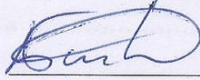


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
Кафедра фундаментальной математики и механики

РЕКОМЕНДОВАНО К ЗАЩИТЕ
В ГЭК И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ
ЗАИМСТВОВАНИЯ
Заведующий кафедрой
к.ф. – м.н.
 Басинский К.Ю.
1 июля 2019 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(магистерская диссертация)

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНО–КОНДУКТИВНЫХ
ПОТОКОВ ПРИ ВАРЬИРОВАНИИ ТОЛЩИНЫ ТОНКОГО СЛОЯ ВОДЫ В
ПРИБЛИЖЕНИИ БУССИНЕСКА


01.04.01 Математика
Магистерская программа «Вычислительная механика»

Выполнил работу
Студент 2 курса
очной формы обучения


(подпись)


Васильев
Марк
Александрович

Научный руководитель
к.ф. – м.н., доцент


(подпись)

Актаев
Нуркен
Ерболатович

Рецензент
к.ф. – м.н.
заведующий кафедрой
Моделирование физических
процессов и систем, Физико –
технический институт, ТюмГУ.


(подпись)

Ганопольский
Родион
Михайлович

г. Тюмень, 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
Постановка задачи.....	6
Построение математической модели	8
Конечно – разностная схема	15
Метод Гаусса–Зейделя.....	19
Алгоритм.....	25
Анализ результатов	26
Заключение	34
Список литературы	35
Приложение 1. Программный код.....	38

Введение

При изучении тонких слоев жидкости мы сталкиваемся с таким физическим явлением как капельный кластер. Чтобы наблюдать это явление нам необходимо нагревать межфазную поверхность жидкость – газ, при этом в слое не должны возникать термокапиллярные течения. Такое может происходить только в жидкостях с низким поверхностным натяжением, то есть при наличии поверхностно активных веществ. Вообще капельный кластер представляет собой гексагональную микрокапельную структуру конденсата (диаметром 20 ... 200 мкм), левитирующую на достаточно малом расстоянии, сравнимом с диаметром капель, над свободной поверхностью горизонтального слоя активно испаряющейся жидкости. Кластер капель, а также облака конденсированных микрокапель показаны на рисунке ниже. (Рисунок. 1.)

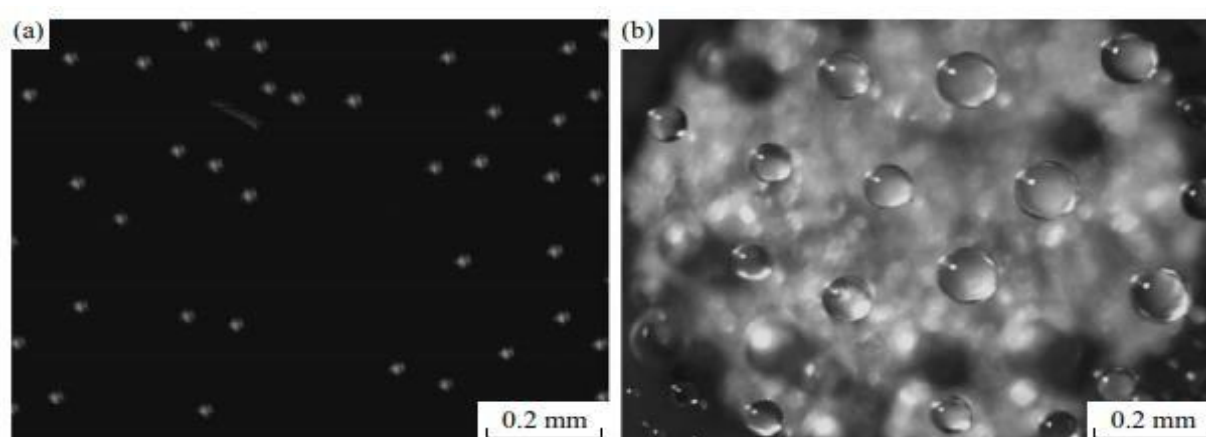


Рисунок 1. Капельный кластер.

Капельки жидкости образуются, когда над локально нагретой областью межфазной поверхности, пар резко охлаждается с расстоянием от поверхности жидкости. В результате в газовой среде образуются микрокапельки, некоторые из которых выпадают на границе раздела, образуя кластер. Таким образом, кластер обеспечивает дополнительный механизм диссипации энергии, другими словами, это диссипативная структура. Этот механизм состоит в поглощении тепловой энергии и нижней части капли, и ее передаче в верхнюю часть термокапиллярными силами. [1] [12] [21] [15] [23].

На данный момент межфазная конвекция существенно влияет на интенсивность многих технологических процессов в пищевой, химической, нефтяной, металлургической и разных других отраслях промышленности, в том числе протекающих в условиях невесомости, где гравитационные механизмы конвективного движения ослаблены или отсутствуют.

Отдельное внимание к исследованиям по данной тематике обусловлено разработками в области космических технологий и систем жизнеобеспечения орбитальных станций и космических аппаратов. Термо – и концентрационно – капиллярные эффекты имеют важное прикладное значение для различных областей науки, таких, например, как экология (очистка поверхности воды от загрязнений нефтепродуктами); биология (движение бактерий и микроорганизмов, внутриклеточный массообмен); медицина (распространение легочного ПАВ при лечении респираторных заболеваний) и многих других.

Вообще конденсация аэрозольных микрокапель это важный элемент большого числа процессов, начиная с макропроцессов: круговорота воды в природе и формирования климата и заканчивая микро/нанофлюидикой и биогенезом. Считается, что объяснение феномена капельного кластера поможет лучше понять фундаментальные физико – химические явления, включая роль микрокапель в катализе природных химических реакций, а также создать новые методы анализа и контроля аэрозолей. Также понимание этого процесса может помочь и в области микрофлюидики. Так как отслеживать микрокапли, измерять их состав весьма затруднительно, поскольку они образуют малоустойчивые конгломераты, например, облака, туман. А кластер – это стабильное образование, позволяющее изучать капли индивидуально. [13] [17] [19] [21].

Поэтому важной частью исследований является условие процесса стабилизации капельного кластера и поддержание его в этом состоянии.

Потому что уничтожение даже одной капли уже приводит к исчезновению целого сектора из десятков капель, а впоследствии и всего кластера.

Также необходимо заметить, что поведение плавающих одиночных капель и скоплений капель в набегающем потоке водяного пара и захваченного воздуха было первоначально изучено экспериментально и теперь нашей задачей является постановка физико–математической модели и ее численное моделирование используя метод Гаусса–Зейделя.

Таким образом, цель этой работы: рассмотреть процессы естественной конвекции в тонком слое воды, нагретом лазерным лучом через поверхность ситалла, и исследовать влияние толщины тонкого слоя на конвективные и кондуктивные потоки.

Для достижения вышеставленной цели будем решать следующие задачи:

- Изучение литературы
- Построение физико – математической формулировки проблемы
- Переход к конечно – разностной форме
- Использование метода Гаусса–Зейделя для построения алгоритма
- Написание программного кода в среде программирования C++
- Анализ полученных результатов

Постановка задачи

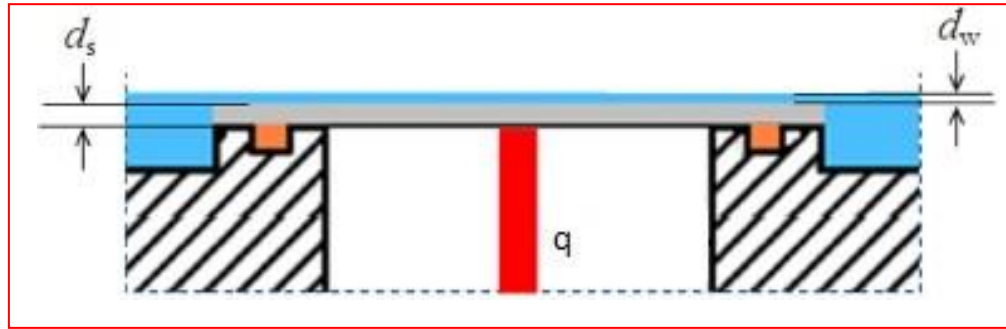


Рисунок 2. Схема экспериментальной установки.

На рисунке выше (**Рис. 2**) показана экспериментальная установка, где d_s – толщина ситалловой подложки, d_w – толщина слоя воды, q – параметр лазера, где: $q = \frac{W}{\pi(r+3.66 \cdot 10^{-4})^2} \exp\left(-\frac{2r^2}{(r+3.66 \cdot 10^{-4})^2}\right)$.

$W = 0.2$ Вт, мощность лазера, $r = 0.395$ мм, радиус пучка. [1].

Задача описывается системой уравнений, представленной ниже. Она состоит из уравнения Навье – Стокса, уравнения теплопроводности и уравнения неразрывности.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T &= \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ_0 плотность жидкости [$\text{кг}/\text{м}^3$], t время [с], p давление [Па], \mathbf{v} скорость (вектор) [$\text{м}/\text{с}$], ν кинематическая вязкость [$\text{Па} \cdot \text{с}$], \mathbf{g} – ускорение свободного падения [$\text{м}/\text{с}^2$], T – температура [К], χ – коэффициент теплопроводности [$\text{м}^2/\text{с}$], c_p – изобарная теплоемкость [$\text{Дж}/\text{К}$]. [3].

При решении задачи мы будем использовать следующие допущения:

- Задача будет рассмотрена в цилиндрической системе координат, причем вследствие независимости переменных от угла, задача двумерна.
- Отсутствие моделирования кондуктивных потоков в ситалловой подложке.
- Плотность зависит от температуры. (Приближение Буссинеска).
- Задача стационарна.
- Течение установившееся.
- Считая разницу температур малой, мы будем пренебрегать изменением температуры значения χ и будем считать его постоянным.

Построение математической модели

Рассмотрим приближение Буссинеска. Эта модель включает в себя уравнение Навье – Стокса, уравнение теплопроводности и уравнение несжимаемости. Основная идея приближения состоит в том, чтобы учесть зависимость плотности от температуры.

Запишем переменную температуру в виде $T = T_0 + T'$, где T_0 – некоторое постоянное среднее значение, от которого отсчитывается неравномерность температуры T' . Поскольку предполагается что T' мало по сравнению с T_0 , то плотность жидкости также записывается в виде $\rho = \rho_0 + \rho'$ с постоянной ρ_0 . Из-за небольшого изменения температуры T' , вызванное этим изменение плотности ρ' также мало, и мы можем записать $\rho' = -\rho_0 \beta T'$, где $\beta = -\rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial T}$ температурный коэффициент расширения жидкости. При давлении $p = p_0 + p'$, значение p_0 не является постоянным значением, это давление, которое соответствует механическому равновесию при постоянной (равной T_0 и ρ_0) температуре и плотности. Оно изменяется с высотой согласно гидростатическому уравнению $p_0 = \rho_0 \mathbf{g} \mathbf{r} + const = -\rho_0 g z + const$ где z координата, отчитывающаяся вертикально вверх.

