

значит гипотеза о независимости уровней остаточной последовательности, то есть отсутствие в ней автокорреляции, принимается.

Результаты проверки соответствия распределения случайной компоненты нормальному закону распределения: $R = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min} = 176,31$,

$S = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_t^2}{n-1}} = 48,71$ и $RS = R/S = 3,62$. Полученное значение RS в заданный интервал табличного значения, $2,96 < 3,62 < 4,14$, уровни ряда остатков подчиняются нормальному распределению.

В результате исследования было доказано, что модель адекватна. Расчёт средней относительной ошибки ($\overline{E_{отн}} = 3\%$) даёт возможность утверждать, что с вероятностью 97% прогнозное значение о добыче охотничьих ресурсов на 2023 год будет достаточным точным.

Список литературы

1. Осипенко, С. А. Экономико-математическое моделирование: учебно-методическое пособие / С. А. Осипенко. М.; Берлин: Директ-Медиа, 2018. 147 с.: ил., табл. URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=481040> (дата обращения: 22.12.2022). ISBN 978-5-4475-9529-6. DOI 10.23681/481040. Текст: электронный.
2. Росстат. Текст: электронный // Федеральная служба государственной статистики. URL: <https://rosstat.gov.ru/mission> (дата обращения: 19.12.2022).
3. Состояние ресурсов основных видов охотничьих животных. Текст: электронный. URL: <https://studfile.net/preview/2621365/> (дата обращения: 26.12.2022).

А. С. Кутузов

Троицкий филиал ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ПИТТА

Аннотация: в статье рассматривается элементарное доказательство классической теоремы Питта о компактности абстрактного линейного оператора, действующего между малыми лебеговыми пространствами.

Ключевые слова: компактный оператор, слабая сходимость, малые лебеговы пространства.

Классическим результатом в теории компактных операторов является следующая теорема (H.R.Pitt, [3]): всякий линейный ограниченный оператор $A: l_r \rightarrow l_p$, где $1 < p < r < \infty$, компактен.

Доказательства теоремы Питта имеются, например, в [1, с. 32] и в [4, с. 86]. Эти классические доказательства, являясь короткими сами по себе, базируются на сериях технически непростых лемм и утверждений, связанных с понятиями эквивалентных базисных последовательностей. В относительно новой статье [2] приводится гораздо более простое доказательство, основанное только на стандартных понятиях функционального анализа, изучаемых студентами на третьем курсе. В настоящей статье приводится еще одно простое доказательство теоремы Питта, не повторяющее ранее указанные.

Ключевой для доказательства будет являться следующая общая

Лемма 1: пусть $\{x_n\} \subset l_p$, $1 \leq p < \infty$, $x_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) и $\forall n \in \mathbb{N} \|x_n\| \geq c^{\frac{1}{p}} > 0$, тогда найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $\forall N \in \mathbb{N} \left\| \sum_{k=1}^N x_{n_k} \right\| > \alpha N^{\frac{1}{p}}$ при фиксированном $0 < \alpha < c^{\frac{1}{p}}$.

Доказательство: возьмем $n_1 = 1$, тогда, по условию, $\|x_{n_1}\| \geq c^{\frac{1}{p}} > \alpha \cdot 1^{\frac{1}{p}}$. Пусть уже построены элементы с номерами $n_1, n_2, \dots, n_N$ и $z = \sum_{k=1}^N x_{n_k}$ с $\|z\| > \alpha N^{\frac{1}{p}}$. Введем

в рассмотрение проектор P_M вида $(P_M x)(i) = \begin{cases} x(i), & i \leq M \\ 0, & i > M \end{cases}$, тогда $\forall x \in l_p$ имеет

место представление $\|x\|^p = \|P_M x\|^p + \|(I - P_M)x\|^p$, где $((I - P_M)x)(i) = \begin{cases} 0, & i \leq M \\ x(i), & i > M \end{cases}$.

Выберем число M настолько большим, чтобы $\|(I - P_M)z\| < \delta$, где $\delta > 0$ будет указано позже. Поскольку $x_n \rightarrow 0$, то имеет место по координатной

сходимость, т.е. $\forall i \in \mathbb{N} \ x_n(i) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$. Это позволяет, по определению предела, указать число $n_{N+1} > n_N$ так, чтобы $\|P_M x_{n_{N+1}}\| < \delta$.

Далее, заметим, что $\|P_M z\| = \|z - (I - P_M)z\| \geq \|z\| - \|(I - P_M)z\| > \alpha N^{\frac{1}{p}} - \delta$.

Тогда $\|z + x_{n_{N+1}}\|^p = \|P_M(z + x_{n_{N+1}})\|^p + \|(I - P_M)(z + x_{n_{N+1}})\|^p$. Первое слагаемое оценим

следующим образом: $\|P_M(z + x_{n_{N+1}})\|^p \geq (\|P_M z\| - \|P_M x_{n_{N+1}}\|)^p > \left(\alpha N^{\frac{1}{p}} - 2\delta\right)^p$. Второе:

$$\begin{aligned} \|(I - P_M)(z + x_{n_{N+1}})\|^p &\geq (\|(I - P_M)x_{n_{N+1}}\| - \|(I - P_M)z\|)^p > (\|x_{n_{N+1}}\| - \|P_M x_{n_{N+1}}\| - \delta)^p > \\ &> \left(c^{\frac{1}{p}} - 2\delta\right)^p. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $f(\delta) = \left(\alpha N^{\frac{1}{p}} - 2\delta\right)^p + \left(c^{\frac{1}{p}} - 2\delta\right)^p$, $\delta > 0$. Очевидно,

что $\lim_{\delta \rightarrow 0} f(\delta) = \alpha^p N + c > \alpha^p (N+1)$, поэтому при всех достаточно малых δ

$f(\delta) > \alpha^p (N+1)$. Выбирая теперь подходящее $\delta > 0$, заключаем, что имеет

место оценка $\|z + x_{n_{N+1}}\| > \alpha(N+1)^{\frac{1}{p}}$, что обосновывает шаг индукции и доказывает лемму.

