = 0$ функция $q(t)$ обращается в 0, когда

$$\widetilde{C}_1 \geq \frac{1 - \widetilde{C}_2^2}{2}. \quad (11)$$

График функции $q(t)$, параметры которой удовлетворяют условию (11), представлен на рис. 1.

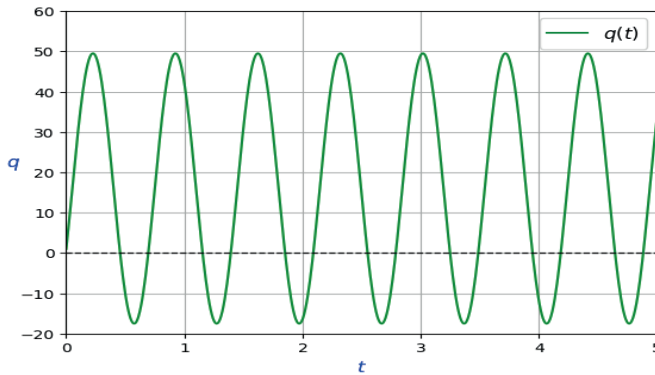


Рис. 1. График функции $q(t)$ при $\alpha = 0, \beta = 9, \widetilde{C}_1 = -15, \widetilde{C}_2 = 30$

Fig. 1. Graph of the function $q(t)$ for $\alpha = 0, \beta = 9, \widetilde{C}_1 = -15, \widetilde{C}_2 = 30$

При $\alpha > 0$:

$$\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2 \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{C}_1^2 + \widetilde{C}_2^2 > 0. \quad (12)$$

График функции $q(t)$, параметры которой удовлетворяют условию (12), представлен на рис. 2.

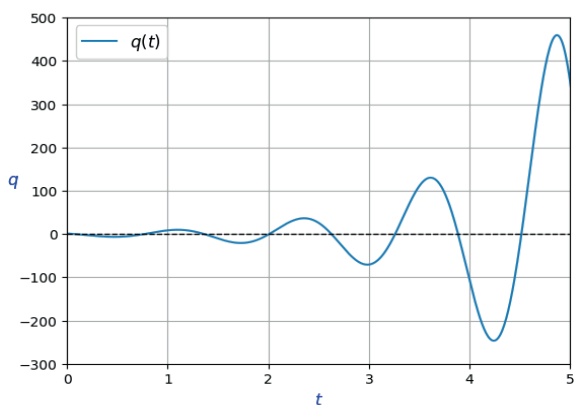


Рис. 2. График функции $q(t)$ при $\alpha = 1, \beta = 5, \widetilde{C}_1 = 2, \widetilde{C}_2 = -3$

Fig. 2. Graph of the function $q(t)$ for $\alpha = 1, \beta = 5, \widetilde{C}_1 = 2, \widetilde{C}_2 = -3$

При $\alpha < 0$:

$$\left[\begin{array}{l} \widetilde{C}_1 > 1 \text{ и } \forall \widetilde{C}_2 \in \mathbb{R}, \\ \widetilde{C}_1 < 1, \beta^2 \widetilde{C}_2^2 > (\alpha^2 + \beta^2)(1 - \widetilde{C}_1)^2 \exp\left(\frac{2\alpha}{\beta}(\varphi + \psi - 2\pi)\right) - \beta^2 \widetilde{C}_1^2, \end{array} \right. \quad (13)$$

где вспомогательные углы φ и ψ определяются равенствами

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\widetilde{C}_1}{\widetilde{C}_2}, \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}.$$

На рис. 3 представлено поведение функции $q(t)$ при параметрах, соответствующих условию (13).