Начнем с преобразования уравнения Навье – Стокса, которое при наличии –поля тяжести имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (2)$$

получающийся добавлением к правой стороне действующей на единицу массы силы \mathbf{g} . Подставим сюда $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$. С точностью до малых второго порядка имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla p}{\rho} &= \nabla(p_0 + p')(\rho_0 + \rho')^{-1} = \frac{\nabla(p_0 + p')}{\rho_0} \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)^{-1} = \\
&= \frac{\nabla(p_0 + p')}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0} + \left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2\right) = \\
&= \frac{\nabla(\rho \mathbf{g} r + p')}{\rho_0} (1 + \beta T' + (\beta T')^2) = \\
&= \mathbf{g} + \mathbf{g} \beta T' - \mathbf{g} (\beta T')^2 + \frac{\nabla p'}{\rho_0} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} \beta T' + \frac{\nabla p'}{\rho_0} (\beta T')^2 = \\
&= \mathbf{g} + \mathbf{g} \beta T' + \frac{\nabla p'}{\rho_0} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} \beta T'
\end{aligned}$$

Подставим это выражение в уравнение Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\mathbf{g} - \mathbf{g} \beta T' - \frac{\nabla p'}{\rho_0} - \frac{\nabla p'}{\rho_0} \beta T' + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (3)$$

И получаем окончательно:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} (1 + \beta T') + \nu \Delta - \mathbf{g} \beta T' \quad (4)$$

В уравнении теплопроводности член, содержащий вязкость, при свободной конвекции, как можно показать, мал по сравнению с другими членами уравнения и потому может быть опущен. [3]. Таким образом, получаем:

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T' = \chi \Delta T' \quad (5)$$

Тогда система будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{aligned}
(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{\nabla p'}{\rho_0} (1 + \beta T') + \nu \Delta \mathbf{v} - \mathbf{g} \beta T' \\
(\mathbf{v} \nabla) T' &= \chi \Delta T' \\
\operatorname{div} \mathbf{v} &= 0
\end{aligned} \right. \quad (6)$$

Теперь перейдем в цилиндрическую систему координат, $u = \vec{v}(r)$, $v = \vec{v}(r)$, таким образом имеем:

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} &= - \frac{1 + \beta T'}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial r} + v \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\
u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} &= - \frac{1 + \beta T'}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + v \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - g \beta T' \\
u \frac{\partial T'}{\partial r} + v \frac{\partial T'}{\partial z} &= \chi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T'}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \right) \\
\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r u \right) + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right.
\end{aligned} \tag{7}$$

Это система четырех уравнений, определяющих неизвестные функции: v , p/ρ_0 , T' включает в себя три параметра: ν , χ , и $g\beta$. Кроме того, их решение включает в себя характерную длину h и характерную разность температур θ . Характерная скорость отсутствует, поскольку нет никаких движений, вызванных посторонними причинами, и весь поток жидкости обусловлен ее неравномерным нагревом.[2][3]

Также необходимо дополнить систему уравнением для расчета давления, так называемое уравнение Пуассона. Мы получим его путем умножения уравнений Навье – Стокса на $r \frac{\partial}{\partial r}$ и $z \frac{\partial}{\partial z}$ соответственно, а затем просуммируем и сгруппируем:

$$\begin{aligned}
r \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} + ur \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + vr \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + r \frac{\partial u \partial v}{\partial z \partial r} &= \\
&= - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial r} + r \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} (rv \Delta u)
\end{aligned} \tag{8}$$

Ввиду линейности оператора последнее слагаемое будет иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} (rv \Delta u) = v \Delta u + rv \Delta \frac{\partial u}{\partial r} \tag{9}$$

Разделим полученное выражение на r :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial r} \\ & = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right) + \frac{v}{r} \Delta u + \nu \Delta \frac{\partial u}{\partial r} \end{aligned} \quad (10)$$

Продифференцируем второе уравнение системы (6) по z:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + u \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial r} + v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial r} = -\rho_0 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \nu \Delta \frac{\partial v}{\partial z} \quad (11)$$

Сложим уравнения (3) и (4).

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} \\ & + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial r} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) + \frac{v}{r} \Delta u + \nu \Delta \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \Delta \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \quad (12)$$

Применяя то же свойство линейности оператора, получим уравнение неразрывности:

$$\begin{aligned} & \frac{v}{r} \Delta u + \nu \Delta \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \Delta \frac{\partial v}{\partial z} = [\nu \Delta \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0] - \frac{v}{r^2} \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ & \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} \\ & = -\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, получим выражение вида:

$$\Delta p = -\rho_0 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{v}{r^2} \left(\frac{u}{r} + \frac{2\partial u}{\partial r} \right) \right]$$

[6] [7] [5].

Теперь необходимо дополнить систему дифференциальных уравнений условиями, задающих их поведение на границе рассматриваемой области, то есть задать граничные условия.

На *верхней границе* происходит передача тепла, то есть будем использовать граничные условия третьего рода. Для описания процесса теплообмена между поверхностью тела и средой применяется закон Ньютона – Рихмана. А для скоростей на границе раздела фаз рассматривается условие свободной поверхности.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=h} = h_2(T - T) \\ \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{z=h_0} = 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

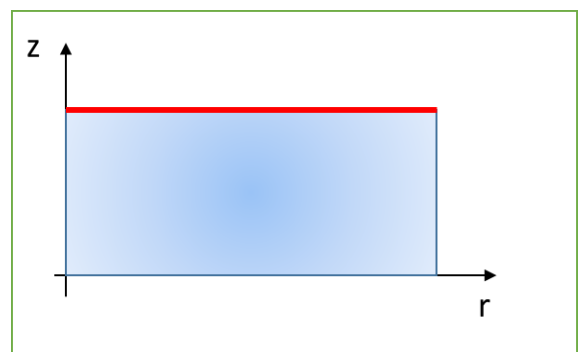


Рисунок 3. Верхняя граница.

На *нижней границе* также происходит передача тепла, то есть для описания процесса теплообмена между поверхностью тела и средой применяется закон Ньютона – Рихмана. Но при этом имеется источник тепла. Для скоростей выбираем условия прилипания.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=h} = h_1(T - T) + q \\ U|_{z=0} = 0 \\ V|_{z=0} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{z=0} = 0 \end{array} \right. \quad (15)$$

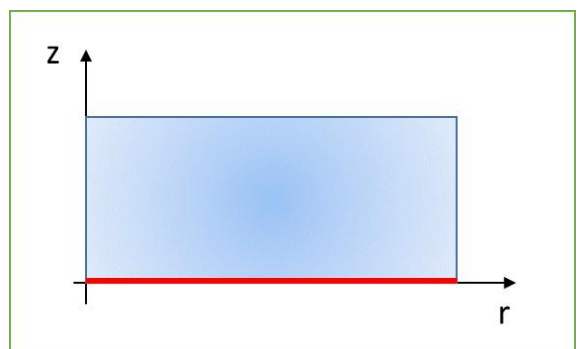


Рисунок 4. Нижняя граница.

На *левой границе* исходя из симметрии задачи имеем граничные условия второго рода – задаем значения потока для каждой точки. В данном случае в уравнениях Навье–Стокса и теплопроводности наблюдается неопределенность типа $0/0$.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$



Рисунок 5. Левая граница.

Чтобы избежать неопределенность в уравнениях необходимо использовать правило Лопиталья.

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right) &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right)}{\frac{\partial}{\partial r} (r)} \right) = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial r^3} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right) = 2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right) &= 2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \\ \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) &= 2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \end{aligned}$$

Тогда уравнения из системы примут вид:

$$\left\{ \begin{aligned} V \frac{\partial U}{\partial z} &= - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \\ V \frac{\partial V}{\partial z} &= - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \\ V \frac{\partial T}{\partial z} &= a \left(2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right. \quad (17)$$

На *правой границе* используем условие Неймана для уравнения теплопроводности. Для скоростей выбираем условия прилипания.

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0 \\ U \Big|_{r=R} = 0 \\ V \Big|_{r=R} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

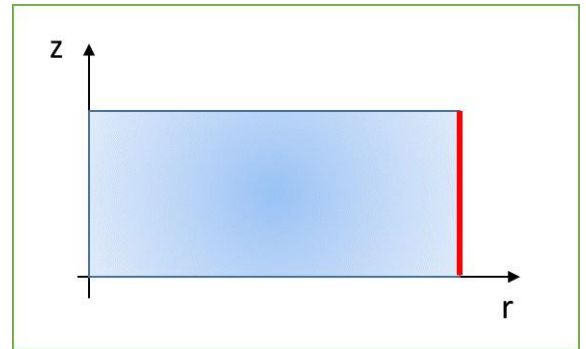


Рисунок 6. Правая граница.

Конечно – разностная схема.

Запишем систему уравнений в численном виде. Будем аппроксимировать дифференциальные операторы так что:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{(\Delta r)^2}$$

Таким образом получим для первого уравнения:

$$\begin{aligned} & u_{ij} \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} + v_{ij} \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\Delta z} = \\ = & - \left(\frac{1 + \beta T'_{i+j}}{\rho_0} \right) \frac{p'_{i+1,j} - p'_{ij}}{\Delta r} + v \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{(\Delta r)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Delta r i} \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{(\Delta z)^2} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Для второго:

$$\begin{aligned} & u_{ij} \frac{v_{i+1,j} - v_{ij}}{\Delta r} + v_{ij} \frac{v_{i,j+1} - v_{ij}}{\Delta z} = \\ = & - \left(\frac{1 + \beta T'_{i+j}}{\rho_0} \right) \frac{p'_{i+1,j} - p'_{ij}}{\Delta r} + v \left(\frac{v_{i+1,j} - 2v_{ij} + v_{i-1,j}}{(\Delta r)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Delta r i} \frac{v_{i+1,j} - v_{ij}}{\Delta r} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{ij} + v_{i,j-1}}{(\Delta z)^2} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнение теплопроводности:

$$\begin{aligned} & u_{ij} \frac{T'_{i+1,j} - T'_{ij}}{\Delta r} + v_{ij} \frac{T'_{i,j+1} - T'_{ij}}{\Delta z} = \\ & = \chi \left(\frac{T'_{i+1,j} - 2T'_{ij} + T'_{i-1,j}}{(\Delta r)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Delta r i} \frac{T'_{i+1,j} - T'_{ij}}{\Delta r} + \frac{T'_{i,j+1} - 2T'_{ij} + T'_{i,j-1}}{(\Delta z)^2} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} + \frac{u_{ij}}{\Delta r i} + \frac{v_{i,j+1} - v_{ij}}{\Delta z} = 0 \quad (20)$$

Уравнение Пуассона:

$$\begin{aligned}
 & \frac{p_{i+1,j} - 2p_{ij} + p_{i-1,j}}{(\Delta r)^2} + \\
 & + \frac{1}{\Delta r i} \frac{p_{i+1,j} - p_{ij}}{\Delta r} + \frac{p_{i,j+1} - 2p_{ij} + p_{i,j-1}}{(\Delta z)^2} \\
 & = -\rho_0 \left[\frac{v_{i,j+1} - 2v_{ij} + v_{i,j-1}}{(\Delta z)^2} + \frac{v_{ij} u_{i,j+1} - u_{ij}}{\Delta r \Delta z} \right. \\
 & + u_{ij} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{(\Delta r)^2} + v_{ij} \frac{v_{i,j+1} - 2v_{ij} + v_{i,j-1}}{(\Delta z)^2} \\
 & + 2 \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\Delta z} \frac{v_{i+1,j} - v_{ij}}{\Delta r} - \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} \frac{v_{i,j+1} - v_{ij}}{\Delta z} + \\
 & \left. + \frac{\nu}{r^2} \left(\frac{u_{ij}}{\Delta r} + 2 \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{21}$$

[7] [6].

