

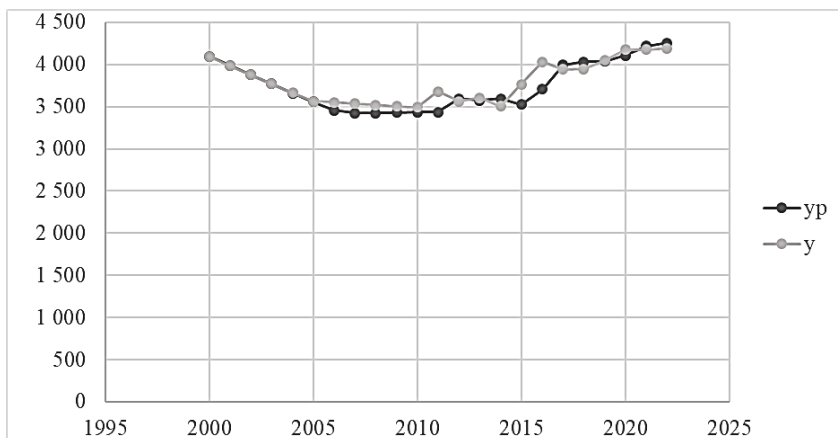


Рис. 1. Сравнение модели Брауна и исходных данных  
( $y$  — исходные данные,  $ur$  — модель Брауна)

## Список литературы

- Осипенко, С. А. Экономико-математическое моделирование : учебно-методическое пособие / С. А. Осипенко. Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2018. 147 с.: ил., табл. Режим доступа: по подписке. URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=481040> (дата обращения: 15.02.2023).
- Росстат. Текст: электронный. URL: <https://rosstat.gov.ru/statistics/science> (дата обращения: 24.12.2023).

## О ЗАДАЧАХ РАСПРЕДЕЛЁННОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПРОСТЕЙШЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

**А. С. Кутузов**

*Троицкий филиал ФГБОУ ВО «ЧелГУ»*

**Аннотация.** Рассматриваются задачи существования распределенного управления процессом остывания и нагревания однородного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью. В случае существования решения даются алгоритмы поиска этого решения.

**Ключевые слова:** уравнение теплопроводности, задача управляемости, распределенное управление.

Рассмотрим цилиндр  $Q = (0, 1) \times \mathbb{R}_+$ , в котором требуется определить функцию  $u \in C_{x,t}^{2,1}(Q) \cap C(\bar{Q})$  — классическое решение началь-

но-красвой задачи

$$u_t = u_{xx} + f(x, t), \quad (x, t) \in Q,$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in [0, 1].$$

Здесь  $f \in C(Q)$  — ненулевая ограниченная измеримая функция, удовлетворяющая оценке  $|f(x, t)| \leq C$ ,  $\varphi \in C_0^\infty(0, 1)$  — финитная бесконечно гладкая функция. Хорошо известно (см. [2, § 34]), что поставленная задача имеет единственное решение. Функция  $f$  характеризует плотность источников тепла, функция  $u$  — температуру точек стержня в произвольные моменты времени.

Задачами управляемости принято называть задачи приведения динамической системы к заданному состоянию при наличии некоторого управляющего воздействия (см. [1; 4]).

В рассматриваемом случае будем считать управляющим воздействием функцию  $f$  (что в теории управления называется распределенным управлением). Требуется подобрать функцию  $f$  таким образом, чтобы  $u(x, t) \equiv 0$  при  $t \geq T$ , где  $T > 0$  — фиксированная постоянная. Иными словами, требуется охладить стержень до нулевой температуры за конечное время при наличии произвольного начального температурного распределения  $\varphi$  либо показать, что это невозможно или возможно не всегда.

Пусть вначале  $\varphi = 0$ . Применяя стандартную технику разделения переменных для неоднородного уравнения с однородными краевыми условиями, запишем решение задачи в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi^2 k^2 t} \left( \varphi_k + \int_0^t e^{\pi^2 k^2 \tau} f_k(\tau) d\tau \right) \sin \pi k x,$$

где  $\varphi_k$  — коэффициенты Фурье функции  $\varphi$ ;  $f_k(t)$  — коэффициенты Фурье функции  $f$  (см. [3, со с. 209]).