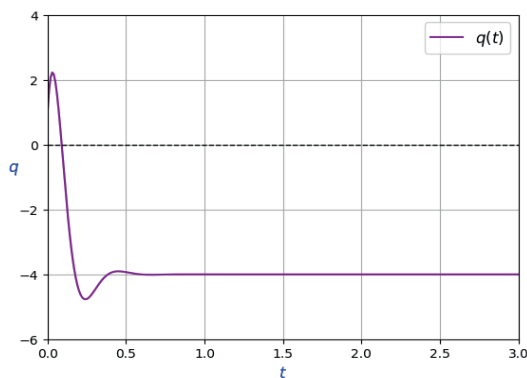


Рис. 3. График функции $q(t)$ при $\alpha = -10, \beta = 15, \widetilde{C}_1 = 5, \widetilde{C}_2 = 9$

Fig. 3. Graph of the function $q(t)$ for $\alpha = -10, \beta = 15, \widetilde{C}_1 = 5, \widetilde{C}_2 = 9$

Условия образования особенностей у решения при заданных значениях матрицы Q

Пусть $k = -1$, $N = 1$, $\gamma = 0$, тогда $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдем, чему равна жорданова матрица J в этом случае, воспользовавшись соотношениями [Кряквин, 2016; Логвенков, Самовол, 2017]:

$$\alpha = \frac{\text{tr } Q}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{(\text{tr } Q)^2 - 4 \det Q}}{2}.$$

Определим матрицу перехода $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, приводящую матрицу Q к жордановой нормальной форме J , решив матричное уравнение $AQ = JA$.

В результате получим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix}, \quad \det A = -(a_{11}^2 + a_{12}^2) < 0, \quad \|A\|^2 = -2 \det A.$$

Подставив $\alpha = 0$, $\beta = 1$ в $\widetilde{C}_1$, $\widetilde{C}_2$ и выполнив преобразования, условие (11) примет вид:

$$2v_2(0) \geq 1 - v_1(0)^2.$$

Построим область, заданную полученным неравенством (рис. 4).

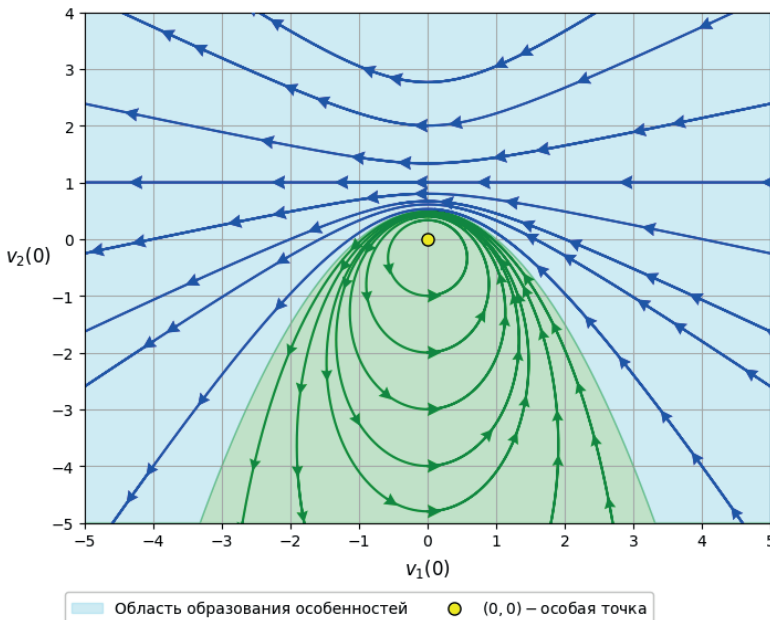


Рис. 4. Область образования особенностей системы (4)

Fig. 4. The domain of singularity formation for system (4)

Заключение

В рамках данного исследования проведен комплексный анализ условий возникновения сингулярного поведения решений в системе уравнений Эйлера–Пуассона, являющейся фундаментальной моделью для описания нелинейной динамики одномерной плазмы. Основное внимание было уделено исследованию механизма потери гладкости решений за конечное время, что проявляется в виде градиентной катастрофы или образования разрывов.

Ключевым результатом работы является разработка и применение аналитического подхода, основанного на сведении исходной системы уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль характеристик с последующим использованием аппарата матричного анализа. Центральную роль в исследовании сыграло применение леммы Радона, позволившей преобразовать нелинейную задачу для производных решения в линейную систему более высокого порядка. Это дало возможность получить в явном виде выражение для определяющей функции $q(t)$, нули которой точно соответствуют моментам времени образования особенностей.

В работе получены явные аналитические выражения для функции $q(t)$ в случае, когда матрица Q системы имеет комплексно-сопряженный спектр. Проанализированы три принципиально различных случая в зависимости от знака параметра a (действительной части собственных чисел).