Теперь запишем граничные условия в численном виде:

- На верхней границе $z = h_0$

Для уравнения Навье–Стокса:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\Delta z} = 0 \tag{22}$$

Или:

$$\begin{cases} U_{i,h_0} = 0 \\ V_{i,h_0} = 0 \end{cases} \tag{23}$$

Для уравнения теплопроводности:

$$\lambda \frac{T_{i,h_0+1} - T_{i,h_0-1}}{2\Delta z} = h_2 (\tilde{T} - T_{i,h_0}) \tag{24}$$

Переобозначим:

$$\tilde{h}_z = \frac{2\Delta z h_2}{\lambda}$$

Тогда имеем:

$$T_{i,h_0+1} = T_{i,h_0-1} + \tilde{h}_z (T_{i,h_0} - T_{i,h_0-1}) \tag{25}$$

Для уравнения Пуассона:

$$P_{i,h_0} = 0 \quad (26)$$

Окончательно

$$\begin{cases} U_{i,M+1} = 0 \\ V_{i,M+1} = 0 \\ T_{i,M+1} = T_{i,M-1} + \frac{\tilde{\kappa}(\tilde{T} - T_{i,M})}{2} \\ P_{i,M} = 0 \end{cases} \quad (27)$$

- На нижней границе $z = 0, j = 0$

Для уравнения Навье–Стокса

$$\begin{cases} U_{i,0} = 0 \\ V_{i,0} = 0 \end{cases} \quad (28)$$

Для уравнения теплопроводности

$$-\lambda \frac{T_{i,1} - T_{i,j-1}}{2\Delta z} = h_1(\tilde{T} - T_{i,0}) + q \quad (29)$$

Переобозначим:

$$\tilde{h}_F = \frac{2\Delta z h_1}{\lambda}$$

Окончательно получим:

$$T_{i,-1} = T_{i,1} + \frac{\tilde{\kappa}(\tilde{T} - T_{i,0})}{1} + q \frac{\tilde{h}}{h_1} \quad (30)$$

Для уравнения Пуассона:

$$P_{i,0} = 0 \quad (31)$$

Тогда имеем:

$$\begin{cases} U_{i,0} = 0 \\ V_{i,0} = 0 \\ T_{i,-1} = T_{i,1} + \frac{\tilde{\kappa}(\tilde{T} - T_{i,0})}{1} + q \frac{\tilde{h}}{h_1} \\ P_{i,0} = 0 \end{cases} \quad (32)$$

- На левой границе $r = 0, i = 0$

Для уравнения Навье–Стокса

$$\frac{U_{0,j} - U_{-1,j}}{\Delta r} = 0 \quad (33)$$

Окончательно

$$\begin{cases} U_{0,j} = U_{-1,j} \\ V_{0,j} = V_{-1,j} \\ T_{0,j} = T_{-1,j} \\ P_{0,j} = 0 \end{cases} \quad (34)$$

- На правой границе $r = R, i = N$

Для уравнения Навье–Стокса

$$\begin{cases} U_{R,j} = 0 \\ V_{R,j} = 0 \end{cases} \quad (35)$$

Для уравнения теплопроводности:

$$\frac{T_{R+1,j} - T_{R,j}}{\Delta r} = 0 \quad (36)$$

Или

$$T_{R+1,j} = T_{R,j}$$

Для уравнения Пуассона:

$$P_{R,j} = 0 \quad (37)$$

Таким образом:

$$\begin{cases} U_{0,j} = U_{-1,j} \\ V_{0,j} = V_{-1,j} \\ T_{0,j} = T_{-1,j} \\ P_{0,j} = 0 \end{cases} \quad (38)$$

Метод Гаусса–Зейделя

Существует большое количество методов решения систем линейных алгебраических уравнений, например, метод Крамера, метод Якоби или метод Гаусса–Зейделя. Методы делятся на два типа, это прямые и итерационные. Прямые методы или как их еще называют точные методы тяжело использовать для решения систем с большим количеством уравнений, они работают в основном с целыми числами и дают точные решения. А итерационные методы – приближенные, что означает мы всегда будем иметь лишь близкое решение в рамках допустимой погрешности. В нашей задаче мы будем использовать метод Гаусса–Зейделя, поэтому остановимся на нем по подробнее.

Метод Гаусса–Зейделя является модификацией метода простой итерации, и основная его идея заключается в том, что при вычислении $(n + 1)$ приближения неизвестной x учитываются уже вычисленные ранее $(n + 1)$ приближения неизвестных x .

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений:

$$Ax = b \text{ или } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (39)$$

Выразим из первого уравнения системы x_1 , из второго x_2 и т.д. Тогда будем иметь:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{11}} (a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{1}{a_{22}} (a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n) \\ \dots \\ x_j = \frac{b_j}{a_{jj}} - \frac{1}{a_{jj}} (a_{j1}x_1 + \dots + a_{jj-1}x_{j-1} + a_{jj+1}x_{j+1} + \dots + a_{jn}x_n) \end{cases} \quad (40)$$

Как видно, каждая новая итерация начинается с расчета x_1 через уже известные значения x , полученные в предыдущей итерации.

$$x_1^{k+1} = \frac{v_1}{a_{11}} - (a_{12} x_2^k + a_{13} x_3^k + \dots + a_{1n} x_n^k) / a_{11} \quad (41)$$

Как уже говорилось ранее метод Гаусса–Зейделя схож с методом простой итерации, но различия появляются при расчете x_1^{n+1} . В выражении для расчета x_2^{n+1} для x_1 используется значение, полученное на данной итерации, а не с предыдущей, как в методе простой итерации. Таким образом будут рассчитываться последующие значения x . Тогда система примет вид:

$$\begin{aligned} x_1^{n+1} &= \frac{v_1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{11}} (a_{12} x_2^n + \dots + a_{1n} x_n^n) \\ x_2^{n+1} &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{1}{a_{22}} (a_{21} x_1^{n+1} + \dots + a_{2n} x_n^n) \\ \{ x_j^{n+1} &= \frac{b_j}{a_{jj}} - \frac{1}{a_{jj}} (a_{j1} x_1^{n+1} + a_{jj} x_{j-1}^{n+1} + a_{jj} x_{j+1}^{n+1} + \dots + a_{jn-1} x_{j-1}^{n+1}) \end{aligned} \quad (42)$$

Или группируя коэффициенты:

$$\begin{aligned} x_1^{n+1} &= c_{12} x_2^n + \dots + c_{1j} x_j^n + d_1 \\ x_2^{n+1} &= c_{21} x_1^{n+1} + \dots + c_{2j} x_j^n + d_2 \\ \{ x_j^{n+1} &= c_{j1} x_1^{n+1} + \dots + c_{jj-1} x_{j-1}^{n+1} + d_j \end{aligned} \quad (43)$$

Где

$$c_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & j \neq i \\ 0, & j = i \end{cases} \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad i = \overline{1, n} \quad (44)$$

Таким образом, уравнения системы будут вычисляться по формуле

$$x_i^{n+1} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{n+1} + \sum_{j=i}^n c_{ij} x_j^n + d_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (45)$$

Где $x_i^0 = d_i$. Согласно теореме условия сходимости метода, имеем следующее условие сходимости:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n} \quad (46)$$

При этом хотя бы для одного уравнения неравенство должно выполняться строго. Эти условия являются достаточными для сходимости

метода, но они не являются необходимыми, т. е. для некоторых систем итерации сходятся и при нарушении условия. [6].

Условие окончания итерационного процесса Зейделя при достижении точности ε имеет вид:

$$\|Ax^k - b\| \leq \varepsilon \text{ или } \delta = \max_i |x^k - x^{k-1}| \leq \varepsilon \quad (47)$$

Теперь применим вышеописанный метод для нашей системы уравнений.

$$\begin{aligned} U_{ij}^{n+1} &= A_1 U_{i+1,j}^n + A_2 U_{i,j+1}^n + A_3 U_{i-1,j}^{n+1} + A_4 U_{i,j-1}^{n+1} + A_5 M \\ V_{ij}^{n+1} &= A_1 V_{i+1,j}^n + A_2 V_{i,j+1}^n + A_3 V_{i-1,j}^{n+1} + A_4 V_{i,j-1}^{n+1} + A_5 M' \\ T_{ij}^{n+1} &= B_1 T_{i+1,j}^n + B_2 T_{i,j+1}^n + B_3 T_{i-1,j}^{n+1} + B_4 T_{i,j-1}^{n+1} \end{aligned} \quad (48)$$

$A_1 = \frac{(v(r+\Delta r) - U_{ij}^n r \Delta r)(\Delta z)^2}{A}$	$B_1 = \frac{(a(r+\Delta r) - U_{ij}^n r \Delta r)(\Delta z)^2}{A}$
$A_2 = \frac{(v - V_{ij}^n \Delta z)r(\Delta r)^2}{A}$	$B_2 = \frac{(a - V_{ij}^n \Delta z)r(\Delta r)^2}{A}$
$A_3 = \frac{vr(\Delta z)^2}{A}$	$B_3 = \frac{ar(\Delta z)^2}{A}$
$A_4 = \frac{vr(\Delta r)^2}{A}$	$B_4 = \frac{ar(\Delta r)^2}{A}$
$A_5 = \frac{r(\Delta r)(\Delta z)^2}{A}$	
$A = v(\Delta r(\Delta z)^2 + 2r((\Delta z)^2 + (\Delta r)^2)) - r\Delta r\Delta z(U_{ij}^n \Delta z + V_{ij}^n \Delta r)$	
$B = a(\Delta r(\Delta z)^2 + 2r((\Delta z)^2 + (\Delta r)^2)) - r\Delta r\Delta z(U_{ij}^n \Delta z + V_{ij}^n \Delta r)$	
$M = -\frac{(1 + \beta T') p_{i+1,j}^n - p_{ij}^{n+1}}{\rho_0 \Delta r}$	
$M' = -\frac{(1 + \beta T') p_{i,j+1}^n - p_{ij}^{n+1}}{\rho_0 \Delta z} - g\beta T'$	

Таблица 1. Коэффициенты.