Равенство  $u(x, t) \equiv 0$  при  $t \geq T$  будет возможно, если удастся подобрать такую функцию  $f$ , чтобы  $\varphi_k + \int_0^t e^{\pi^2 k^2 \tau} f_k(\tau) d\tau = 0$  при всех  $t \geq T$  и всех  $k \in \mathbb{N}$ .

Будем искать коэффициенты  $f_k(t)$  в виде  $f_k(t) = \begin{cases} c_k(T-t), & 0 \leq t < T \\ 0, & t \geq T \end{cases}$ ,

тогда  $c_k \int_0^T e^{\pi^2 k^2 \tau} (T - \tau) d\tau = -\varphi_k$ , поэтому  $c_k = -\frac{\pi^4 k^4 \varphi_k}{e^{\pi^2 k^2 T} - 1 - \pi^2 k^2 T}$ .

Таким образом, в качестве  $f$  достаточно выбрать функцию  $f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \pi k x$  с указанными коэффициентами Фурье. Ее непрерывность очевидна из свойств равномерно сходящихся рядов.

Используя ограниченность этой функции, получим оценку момента времени  $T$  (ясно, что достаточно рассмотреть только  $0 \leq t \leq T$ ). По-

скольку при  $x \geq 0$  выполняется неравенство  $e^x - 1 - x \geq \frac{x^3}{6}$ , то

$$|f(x, t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^4 k^4 T |\varphi_k|}{e^{\pi^2 k^2 T} - 1 - \pi^2 k^2 T} \leq \frac{6}{\pi^2 T^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k|}{k^2} = C,$$

при выборе  $T^2 = \frac{6}{\pi^2 C} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k|}{k^2}$ . Таким образом, задача управляемости в рассматриваемой постановке разрешима. Ясно, что решение этой задачи не единственно и зависит от способа нахождения коэффициентов  $f_k(t)$ .

В случае  $\varphi \equiv 0$  приходим к условию  $\int_0^t e^{\pi^2 k^2 \tau} f_k(\tau) d\tau = 0$  при всех  $t \geq T$  и всех  $k \in \mathbb{N}$  и описанный метод операторных решений

не дает. В этом случае примем  $f_k(t) = \begin{cases} e^{-\pi^2 k^2 t} \sin \frac{2\pi t}{T}, & 0 \leq t < T \\ 0, & t \geq T \end{cases}$ , тогда при  $0 < t < T$

$$|f(x, t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi^2 k^2 t} \left| \sin \frac{2\pi t}{T} \right| \leq \frac{2\pi t}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\pi^2 k^2 t}} \leq \frac{2\pi t}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2 t} = \frac{\pi}{3T} = C,$$

при выборе  $T = \frac{\pi}{3C}$ . Таким образом, и в этом случае задача управляемости разрешима.

Рассмотрим другой способ решения задачи в этом случае. Для этого введем бесконечно гладкую функцию  $\omega(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$ , тогда  $g_{a,b}(t) = \omega(t-a)\omega(b-t)$  — бесконечно гладкая функция, положи-

тельная на интервале  $(a, b)$ , равная нулю за его пределами. Функция  $u(x, t) = A \cdot g_{0,T}(t) \cdot \sin \pi x$  удовлетворяет начальному условию, краевым условиям и равна нулю при всех  $t \geq T$ , каково бы ни было значение  $T > 0$ . Тогда ясно, что

$$\begin{aligned} |f(x, t)| &= |u_t - u_{xx}| = |A \cdot g'_{0,T}(t) \cdot \sin \pi x + A\pi^2 \cdot g_{0,T}(t) \cdot \sin \pi x| \leq \\ &\leq A \left( \max_{t \in [0, T]} |g'_{0,T}(t)| + \pi^2 \max_{t \in [0, T]} |g_{0,T}(t)| \right) = C \\ \text{при } A &= \frac{C}{\max_{t \in [0, T]} |g'_{0,T}(t)| + \pi^2 \max_{t \in [0, T]} |g_{0,T}(t)|}. \end{aligned}$$

Очевидным достоинством второго способа решения задачи с точки зрения вычислительного аспекта является точная форма записи ответа, не содержащая операции вычисления суммы ряда.