1. При $\alpha = 0$ (консервативный случай): сингулярности образуются, когда выполняется условие (11), где константы $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ выражаются через начальные данные и элементы матрицы перехода к жордановому базису.

2. При $\alpha > 0$ (случай растущих колебаний): показано, что наличие отрицательного трения ($\gamma < 0$) всегда приводит к образованию особенности за конечное время, за исключением случая, когда константы $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ одновременно равны нулю. Рост экспоненциального множителя e^{at} приводит к обращению функции $q(t)$ в нуль за конечное время.

3. При $\alpha < 0$ (случай затухающих колебаний): сингулярность возникает при выполнении строгого условия (13), которое требует достаточно большой амплитуды начальных возмущений, чтобы преодолеть затухание.

На конкретном физически значимом примере ($k = -1$, $N = 1$, $\gamma = 0$), моделирующем плазменные колебания с отталкивающим потенциалом без трения, было продемонстрировано практическое применение метода. Для этого случая было явно построено условие и область возникновения особенностей на плоскости начальных данных $(v_1(0), v_2(0))$.

Теоретическая значимость работы заключается в построении эффективного аналитического критерия сингулярности, который позволяет, минуя трудоемкое численное моделирование, предсказать возникновение разрывов на основе анализа начальных условий и параметров системы. Полученные результаты вносят вклад в понимание нелинейных процессов в плазме, таких как механизм образования ударных волн или коллапс плазменных колебаний.

Перспективы дальнейших исследований возможны в обобщении разработанного метода на трехмерный случай, учет магнитного поля, релятивистских эффектов, а также в разработке на основе полученного критерия эффективных численных алгоритмов, отслеживающих момент возникновения особенности.

Список источников

- Арнольд В. И. 2024. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Новое издание, исправл. М.: МЦНМО. 344 с.
- Васильева А. В., Медведев Г. Н., Тихонов Н. А., Уразгильдина Т. А. 2010. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах. 3-е изд., испр. М.: Лань. 432 с.
- Гаргянц А. В., Розанова О. С., Турцынский М. К. 2024. Задача Римана для основных модельных случаев уравнений Эйлера–Пуассона // Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70. № 1. С. 38–52.
- Демин В. А., Марышев Б. С. 2021. Методы математической физики: учеб.-метод. пос. Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет. 110 с.
- Дзарахов А. В., Шишкина Э. А. 2022. Решение уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу дробного порядка // Владикавказский математический журнал. Том 24. № 2. С. 85–100.
- Зорич В. А. 2019. Математический анализ. Часть I. 10-е изд., испр. М.: МЦНМО. 564 с.
- Ильин А. М., Ким Г. Д. 2018. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М.: Проспект. 400 с.
- Колыбасова В. В., Крутицкая Н. Ч., Овчинников А. В. 2009. Жорданова форма матрицы оператора. М.: Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова. 27 с.
- Котельников И. А. 2023. Лекции по физике плазмы. Том 1. Основы физики плазмы: учеб. пос. для вузов. 5-е изд., стер. СПб.: Лань. 400 с.
- Кряквин В. Д. 2016. Линейная алгебра в задачах и упражнениях: учеб. пос. 3-е изд., испр. СПб.: Лань. 592 с.
- Логвенков С. А., Самовол В. С. 2017. Линейная алгебра. Основы теории, примеры и задачи. М.: МЦНМО. 188 с.
- Палин В. В., Радкевич Е. В. 2025. Методы математической физики. Лекционный курс: учеб. для вузов. 2-е изд., испр. и доп. М.: Юрайт. 222 с.
- Чижонков Е. В. 2018. Математические аспекты моделирования колебаний и кильватерных волн в плазме. М.: ФИЗМАТЛИТ. 252 с.
- Янин С. Н. 2012. Лекции по основам физики плазмы. Часть I. Томск: Изд-во Томского политехнического университета. 78 с.
- Эльсгольц Л. Э. 2024. Дифференциальные уравнения. М.: Ленанд. 312 с.
- Dafermos C. M. 2016. Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics. The 4th Edition. Berlin–Heidelberg: Springer. 852 p.
- Freiling G. 2002. A survey of nonsymmetric Riccati equations // Linear Algebra and Its Applications. Vol. 351–352. Pp. 243–270.
- Rozanova O. S., Chizhonkov E. V. 2022. The influence of an external magnetic field on cold plasma oscillations // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. Vol. 73. P. 249.
- Tan C. 2021. Eulerian dynamics in multidimensions with radial symmetry // SIAM Journal on Mathematical Analysis. Vol. 53. No. 3. Pp. 3040–3071.
- Wei L. 2020. Wave breaking, global existence and persistent decay for the Gurevich–Zybin system // Journal of Mathematical Fluid Mechanics. Vol. 22. No. 4. Pp. 1–14.