Лемма 2: пусть $\{x_n\} \subset l_p$, $1 \leq p < \infty$, $x_n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ и $\forall n \in \mathbb{N} \ \|x_n\| \leq c^{\frac{1}{p}}$,

тогда $\exists \{x_{n_k}\} : \forall N \in \mathbb{N} \ \left\| \sum_{k=1}^N x_{n_k} \right\| < \alpha N^{\frac{1}{p}}$ при фиксированном $\alpha > c^{\frac{1}{p}}$.

Доказательство леммы 2 повторяет доказательство леммы 1, только в окончательных оценках используется обычное неравенство треугольника. При

этом $f(\delta) = \left(\alpha N^{\frac{1}{p}} + 2\delta\right)^p + \left(c^{\frac{1}{p}} + 2\delta\right)^p < \alpha^p (N+1)$ при всех достаточно малых δ .

Лемма 3: пусть последовательность $\{x_n\} \subset l_p$ удовлетворяет условиям леммы 1, а последовательность $\{y_n\} \subset l_r$ удовлетворяет условиям леммы 2, тогда

найдутся подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ и $\{y_{n_k}\}$ такие, что для всех $N \in \mathbb{N}$ одновременно $\left\| \sum_{k=1}^N x_{n_k} \right\| > \alpha_1 N^{\frac{1}{p}}$ и $\left\| \sum_{k=1}^N y_{n_k} \right\| < \alpha_2 N^{\frac{1}{r}}$.

Для доказательства, если первые N членов обеих подпоследовательностей уже построены, сперва найдем значение $\delta > 0$, для которого одновременно

выполнены условия $f_1(\delta) = \left(\alpha_1 N^{\frac{1}{p}} - 2\delta \right)^p + \left(c^{\frac{1}{p}} - 2\delta \right)^p > \alpha_1^p (N+1)$ и

$f_2(\delta) = \left(\alpha_2 N^{\frac{1}{r}} + 2\delta \right)^r + \left(c^{\frac{1}{r}} + 2\delta \right)^r < \alpha_2^r (N+1)$. Затем подберем $M \in \mathbb{N}$ так, чтобы

одновременно $\|(I - P_M)z_1\| < \delta$ и $\|(I - P_M)z_2\| < \delta$, где $z_1 = \sum_{k=1}^N x_{n_k}$,

$z_2 = \sum_{k=1}^N y_{n_k}$. Наконец, строим n_{N+1} так, чтобы одновременно $\|P_M x_{n_{N+1}}\| < \delta$ и

$\|P_M y_{n_{N+1}}\| < \delta$. После этого оценки, проводимые при доказательстве лемм 1 и 2,

выполняются одновременно, что и обосновывает шаг индукции.

Доказательство теоремы Питта: поскольку l_r – рефлексивное пространство, то достаточно доказать, что оператор A переводит всякую слабо сходящуюся последовательность в последовательность, сходящуюся по норме. Без потери общности можно рассматривать последовательности, сходящиеся к нулю, а оператор считать ненулевым.

Допустим, что $x_n \rightharpoonup 0$, но $Ax_n \not\rightarrow 0$. Переходя, при необходимости, к подпоследовательности, можно считать, что $\|Ax_n\|^p \geq c > 0$. Тогда, в силу леммы 3, учитывая ограниченность слабо сходящейся последовательности и то, что $Ax_n \rightharpoonup 0$, построим подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ и $\{Ax_{n_k}\}$ и получим цепочку оценок, справедливую при всех $N \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_1 N^{\frac{1}{p}} < \left\| \sum_{k=1}^N Ax_{n_k} \right\| \leq \|A\| \left\| \sum_{k=1}^N x_{n_k} \right\| < \|A\| \alpha_2 N^{\frac{1}{r}}. \text{ Ясно, что } N^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}} > \frac{\alpha_1}{\|A\| \alpha_2}, \text{ что}$$

невозможно, ввиду стремления левой части к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Список литературы

1. Albiac, F. Topics in Banach Space Theory / F. Albiac, N. J. Kalton. New York: Springer, 2006. 376 p.
2. Delpech, S. A short proof of Pitt's compactness theorem / S. Delpech. Текст: электронный // Proceedings of the American Mathematical Society, 2009. Volume 137. № 4. P. 1371-1372. URL: <https://www.ams.org/journals/proc/2009-137-04/S0002-9939-08-09617-2/S0002-9939-08-09617-2.pdf> (дата обращения: 25.02.2023).
3. Pitt, H.R. A Note on Bilinear forms / H. R. Pitt // *Journal of the London Mathematical Society*. 1936. Volume s1-11. Issue 3. P. 174-180.
4. Пич, А. Операторные идеалы / А. Пич. М.: Мир, 1982. 536 с.

П. В. Кушнарев

Миасский филиал ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ:

РИСКИ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Научный руководитель – Т.В. Малькова, к.и.н., доцент, директор

Миасского филиала ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

Аннотация: В статье описываются риски связанные с использованием искусственных нейронных сетей и перспективы их дальнейшего развития.

Ключевые слова: искусственные нейронные сети, искусственный нейрон.

В начале 2023 года, генеральный директор SpaceX и владелец Twitter - Илон Маск, а также еще несколько экспертов в области искусственного интеллекта, в своем письме, призвали все лаборатории, исследующие искусственный интеллект, немедленно прекратить хотя бы на шесть месяцев тренировки систем мощнее GPT-4, беспокоясь об опасностях, которые несут