Теперь запишем граничные условия:

Как уже было сказано на верхней границе происходит теплообмен, то есть мы будем использовать граничные условия третьего рода. Для описания процесса теплообмена между поверхностью тела и средой применяется закон Ньютона–Рихмана, а для скоростей условие свободной поверхности.

$$\begin{cases} U_{i,h_0}^n = 0 \\ V_{i,h_0}^n = 0 \\ T_{i,h_0}^{n+1} = \frac{1}{1 - B_2 \tilde{h}_2} (B_1 T_{i+1,h_0}^n + B_2 (2T_{i,h_0-1}^{n+1} + \tilde{T}_2 + B_3 T_{i-1,h_0}^{n+1})) \\ P_{i,h_0}^n = 0 \end{cases} \quad (49)$$

На нижней границе также происходит теплопередача, то есть также применяется закон Ньютона для описания процесса теплообмена между поверхностью тела и средой, но в то же время существует источник тепла. Для скоростей мы выбираем условие прилипания.

$$\begin{cases} U_{i,0}^n = 0 \\ V_{i,0}^n = 0 \\ T_{i,0}^{n+1} = \frac{1}{1 + B_2 \tilde{h}_1} (B_1 T_{i+1,0}^n + 2B_2 T_{i,1}^n + B_2 \tilde{T}_1 + \frac{q}{h_1}) + B_3 T_{i-1,0}^{n+1} \\ P_{i,0}^n = 0 \end{cases} \quad (50)$$

На левой границе, исходя из симметрии задачи, мы имеем граничные условия второго рода – задаем значения потока для каждой точки. Поскольку в этом случае в уравнениях Навье–Стокса и теплопроводности наблюдается неопределенность типа 0/0. И используем правило Лопиталья:

$$\begin{cases} U_{0,j}^{n+1} = C_1 U_{1,j}^n + C_2 U_{0,j+1}^n + C_3 U_{0,j-1}^{n+1} + C_4 M \\ V_{0,j}^{n+1} = C_1 V_{1,j}^n + C_2 V_{0,j+1}^n + C_3 V_{0,j-1}^{n+1} + C_4 M' \\ T_{0,j}^{n+1} = D_1 T_{1,j}^n + D_2 T_{0,j+1}^n + D_3 T_{0,j-1}^{n+1} \\ P_{0,j}^n = 0 \end{cases}$$

Где:

$C_1 = \frac{2v(\Delta z)^2}{C}$	$D_1 = \frac{2a(\Delta z)^2}{D}$
$C_2 = \frac{(v - V_{i,j}^n \Delta z)(\Delta r)^2}{C}$	$D_2 = \frac{(a - V_{i,j}^n \Delta z)(\Delta r)^2}{D}$
$C_3 = \frac{v(\Delta r)^2}{C}$	$D_3 = \frac{a(\Delta r)^2}{D}$
$C_4 = \frac{(\Delta r)^2(\Delta z)^2}{C}$	
$C = 2v((\Delta z)^2 + (\Delta r)^2) - (\Delta r)^2 \Delta z V_{i,j}^n$	
$D = 2a((\Delta z)^2 + (\Delta r)^2) - (\Delta r)^2 \Delta z V_{i,j}^n$	

Таблица 2. Коэффициенты.

На правой границе мы используем условие Неймана для уравнения теплопроводности. Для скоростей мы выбираем условие прилипания.

$$\begin{cases}
 U_{R,j}^n = 0 \\
 V_{R,j}^n = 0 \\
 T_{R,j}^{n+1} = \frac{1}{1 - B_1} (B_2 T_{R,j+1}^n + B_2 T_{R,j-1}^{n+1} + B_3 T_{R-1,j}^{n+1}) \\
 P_{R,j}^n = 0
 \end{cases} \quad (51)$$

Теперь, необходимо состыковать граничные условия на углах сетки.

Для верхнего левого угла:

$$\begin{cases}
 U_{0,h_0}^{n+1} = C_1 U_{1,h_0}^n + C_2 U_{0,h_0-1}^{n+1} + C_4 M \\
 V_{0,h_0}^{n+1} = C_1 V_{1,h_0}^n + C_2 V_{0,h_0-1}^{n+1} + C_4 M' \\
 T_{0,h_0}^{n+1} = \frac{1}{1 + D_2 \tilde{h}_2} (D_1 T_{1,h_0}^n + 2D_2 T_{0,h_0-1}^{n+1} + \frac{D}{2} \tilde{\tilde{h}}_2) \\
 P_{0,h_0}^n = 0
 \end{cases} \quad (52)$$

Для верхнего правого угла:

$$\begin{cases} U_{R,h_0}^n = 0 \\ V_{R,h_0}^n = 0 \\ T_{R,h_0}^{n+1} = \frac{1}{1 - B_1 + B_2 \tilde{h}_2} (B_2 (\tilde{h}_2 T_{R,h_0-1}^{n+1}) + B_3 T_{R-1,h_0}^{n+1}) \\ P_{R,h_0}^n = 0 \end{cases} \quad (53)$$

Для нижнего левого угла:

$$\begin{cases} U_{0,0}^n = 0 \\ V_{0,0}^n = 0 \\ T_{0,0}^{n+1} = \frac{1}{1 + D_2 \tilde{h}_1} (D_1 T_{1,0}^n + D_2 (2T_{0,1}^{n+1} + \tilde{h}_1 + \frac{h_1}{h_1} q)) \\ P_{0,0}^n = 0 \end{cases} \quad (54)$$

Для нижнего правого угла:

$$\begin{cases} U_{R,0}^n = 0 \\ V_{R,0}^n = 0 \\ T_{R,0}^{n+1} = \frac{1}{1 - B_1 + B_2 \tilde{h}_1} (2B_2 T_{R,1}^n + B_2 (\tilde{h}_1 + \frac{\tilde{h}_1}{h_1} q) + B_3 T_{R-1,0}^{n+1}) \\ P_{R,0}^n = 0 \end{cases} \quad (55)$$

Алгоритм.

1. Обозначаем переменные, задаем константы.
2. Определяем шаги по координатам и их соответствующие реальные размеры ($\Delta r, \Delta z, R, h, n$). (Также определяем число итераций.)
3. Записываем начальные и граничные условия, а также угловые точки:

1. Начальные:

$$u_{i,j}^0, v_{i,j}^0, T_{i,j}^0, P_{i,j}^0$$

2. граничные:

$$u_{0,j}^n, u_{R,j}^n, u_{i,0}^n, u_{i,h}^n, u_{0,0}^n, u_{0,h}^n, u_{R,h}^n, u_{R,0}^n$$

$$4. u_{i,j}^n = u_{i,j}^0, v_{i,j}^n = v_{i,j}^0, T_{i,j}^n = T_{j,k}^0, P_{i,j}^n = P_{i,j}^0$$

5. Начинаем решать систему уравнений по одному уравнению, начиная шагать из левого нижнего угла в верхний правый.

for n=1...N_{max}

for i=1...I and for j=1...J

1. Если переменная массива лежит на границе или является угловой точкой, то расчет будет следовать формулам граничных условий.
2. Иначе считать по общей формуле.

6. Проверка:

$$|u^{n+1} - u^n| \leq \varepsilon, |v^{n+1} - v^n| \leq \varepsilon, |T^{n+1} - T^n| \leq \varepsilon, |P^{n+1} - P^n| \leq \varepsilon$$

Если критерий не удовлетворен на итерации n , присваиваем $n = n + 1$ и возвращаемся в пункт 3, в противном случае выводим данные.

Анализ результатов

Результаты были обработаны в программном пакете Paraview. На рисунке ниже показаны поля скоростей различной толщины: 100 мкм, 200 мкм, 400 мкм, 600 мкм, 800 мкм.

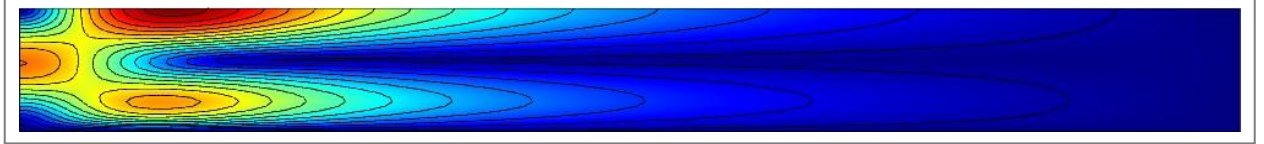


Рисунок 7. Поле скоростей. Толщина слоя 600 мкм.

Как можно заметить, максимальная скорость находится вблизи верхней и нижней границ, то есть у нас есть вихрь (Рисунок 8). В центральной же части и на правой границе скорости очень малы. Это обусловлено тем, что тепло распространяется по нижней границе неравномерно, поскольку источник слева.