References

- Arnold, V. I. (2024). *Ordinary Differential Equations*. New ed., rev. MCCME. [In Russian]
- Vasilyeva, A. V., Medvedev, G. N., Tikhonov, N. A., & Urazgildina, T. A. (2010). *Differential and Integral Equations, Calculus of Variations in Examples and Problems*. 3rd ed., rev. Lan. [In Russian]
- Gargyants, L. V., Rozanova, O. S., & Turtsynskiy, M. K. (2024). The Riemann problem for the main model cases of Euler–Poisson equations. *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 70(1), 38–52. [In Russian]
- Demin, V. A., & Maryshev, B. S. (2021). *Methods of Mathematical Physics*. Perm State National Research University. [In Russian]
- Dzarakhokhov, A. V., & Shishkina, E. L. (2022). Solution of the Euler–Poisson–Darboux equation of fractional order. *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 24(2), 85–100. [In Russian]
- Zorich, V. A. (2019). *Mathematical Analysis. Part I*. 10th ed., rev. MCCME. [In Russian]
- Ilyin, A. M., & Kim, G. D. (2018). *Linear Algebra and Analytic Geometry*. Prospekt. [In Russian]
- Kolybasova, V. V., Krutitskaya, N. Ch., & Ovchinnikov, A. V. (2009). *Jordan Form of an Operator's Matrix*. Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. [In Russian]
- Kotelnikov, I. A. (2023). *Lectures on Plasma Physics. Vol. 1. Fundamentals of Plasma Physics*. 5th ed., ster. Lan. [In Russian]
- Kryakvin, V. D. (2016). *Linear Algebra in Problems and Exercises*. 3rd ed., rev. Lan. [In Russian]
- Logvenkov, S. A., & Samovol, V. S. (2017). *Linear Algebra. Fundamentals of Theory, Examples, and Problems*. MCCME. [In Russian]
- Palin, V. V., & Radkevich, E. V. (2025). *Methods of Mathematical Physics. Lecture Course*. 2nd ed., rev. and suppl. Yurait. [In Russian]
- Chizhonkov, E. V. (2018). *Mathematical Aspects of Modeling Oscillations and Wake Waves in Plasma*. FIZMATLIT. [In Russian]
- Yanin, S. N. (2012). *Lectures on the Fundamentals of Plasma Physics. Part I*. Tomsk Polytechnic University Press. [In Russian]
- Elsgolts, L. E. (2024). *Differential Equations*. Lenand. [In Russian]
- Dafermos, C. M. (2016). *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*. 4th ed. Springer.
- Freiling, G. (2002). A survey of nonsymmetric Riccati equations. *Linear Algebra and Its Applications*, 351–352, 243–270.
- Rozanova, O. S., & Chizhonkov, E. V. (2022). The influence of an external magnetic field on cold plasma oscillations. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 73, 249.
- Tan, C. (2021). Eulerian dynamics in multidimensions with radial symmetry. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 53(3), 3040–3071.
- Wei, L. (2020). Wave breaking, global existence and persistent decay for the Gurevich–Zybin system. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 22(4), 1–14.

Информация об авторах

Геннадий Николаевич Ефимов, кандидат технических наук, доцент кафедры «Информационные системы цифровой экономики», Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия.

efimov-mat@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8636-4416>

Денис Геннадьевич Ефимов, бакалавр кафедры «Цифровые технологии управления транспортными процессами», Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия.

efimovdenis2004@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0009-6060-6286>

Information about the authors

Gennadiy N. Efimov, Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor, Department of Information Systems of Digital Economy, Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia

efimov-mat@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8636-4416>

Denis G. Efimov, Undergraduate Student, Department of Digital Technologies in Transport Process Management, Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia

efimovdenis2004@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0009-6060-6286>