Следует отметить, что отсутствие единственности решения задач управляемости является естественным с практической точки зрения и приводит к такой естественной задаче, как поиск оптимального в некотором смысле управления, переводящего динамическую систему в заданное состояние.

Заметим также, что, поскольку процесс теплопроводности является диссипативным, то охлаждение стержня до нулевой температуры за бесконечное время происходит всегда.

Наконец, рассмотрим еще одну задачу управляемости: можно ли нагреть стержень в точке  $x_0 \in (0, 1)$  за конечное время  $T$  с начальной температуры  $\varphi \equiv 0$  до заданной температуры  $|u(x_0, T)| > M$ ?

Из принципа максимума для уравнения теплопроводности (см. [2, § 34]) сразу следует необходимое условие разрешимости задачи в виде  $M < TC$ . Зная явный вид решения методом разделения переменных, получим необходимую для существования решения оценку, не зависящую от  $T$ .

Поскольку  $|f_k(t)| \leq 2 \int_0^1 |f(x, t) \sin \pi kx| dx \leq 2C \int_0^1 |\sin \pi kx| dx = \frac{4C}{\pi}$ , то, при условии существования решения, должны выполняться оценки

$$M < |u(x_0, T)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi^2 k^2 T} \left( \int_0^T e^{\pi^2 k^2 \tau} |f_k(\tau)| d\tau \right) |\sin \pi kx_0| \leq$$

$$\leq \frac{4C}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi^2 k^2 T} \left( \int_0^T e^{\pi^2 k^2 \tau} d\tau \right) = \frac{4C}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\pi^2 k^2 T}}{k^2} \leq \frac{4C}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{2C}{3\pi}$$

Таким образом, при условии  $M \geq \frac{2C}{3\pi}$  рассматриваемая задача управляемости не разрешима.

Покажем, что при определенных условиях можно подобрать такое управление, что ответ на поставленный вопрос все-таки становится

положительным. Для этого рассмотрим функцию  $v_{a,b}(t) = \frac{\int_{-\infty}^t g_{a,b}(\tau) d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} g_{a,b}(\tau) d\tau}$ ,

которая является бесконечно гладкой, равной нулю при  $t \leq a$  и единице при  $t \geq b$ . Зафиксируем  $T > 0$  и примем

$$u(x, t) = \frac{C v_{0,T}(t) \cdot \sin \pi x}{\max_{t \in [0, T]} |v'_{0,T}(t)| + \pi^2 \max_{t \in [0, T]} |v_{0,T}(t)|}, \quad \text{тогда, аналогично тому, как}$$

это было показано ранее,  $|f(x, t)| = |u_t - u_{xx}| \leq C$ . Условие  $|u(x_0, T)| > M$

приводит к оценке  $\frac{C v_{0,T}(T) \cdot \sin \pi x_0}{\|v_{0,T}\|} = \frac{C \cdot \sin \pi x_0}{\|v_{0,T}\|} > M$ , где обозначено

$$\|v_{0,T}\| = \max_{t \in [0, T]} |v'_{0,T}(t)| + \pi^2 \max_{t \in [0, T]} |v_{0,T}(t)| = \max_{t \in [0, T]} |v'_{0,T}(t)| + \pi^2.$$

Таким образом, предлагаемое управление решает задачу при выполнении усло-

вия  $\frac{C}{M} > \max \left\{ \frac{\|v_{0,T}\|}{\sin \pi x_0}, \frac{3\pi}{2}, \frac{1}{T} \right\}$ . С этой точки зрения указанную задачу

можно назвать условно разрешимой.

## Список литературы

1. Lions, J. L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems / J. L. Lions. Текст: непосредственный // SIAM Review. 1988. Vol. 30, № 1. P. 1–68.
2. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. Москва : Наука, 1981. 512 с.
3. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1999. 799 с.
4. Черноусько, Ф. Л. Ограниченное управление в системах с распределенными параметрами / Ф. Л. Черноусько // Прикладная математика и механика. 1992. Т. 56, № 5. С. 810–826.