

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЯЕМОСТИ

А. С. Кутузов

ФГАОУ ВО «ТюмГУ»

Аннотация. Рассматривается задача управляемости в модели теплопроводности. Описывается построение решения и обосновывается его неединственность.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, задача управляемости, интеграл Пуассона.

В верхней полуплоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ рассматривается задача Коши для простейшего однородного уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Классическая постановка задачи предполагает, что искомое решение u задачи ищется в классе $C_{x,t}^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \cap C_b(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, где C_b — множество непрерывных ограниченных на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ функций. При этом предполагается, что $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$.

Хорошо известно [2; 3; 6], что решение указанной задачи существует, единственно и дается интегралом Пуассона.

Поставим следующую задачу управляемости, т. е. задачу приведения системы к заданному состоянию, при наличии определенного управляющего воздействия [см., напр., 1; 4; 5; 8].

Требуется подобрать функцию $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ (управление) таким образом, чтобы $u(x, t) = 0 \Leftrightarrow x = t, x \in \mathbb{R}, t > 0$.

Предположим сначала, что указанная функция φ существует, тогда решение задачи Коши можно записать при помощи интеграла Пуассона [см. 3]:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \varphi(\xi) d\xi.$$

Для построения требуемого решения представим интеграл в виде суммы двух интегралов и получим у обоих интегралов одинаковые пределы интегрирования. Будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \varphi(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}} \varphi(-\xi) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Поскольку $u(t, 0) = 0$, то приходим к равенству

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{(t+\xi)^2}{4t}} \varphi(-\xi) d\xi + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(t-\xi)^2}{4t}} \varphi(\xi) d\xi = 0.$$

После несложных преобразований показателей экспонент получаем

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} \left(e^{-\frac{\xi}{2}} \varphi(-\xi) + e^{\frac{\xi}{2}} \varphi(\xi) \right) d\xi = 0.$$

Это равенство выполнено при всех $t > 0$, если, например, при

всех $\xi > 0$ $e^{-\frac{\xi}{2}} \varphi(-\xi) + e^{\frac{\xi}{2}} \varphi(\xi) = 0$. Получили функциональное уравнение на искомую функцию-управление φ , из которого следует, что $\varphi(-\xi) = -e^{\xi} \varphi(\xi)$ при $\xi > 0$. При этом значения φ при $\xi > 0$ задаются произвольно, лишь бы выполнялось условие $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$. В частности, должно быть выполнено условие $\varphi(0) = 0$.

Теперь мы можем сформулировать и доказать основной результат.

Теорема: для любой функции $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$, знакопостоянной при $x > 0$ и такой, что $\varphi(-x) = -e^x \varphi(x)$ при $x > 0$, существует единственное классическое решение u задачи

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u|_{t=x} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \end{aligned}$$

более нигде в полуплоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ не обращающееся в 0.

Более того, это решение является бесконечно гладкой функцией на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ и дается формулой $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4t}} e^{\frac{\xi}{2}} \operatorname{sh} \left(\frac{\xi}{2} \left(\frac{x}{t} - 1 \right) \right) d\xi$.

Доказательство: пусть удовлетворяет условию теоремы, тогда примем эту функцию за начальные данные в задаче Коши. Решение этой задачи имеет вид . Выполнив очевидные преобразования интеграла, получим:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}} \varphi(-\xi) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \varphi(\xi) d\xi = \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}} e^{\xi} \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \varphi(\xi) d\xi = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}} e^{\xi} \right) d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4t}} \left(e^{\frac{\xi x}{2t}} - e^{-\frac{\xi x}{2t}} e^{\xi} \right) d\xi = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4t}} e^{\frac{\xi}{2}} \left(e^{\frac{\xi x}{2t}} e^{-\frac{\xi}{2}} - e^{-\frac{\xi x}{2t}} e^{\frac{\xi}{2}} \right) d\xi = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4t}} e^{\frac{\xi}{2}} \operatorname{sh} \left(\frac{\xi}{2} \left(\frac{x}{t} - 1 \right) \right) d\xi.
 \end{aligned}$$

Очевидно, что множитель $\varphi(\xi) e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4t}} e^{\frac{\xi}{2}}$ знакопостоянен, поэтому при $x > t > 0$ весь интеграл имеет тот же знак, что и этот множитель [см. 7]. Аналогично при $x < t, t > 0$ интеграл имеет знак, противоположный знаку этого множителя. То же самое можно сказать про случай $x < 0, t > 0$. Таким образом, $u(x, t) = 0$ в полуплоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ тогда и только тогда, когда $x = t, t > 0$, и искомое решение построено.

Его единственность при фиксированной функции $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ вытекает из единственности решения задачи Коши (см. [3]). Бесконечная гладкость следует из того, что это решение построено на основе интеграла Пуассона (см. [2; 3; 6]).

Теорема доказана.

В качестве конкретного примера функции $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$, удовлетворяющей всем требуемым условиям, укажем функцию $\varphi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x \geq 0; \\ 1 - e^x, & x < 0. \end{cases}$

Из проведенного рассмотрения вытекает, что поставленная задача управляемости имеет неединственное решение, поскольку разные решения можно получать исходя из различных заданий функции φ .

Попутно мы привели рецепт построения бесконечно гладкой в полуплоскости функции, обращающейся в нуль только на луче, что может оказаться полезным для целей теории функций.

Список литературы

1. Lions, J. L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems / J. L. Lions // SIAM Review. 1988. Vol. 30, № 1. P. 1–68.
2. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. М. : Наука, 1981. 512 с.
3. Кутузов, А. С. Введение в математическую физику / А. С. Кутузов. Челябинск : Челябинский государственный университет, 2024. 151 с. Текст: электронный // Elibrary [сайт]. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_67301395_11545998.pdf (дата обращения: 30.03.2025).
4. Кутузов, А. С. О задачах распределённой управляемости простейшей динамической системой / А. С. Кутузов. Текст: электронный // Наука XXI века: проблемы, поиски, решения : материалы XLVIII научно-практической конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения академика В. П. Макеева, Миасс, 26 апреля 2024 года. Челябинск: Челябинский государственный университет, 2024. С. 49–53. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_74520483_96716134.pdf (дата обращения 30.03.2025).
5. Кутузов, А. С. Численное решение одной задачи распределённой управляемости в среде Mathcad / А. С. Кутузов. Текст: электронный // Международный научно-исследовательский журнал. 2024. № 8(146). URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_68887149_76532876.pdf (дата обращения 30.03.2025).
6. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. М. : Изд-во МГУ, 1999. 799 с.
7. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том II / Г. М. Фихтенгольц. СПб. : Лань, 2016. 800 с.
8. Черноуцко, Ф. Л. Ограниченное управление в системах с распределёнными параметрами / Ф. Л. Черноуцко // Прикладная математика и механика. 1992. Т. 56, № 5. С. 810–826.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗРЫВНОЙ ВОЛНЫ В ЗАКРЫТОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. Е. Медведев

Миасский филиал ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

Научный руководитель — К. А. Лихачёв,

старший преподаватель кафедры прикладной механики МФ ЧелГУ

Аннотация. Исследование посвящено численному моделированию распространения взрывных волн в двумерной постановке. На основе уравнений Эйлера реализован метод Лакса — Вендроффа для анализа динамики давления, плотности и скорости. Практическая часть включает визуализацию в *Blender*, демонстрирующую взаимодействие ударной волны с объектом. Результаты подтверждают несовместимость художественного изображения взрывов с физическими законами.

Ключевые слова: *взрывная волна, уравнения Эйлера, метод Лакса — Вендроффа, численное моделирование.*