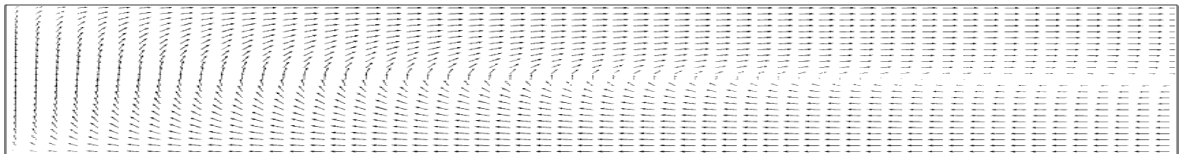
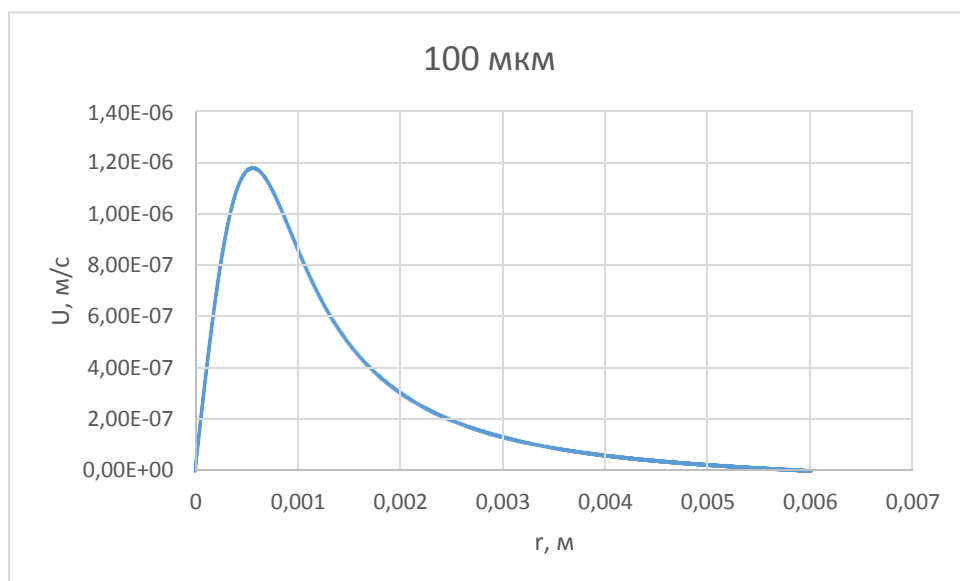
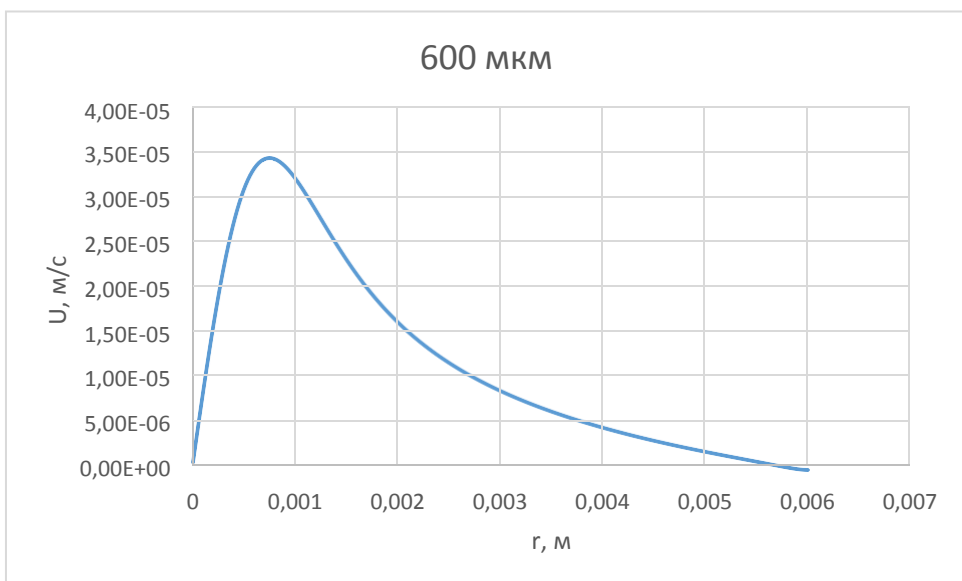
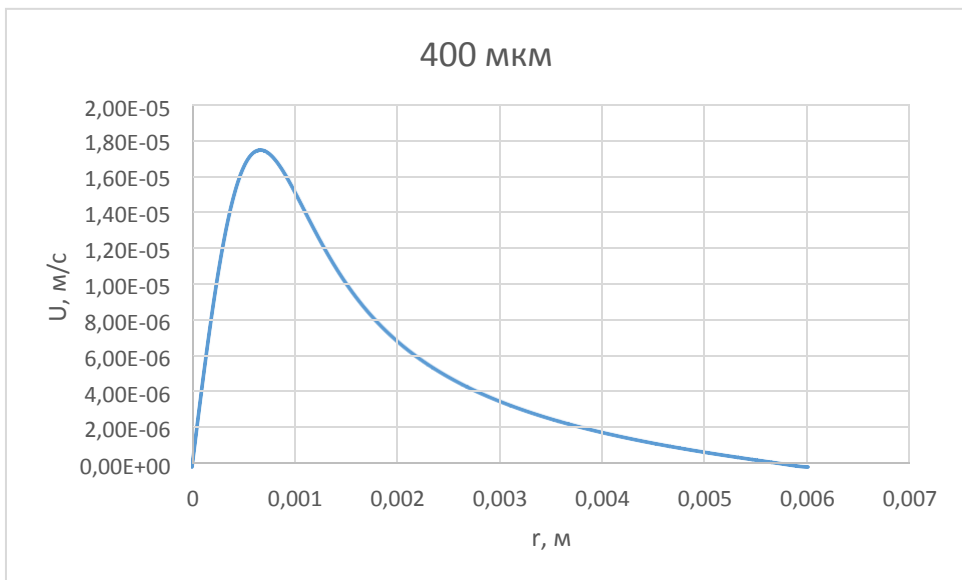
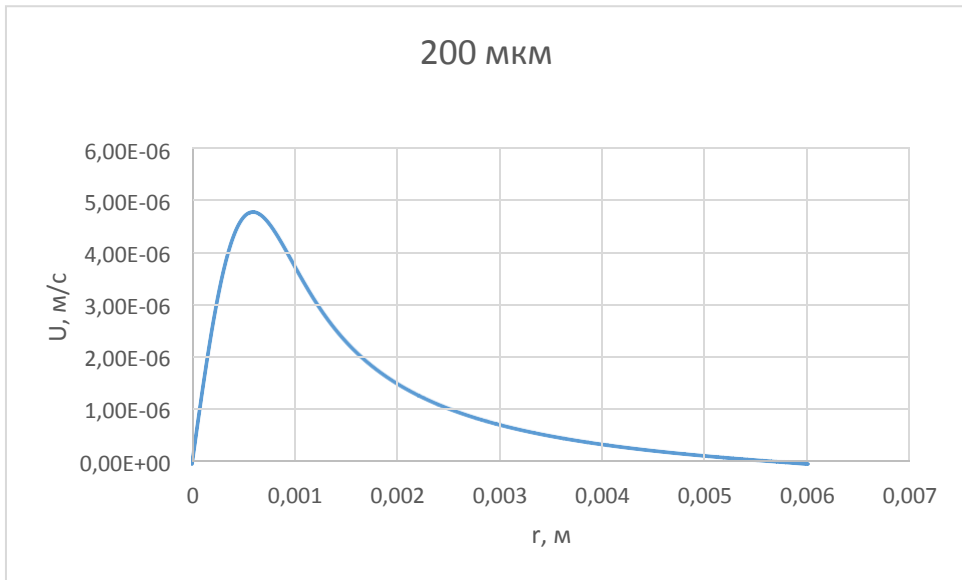


Рисунок 8. Векторное поле скоростей.

Построим графики зависимости скорости от координаты. Чтобы определить максимальную скорость будем строить $U(r)$ на нижней границе.





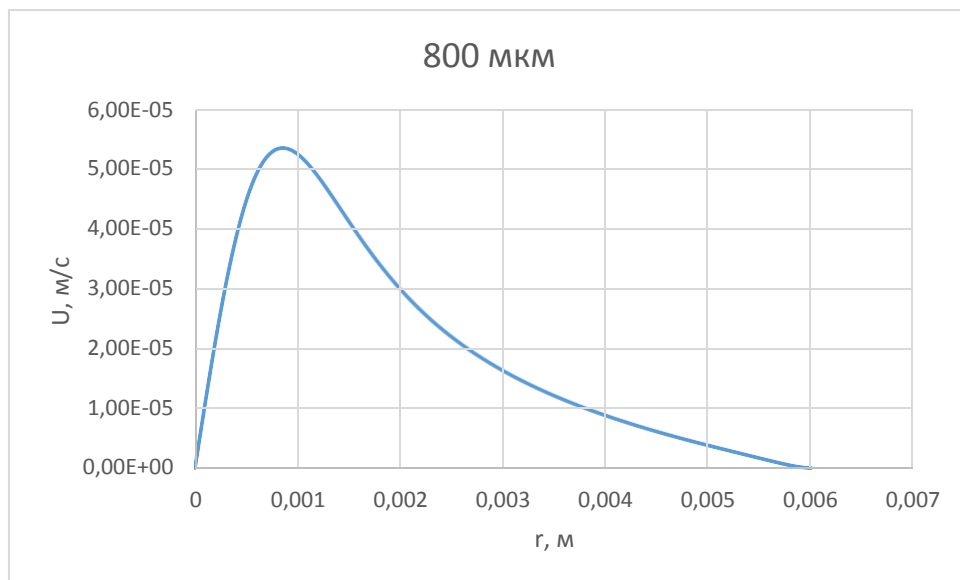


Рисунок 9. Графики зависимости скорости от координаты(r).

Толщина слоя	Максимальное значение скорости, м/с
100	$1.18 \cdot 10^{-6}$
200	$4.81 \cdot 10^{-6}$
400	$1.76 \cdot 10^{-5}$
600	$3.46 \cdot 10^{-5}$
800	$5.33 \cdot 10^{-5}$

Теперь можем получить зависимость скорости от толщины слоя жидкости. Мы имеем, что с увеличением слоя жидкости скорость увеличивается. (Рисунок 10.) Таким образом, чем толще слой воды, тем хуже условия для создания устойчивого капельного кластера. Также можно отметить, что при сильном уменьшении слоя жидкости, конвекция практически отсутствует, то есть при решении в очень тонком слое конвекцией можно пренебречь.

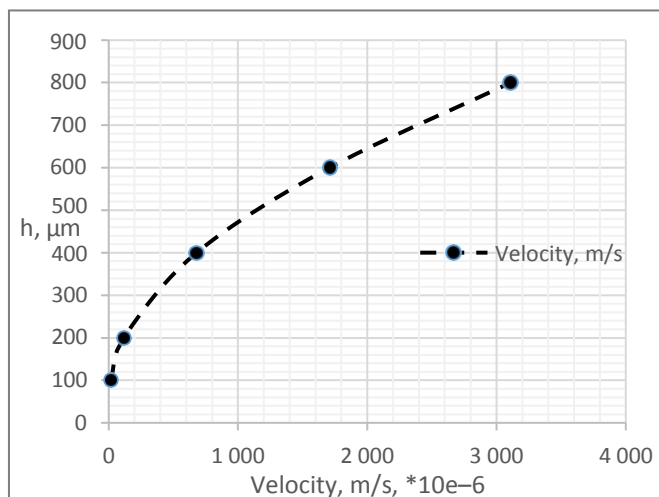
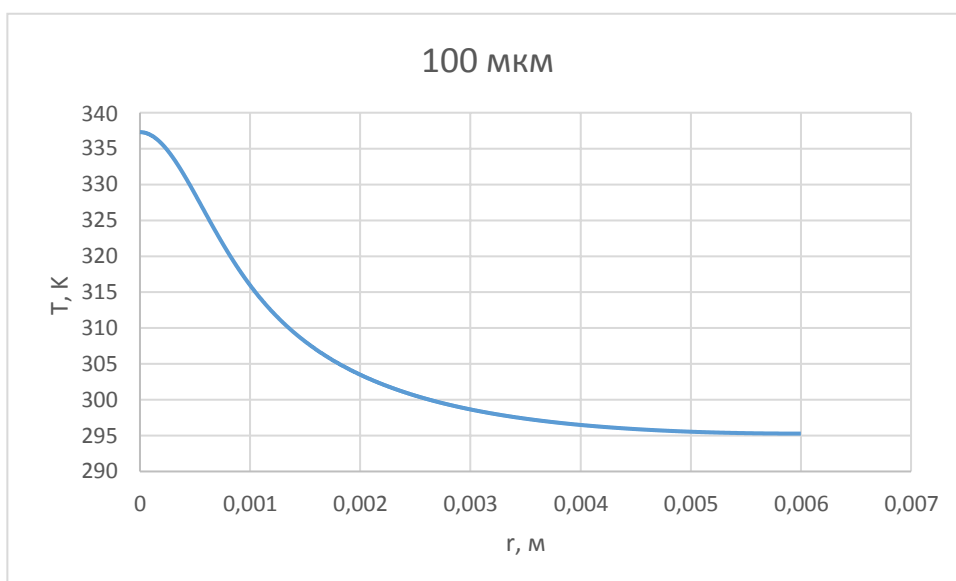
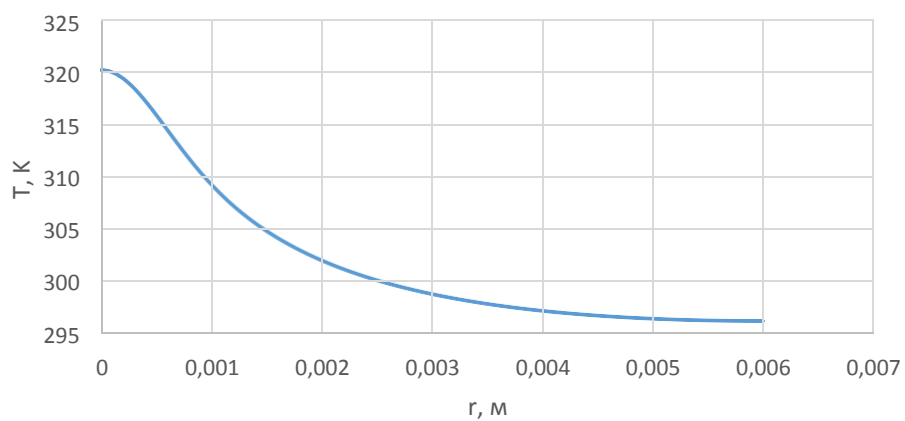


Рисунок 10. Зависимость скорости от толщины слоя воды.

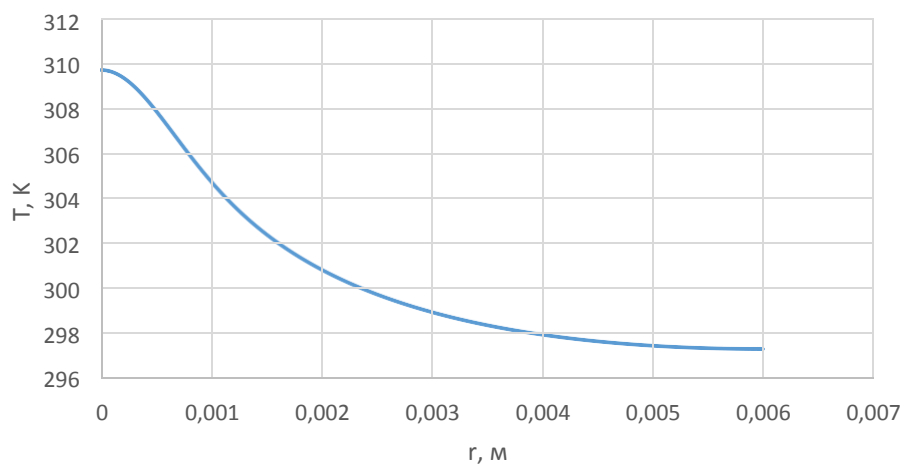
Ниже представлены графики температур на свободной поверхности, а также поле температур. В эксперименте ситалловая подложка нагревается лазером, затем тепло распространяется сквозь нее, но в нашей численной модели тепло распространяется сразу от нижней границы. Таким образом, изменение скорости потока оказывает влияние на распределение температуры в слое жидкости. С уменьшением скорости конвективный тепловой поток становится значительно меньше кондуктивного и температура начинает выравниваться.



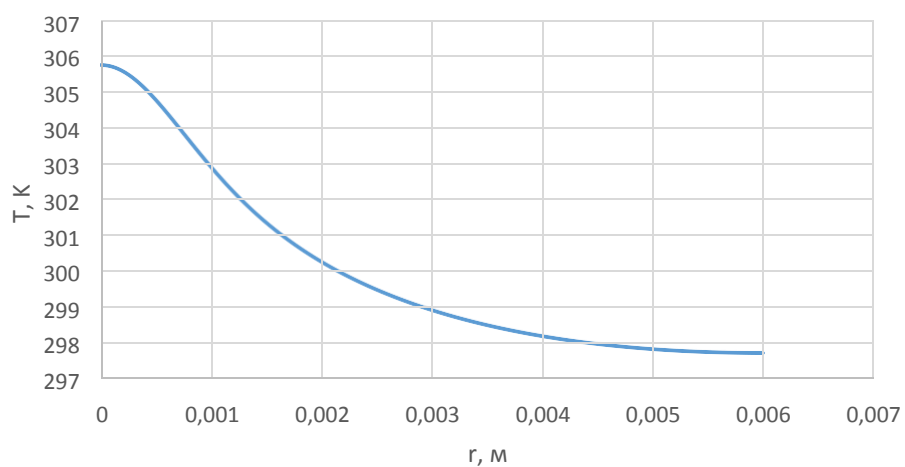
200 мкм



400 мкм



600 мкм



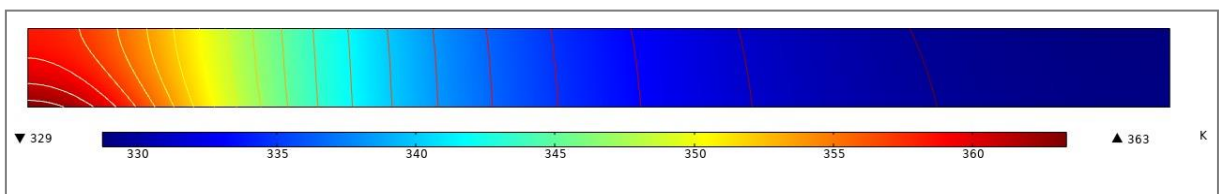
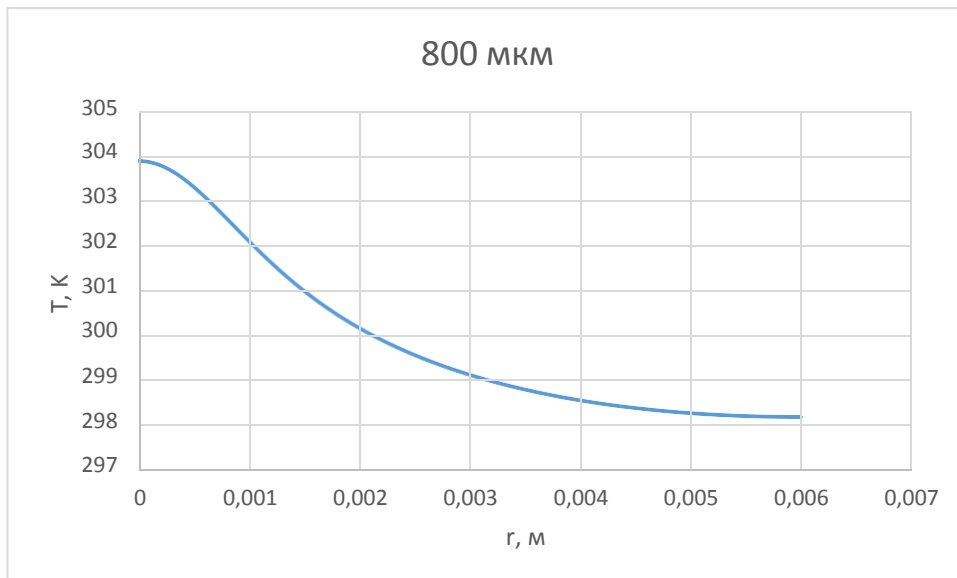
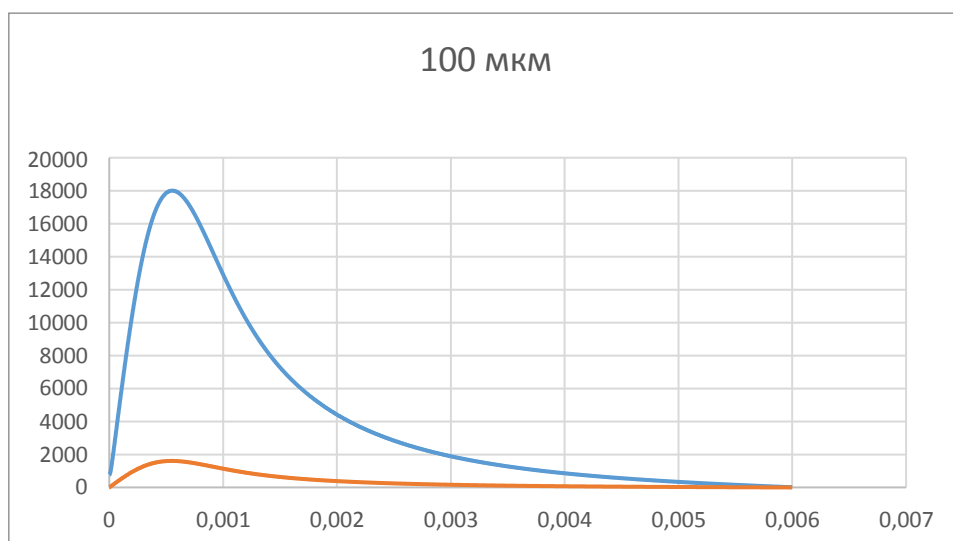
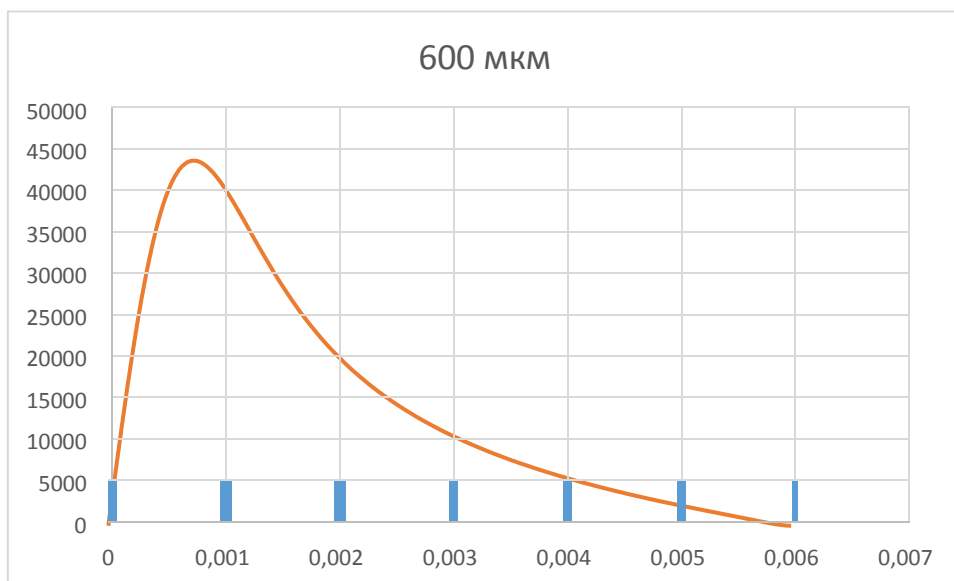
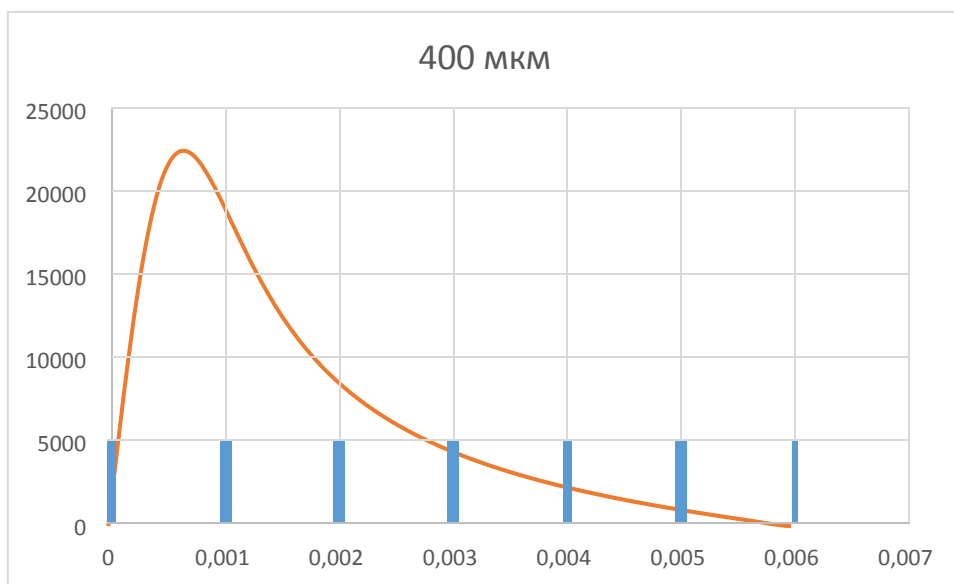
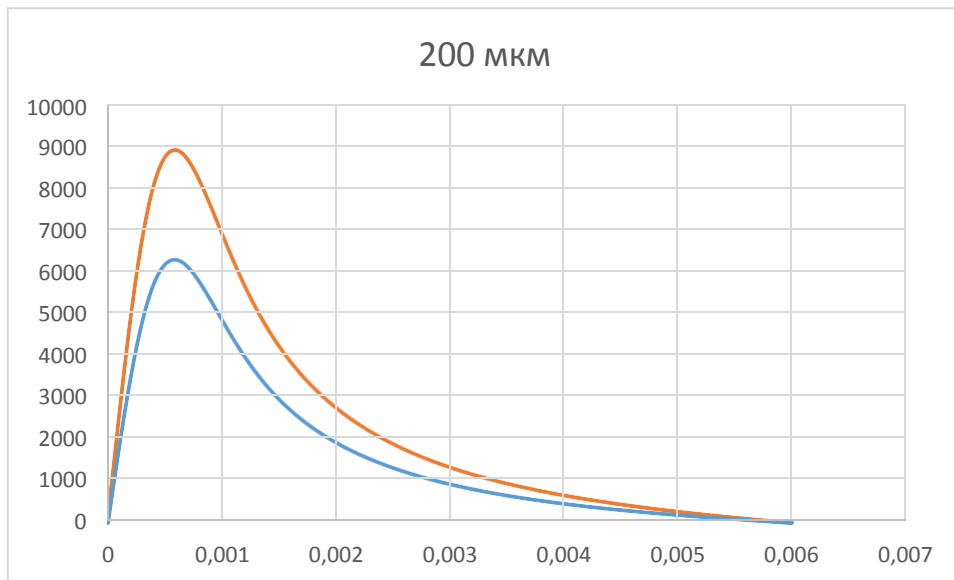


Рисунок 11. Распределение температуры на свободной поверхности. Поле температур.

Как можно заметить, чем тоньше слой, тем выше температура на верхней границе, то есть в малых слоях кондуктивные потоки превосходят конвективные. Построим графики зависимости конвективных и кондуктивных потоков на верхней границе. Поскольку плотность теплового потока при конвективном теплообмене рассчитывается по формуле:

$$q_{\text{тепл}} = q_{\text{конд}} + q_{\text{конв}} = -\lambda \text{grad}T + \rho v c_p T$$





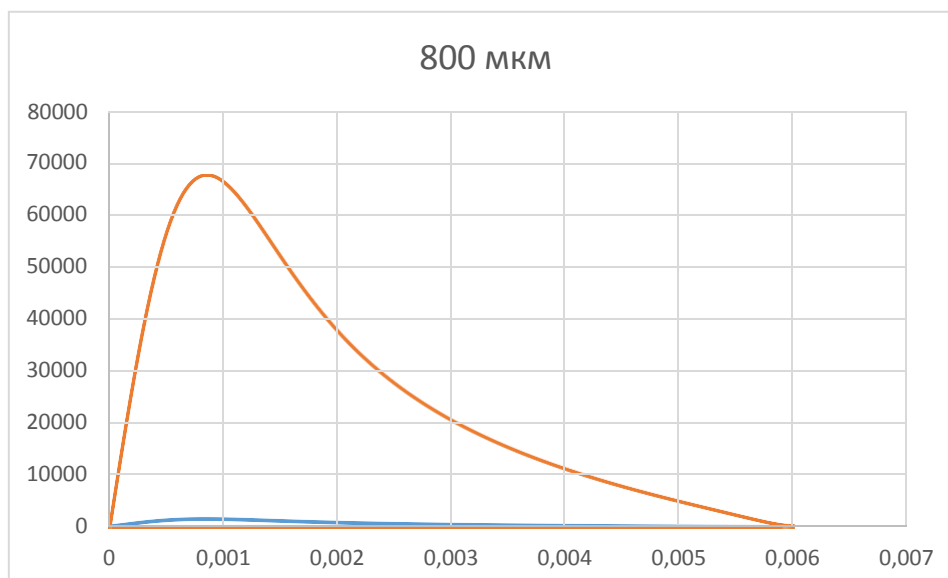


Рисунок 11. Распределение конвективных и кондуктивных потоком на свободной поверхности.

Также видно, что с увеличением толщины максимальное значение потока увеличивается, что тоже подтверждает нарушение условий стабилизации капельного кластера.

В нашем случае мы можем наблюдать преобладание конвекции на границах между стенкой ситалла и жидкостью, воздухом и жидкостью. В центральной части, где скорость меньше, чем на границах и в области с самой высокой температурой, преобладает конвективная составляющая.

Если потока нет, то заполненные области можно просто смоделировать как твердое тело или жидкость без конвективного члена. Также целесообразно моделировать жидкость как твердое тело в любой закрытой микромасштабной структуре.

Заключение

Таким образом, в рамках дипломной работы была построена математическая модель лазерного нагрева подложки основания тонким слоем воды в приближении Буссинеска, получены численные схемы для решения задачи методом Гаусса–Зейделя и представлены результаты программы, написанной в среде программирования C++, анализ результатов проведен в программном пакете OriginalLab. Показана зависимость скорости от толщины слоя жидкости и распределения кондуктивного и конвекционного потоков.

Таким образом, когда толщина слоя воды очень мала, мы сталкиваемся с возможностью того, что вязкое демпфирование превысит любые силы плавучести. Это соотношение вязких и плавучих сил характеризуется безразмерным числом Рэлея. Начало свободной конвекции может быть весьма различным в зависимости от граничных условий и геометрии. Что касается нашей задачи, то с увеличением слоя жидкости происходит нарушение условий стабилизации капельного кластера и, как следствие, приводит к его разрушению и, соответственно, к снижению диссипативных свойств системы, что делает применение капельного кластера невозможным.

Список литературы

1. Федорец А. А., Домбровский Л. А., Generation of levitating droplet clusters above the locally heated water surface: A thermal analysis of modified installation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2017.
2. Бекежанова В.Б., Гончаров О.Н., Analysis of the exact solution for the evaporative convection problem and properties of the characteristic perturbations. *International Journal of Thermal Sciences*, 2018.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика в 10 томах. Том 6. Гидродинамика. 2001.306 – 315.
4. Ермолаева Н. Н., Математическое моделирование нестационарных неизотермических процессов в движущихся многофазных полях, 2018.
5. N. Yanenko, *The Method of Fractional Steps*, Springer – Verlag, Heidelberg, 1971.
6. A.R. Mitchel, D.F. Griffiths, *The Finite–Difference Method in Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1980.
7. G.D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, third ed., Clarendon Press, Oxford, UK, 1986.
8. L.A. Dombrovsky, L.I. Zaichik, Yu.A. Zeigarnik, A.S. Sidorov, I.V. Derevich, *Thermophysical Processes Involved in the VVER Core Destruction and Corium Interaction with Reactor Vessel*, Preprint 2 – 431, Institute for High Temperatures, Moscow, 1999 (in Russian).
9. Gabyshev D.N., Fedorets A.A., Aktaev N.E., Klemm O., Andreev S.N. Acceleration of the condensational growth of water droplets in an external electric field., *Journal of Aerosol Science* – 2019. – V. 135. – P. 103–112.
10. Fedorets A.A., Bormashenko E., Dombrovsky L.A., Nosonovsky M. Droplet clusters: nature–inspired biological reactors and aerosols., *Philosophical Transactions of the Royal Society A* – 2019. – V. 377. – article no. 20190121, 13 pp.

11. Fedorets A.A., Dombrovsky L.A., Bormashenko E., Nosonovsky M. On relative contribution of electrostatic and aerodynamic effects to dynamics of a levitating droplet cluster., *International Journal of Heat and Mass Transfer* – 2019. – V. 133. – P. 712 – 717.
12. Bormashenko E., Frenkel M., Vilk A., Legchenkova I., Fedorets A.A., Aktaev N.E., Dombrovsky L.A. Characterization of Self-Assembled 2D Patterns with Voronoi Entropy., *Entropy* – 2018. – V. 20. – P. 956 – 968.
13. Fedorets A.A., Aktaev N.E., Dombrovsky L.A. Suppression of the condensational growth of droplets of a levitating cluster using the modulation of the laser heating power., *International Journal of Heat and Mass Transfer* – 2018. – V. 127 A. – P. 660 – 664.
14. Aktaev N.E., Fedorets A.A., Bormashenko E., Nosonovsky M. Langevin Approach to Modeling of Small Levitating Ordered Droplet Clusters., *Journal of Physical Chemistry Letters* – 2018. – V. 9. – P. 3834 – 3838.
15. Fedorets A.A., Frenkel M., Bormashenko E., Nosonovsky M. Small Levitating Ordered Droplet Clusters: Stability, Symmetry, and Voronoi Entropy., *Journal of Physical Chemistry Letters* – 2017. – V. 8. – P. 5599–5602.
16. Fedorets A.A., Frenkel M., Shulzinger E., Dombrovsky L.A., Bormashenko E., Nosonovsky M. Self-assembled levitating clusters of water droplets: Pattern-formation and stability., *Scientific Reports* – 2017. – V. 7. – article no. 1888, 6 pp.
17. Fedorets A.A., Dombrovsky L.A., Ryumin P.I. Expanding the temperature range for generation of droplet clusters over the locally heated water surface., *International Journal of Heat and Mass Transfer* – 2017. – V. 113. – P. 1054–1058.

18. Fedorets A.A., Dombrovsky L.A. Generation of levitating droplet clusters above the locally heated water surface: A thermal analysis of modified installation., *International Journal of Heat and Mass Transfer* – 2017. – V. 104. – P. 1268 – 1274.
19. Федорец А.А. Способ стабилизации размера микрокапель, образующих диссипативную структуру «Капельный кластер» – № 2015110381/28; Заявл. 23.03.2015., *Изобретения. Полезные модели.* – 2016. – Бюл. № 10. – 3 с.
20. Cheverda V.V., Fedorets A.A., Marchuk I.V., Kabov O.A. Thermocapillary deformation of a water layer at local heating., *Thermophysics and Aeromechanics* – 2016. – V. 23, No. 2. – P. 231 – 236.
21. Федорец А.А., Домбровский Л.А., Медведев Д.Н. Влияние инфракрасного облучения на подавление конденсационного роста капель воды в левитирующем капельном кластере., *Письма в ЖЭТФ* – 2015. – Т. 102. № 7. – С. 507 – 510.

Приложение 1. Программный код

Основная часть кода представлена ниже:

```
% Плотность потока лазера
for i=1:M
    q(i)=(W/(pi*(rb+3.66*10^(-4))^2)*exp((-2*(dr*i)^2)/(rb+3.66*10^(-4))^2))/100;
end

% Задаем начальные приближения
for j=1:N
    for i=1:M
        T_n(i,j)=T_0;
        u_n(i,j)=0;
        v_n(i,j)=0;
        p_n(i,j)=0;
        T(i,j)=T_n(i,j);
        u(i,j)=u_n(i,j);
        v(i,j)=v_n(i,j);
        p(i,j)=p_n(i,j);
    end
end

k=0;
while (k<10)
    for j=1:N
        for i=1:M
            r=dr*(i-1);
            z=dz*(j-1);

            A(i,j)=nu*(dr*dz^2+2*r*(dr^2+dz^2))-
            r*dr*dz*(u_n(i,j)*dz+v_n(i,j)*dr);
            A1(i,j)=dz^2/A(i,j)*(nu*(dr+r)-u_n(i,j)*r*dr);
            A2(i,j)=r*dr^2/A(i,j)*(nu-v_n(i,j)*dz);
            A3(i,j)=nu*r*dz^2/A(i,j);
            A4(i,j)=nu*r*dr^2/A(i,j);
            A5(i,j)=r*dr^2*dz^2/A(i,j);

            B(i,j)=a*(dr*dz^2+2*r*(dr^2+dz^2))-
            r*dr*dz*(u_n(i,j)*dz+v_n(i,j)*dr);
            B1(i,j)=dz^2/B(i,j)*(a*(dr+r)-u_n(i,j)*r*dr);
            B2(i,j)=r*dr^2/B(i,j)*(a-v_n(i,j)*dz);
            B3(i,j)=a*r*dz^2/B(i,j);
            B4(i,j)=a*r*dr^2/B(i,j);

            C(i,j)=2*nu*(dr^2+dz^2)-dr^2*dz*v_n(i,j);
            C1(i,j)=2*nu*dz^2/C(i,j); C2(i,j)=(nu-
            v_n(i,j)*dz)*dr^2/C(i,j);
            C3(i,j)=nu*dr^2/C(i,j);
            C4(i,j)=dr^2*dz^2/C(i,j);

            D(i,j)=2*a*(dr^2+dz^2)-dr^2*dz*v_n(i,j);
            D1(i,j)=2*a*dz^2/D(i,j); D2(i,j)=(a-
            v_n(i,j)*dz)*dr^2/D(i,j); D3(i,j)=a*dr^2/D(i,j);
```

```

% Низ
if j==1
    % Нижний левый угол
    if i==1
T(i,j)=(1/(1+D2(i,j)*H1)*(D1(i,j)*T_n(i+1,j)+D2(i,j)*(2*T_n(i,j+1)+H1*T_0+H
1*q(i)/h1)));
        u(i,j)=0;
        v(i,j)=0;
    else
        % Центр
        if (i>1)&&(i<M)
T(i,j)=1/(1+B2(i,j)*H1)*(B1(i,j)*T_n(i+1,j)+2*B3(i,j)*T(i-
1,j)+B2(i,j)*(2*T_n(i,j+1)+H1*(T_0+q(i)/h1)));
            u(i,j)=0;
            v(i,j)=0;
        else
            % Нижний правый угол
            T(i,j)=1/(1-B1(i,j)+B2(i,j)*H1)*(B3(i,j)*T(i-
1,j)+B2(i,j)*(2*T_n(i,j+1)+H1*(T_0+q(i)/h1)));
            u(i,j)=0;
            v(i,j)=0;
        end
    end
end

if (j>1)&&(j<N)

    %Левое
    if i==1
        T(i,j)=D1(i,j)*T_n(i+1,j)+D2(i,j)*T_n(i,j+1)+D3(i,j)*T(i,j-
1);
        u(i,j)=C1(i,j)*u_n(i+1,j)+C2(i,j)*u_n(i,j+1)+C3(i,j)*u(i,j-
1)+C4(i,j)*(-1/ro0*(p_n(i+1,j)-p(i,j))/dr);
        v(i,j)=C1(i,j)*v_n(i+1,j)+C2(i,j)*v_n(i,j+1)+C3(i,j)*v(i,j-
1)+C4(i,j)*((-1/ro0*(p_n(i,j+1)-p(i,j))/dz)-g);
    else
        %Основные уравнения
        if (i>1)&&(i<M)
            T(i,j)=B1(i,j)*T_n(i+1,j)+B3(i,j)*T(i-
1,j)+B2(i,j)*T_n(i,j+1)+B4(i,j)*T(i,j-1);
            u(i,j)=A1(i,j)*u_n(i+1,j)+A3(i,j)*u(i-
1,j)+A2(i,j)*u_n(i,j+1)+A4(i,j)*u(i,j-1)+A5(i,j)*(-1/ro0*(p_n(i+1,j)-
p(i,j))/dr);
            v(i,j)=A1(i,j)*v_n(i+1,j)+A3(i,j)*v(i-
1,j)+A2(i,j)*v_n(i,j+1)+A4(i,j)*v(i,j-1)+A5(i,j)*((-1/ro0*(p_n(i,j+1)-
p(i,j))/dz)-g);
        else
            %Правое T(i,j)=1/(1-
            B1(i,j))*(B3(i,j)*T(i-
1,j)+B2(i,j)*(T_n(i,j+1)+T(i,j-1)));
            u(i,j)=0;
            v(i,j)=0;
        end
    end
end

%Верх

```

```

        if j==N
            %Верхний левый угол
            if i==1

T(i,j)=1/(1+D2(i,j)*H2)*(D1(i,j)*T_n(i+1,j)+D2(i,j)*(2*T(i,j-1)+H2*T_0));
                u(i,j)=C1(i,j)*u_n(i+1,j)+C2(i,j)*(-
sigma_T*dz/(ro0*nu*dz)*(T_n(i+1,j)-T(i,j)))+C3(i,j)*u(i,j-1)+C4(i,j)*(-
1/ro0*(p_n(i+1,j)-p(i,j))/dr);
                v(i,j)=C1(i,j)*v_n(i+1,j)+C2(i,j)*(-
sigma_T*dz/(ro0*nu*dz)*(T_n(i+1,j)-T(i,j)))+C3(i,j)*v(i,j-1)+C4(i,j)*((-
1/ro0*(p_n(i,j)-p(i,j-1))/dz)-g);
            else
                %Центр
                if (i>1)&&(i<M)

T(i,j)=1/(1+H2*B2(i,j))*(B1(i,j)*T_n(i+1,j)+B3(i,j)*T(i-
1,j)+B2(i,j)*(2*T(i,j-1)+H2*T_0));
                u(i,j)=A1(i,j)*u_n(i+1,j)+A3(i,j)*u(i-
1,j)+A4(i,j)*u(i,j-1)+A2(i,j)*(-sigma_T*dz)/(ro0*nu*dr)*(T_n(i+1,j)-
T(i,j))+A5(i,j)*(-1/ro0*(p_n(i+1,j)-p(i,j))/dr);
                v(i,j)=A1(i,j)*v_n(i+1,j)+A3(i,j)*v(i-
1,j)+A4(i,j)*v(i,j-1)+A2(i,j)*(-sigma_T*dz)/(ro0*nu*dr)*(T_n(i+1,j)-
T(i,j))+A5(i,j)*((-1/ro0*(p_n(i,j)-p(i,j-1))/dz)-g);
            else
                %Верхний правый угол
                T(i,j)=1/(1-B1(i,j)+B2(i,j)*H2)*(B3(i,j)*T(i-
1,j)+B2(i,j)*(T(i,j-1)+H2*T_0));
                u(i,j)=0;
                v(i,j)=0;
            end
        end
        end
        p(i,j)=ro0*(u(i,j)^2+v(i,j)^2)/2;
    end
end

for j=1:N
    for i=1:M
        u_n(i,j)=u(i,j);
        v_n(i,j)=v(i,j);
        T_n(i,j)=T(i,j);
        p_n(i,j)=p(i,j);
    end
end

k=k+1;
end

```