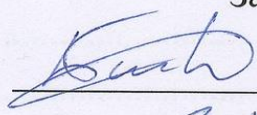


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
Кафедра фундаментальной математики и механики

РЕКОМЕНДОВАНО К ЗАЩИТЕ
В ГЭК И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ
ЗАИМСТВОВАНИЯ

Заведующий кафедрой
к.ф.-м.н.


Басинский К.Ю.
2019 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(магистерская диссертация)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТЕРИЕВ КЛАССИФИКАЦИИ ТЯЖЁЛОЙ НЕФТИ

01.04.01 Математика

Магистерская программа «Вычислительная механика»

Выполнила работу
Студентка 2 курса,
№ 22Мм 171-М группы
очной формы обучения



Молоток
Анастасия
Алексеевна

Научный руководитель
К.ф.-м.н., доцент



Шевелёв
Александр
Павлович

Рецензент
Главный специалист
ООО «ТюменьНИИпроект»



Киселев
Данила
Алексеевич

г. Тюмень, 2019

Оглавление

Введение.....	3
Глава 1. Математическая модель.....	5
Глава 2. Аналитическое решение.	8
2.1 Построение решения Бакли-Левретта.....	8
2.2 Решение уравнения Бакли-Левретта	13
2.2.1 Условия на скачке насыщенности.....	17
Глава 3. Численное решение.	21
3.1 Описание метода вычислений	24
Результаты.....	27
Заключение	28
Список литературы	29

Введение

Мы знаем, что нефть — это чёрное золото, но это понятие вводит нас в заблуждение. В зависимости от регионов добычи, нефть имеет свои определённые свойства и цвет: зелёная, оранжевая, прозрачная, красная, чёрная (тягучая), жёлтая. Но все эти разноцветные нефти с их сотнями разных компонентов ещё недавно кое-что тем не менее роднило.

Добыча таких видов нефти становится всё сложнее и сложнее. Всё реже и реже встречаются выходы нефти на поверхность, даже в такой республике как Татарстан. Я не веду к тому, что нефть в целом заканчивается, просто её становится тяжело добывать. Вопрос времени, когда же и на новых месторождениях, добыча нефти станет нелёгкой.

Скорее всего, мы не застанем бьющий из-под земли фонтан нефти, как это было в самом начале её появления в нашей жизни. Возможно, в ближайшем будущем, основным способом добычи тяжёлой нефти, будет добыча её в шахте, которая отличается от обычной, на сегодняшний день добычи.

Доходит и до того, что учёные-инженеры, занимающиеся нефтью, рассматривают идею о неорганическом происхождении нефти. Они предлагают синтезировать её из древесной и других растительных отходов. Например, древесные опилки превратить в топливо. И эта идея увенчалась успехом, но главная трудность, с которой они столкнулись стало то, что такое топливо стоит намного дороже, чем обычная добываемая нефть. И стоит ли задуматься о замене чёрного золота? Если так задуматься, то нефтяная вышка добывает около 350 тонн нефти, а за год это будет порядком 3 миллионов тонн нефти и это при эксплуатации 8 скважин.

Действительно эра легкой нефти заканчивается, и приходится, разрабатывать новые технологии не только для добычи трудноизвлекаемой нефти, но и для извлечения сверхтяжелой (битумной нефти). И добыча тяжелой нефти требует новых технологий, более затратных.

Прошло то время, когда мы «нефть черпали вёдрами». Нефть добывается с большими затратами, она лежит на больших глубинах, в труднодоступных районах. Поэтому для освоения этих месторождений нужны новые технологии или, а может и, новое оборудование, тем более новые материалы и разные сплавы.

Необходимость решения проблем совершенствования методов заводнения, изыскания и применения новых высокоэффективных вытесняющих агентов, рациональной разработки нефтегазоконденсатных залежей и залежей летучих нефти, ставит новые газогидродинамические задачи, связанные с прогнозированием показателей разработки месторождений в этих условиях. Запасы легкой нефти постепенно истощаются и ей на смену приходит высоковязкая нефть, обладающая повышенной плотностью, которая вследствие своих физических свойств не может быть извлечена на поверхность традиционными способами. Иначе говоря «тяжелая нефть».

По сути, тяжёлая нефть — это разновидность сырой нефти (полуфабрикат), которую нужно довести до товарного вида, то есть обработать и очистить. Она содержит в себе очень крупные молекулы серы и различных металлов. Для того чтобы добыть такую нефть и обеспечить течение горючей жидкости по трубопроводу или поступления её в скважину, нужно её растворить или нагреть.

Глава 1. Математическая модель.

Закон Дарси для нашего случая будет переписан для каждой фазы в обобщённом виде, в дифференциальной форме:

$$\overrightarrow{w}_B = \frac{Q_B}{\omega} = -k \frac{k_B(s) \partial(p_H - p_C)}{\eta_B \partial x} \quad (1.1)$$

$$\overrightarrow{w}_H = \frac{Q_H}{\omega} = -k \frac{k_H(s) \partial(p_H)}{\eta_H \partial x}$$

При оценке расчётов можно использовать самые простые значения корреляции:

$$k_B = s^2 \quad \text{и} \quad k_H = (1 - s)^2$$

Для рассматриваемого случая двухфазной фильтрации водонасыщенности связано с нефтенасыщенностью следующим соотношением:

$$s_B + s_H = 1 \quad (1.2)$$

Разность давлений в двух фазах $p_H - p_B$ равна капиллярному p_C давлению, которое считается известной экспериментальной функцией насыщенности, то есть:

$$p_H - p_B = p_C(s) = \alpha_n \cos(\theta) \sqrt{\frac{m}{k}} J(s)$$

Для того чтобы получить уравнение неразрывности рассмотрим баланс каждой фазы, применительно к закреплённому элементарному макро-объёму $\Delta V = \omega \Delta x$ включающий в себя обе жидкости. Если количество жидкости, вытекающей за некоторое время больше, чем количество жидкости вытекающей, то жидкость должна накапливаться в объёме, тем самым

увеличивая её концентрацию (и наоборот). Основываясь на этом, сформулируем закон сохранения массы каждой из жидкостей.

Для воды находим закон изменения массы вдоль оси x , которая направлена в сторону течения, учитывая, что плотность воды постоянна по условию о несжимаемости. Через сечение x за некоторое время Δt втекает в некоторый объём ΔV массой воды $\rho_B \omega w_B(x, t) \Delta t$, а через сечение $(x + \Delta x)$ вытекает вода $\rho_B \omega w_B(x + \Delta x, t) \Delta t$, следовательно изменение массы воды в некотором ΔV за некоторое время Δt :

$$\rho_B (w_B(x, t) - w_B(x + \Delta x, t)) \Delta t \frac{\Delta V}{\Delta x} \quad (1.3)$$

где $\frac{\Delta V}{\Delta x} \approx \omega$

Это изменение массы должно быть уравнено с помощью водонасыщенности в объёме пор $m \Delta V$.

$$m \rho_B (s(x, t + \Delta t) - s(x, t)) \Delta V \quad (1.4)$$

Совершим некоторые преобразования над последними двумя формулами (1.3), (1.4). Приравняем их между собой, потом разделим на $\Delta V \Delta t$ и переходим к пределу $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$ и в результате:

$$-\text{div } w_B \rho_B = \frac{\partial m s \rho_B}{\partial t} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho_B m s}{\partial t} + \text{div } w_B \rho_B = 0 \quad (1.5)$$

где m - коэффициент пористости определяется как отношение объёма, занимаемое порами к общему объёму $m = \frac{V_n}{V}$.

Таким же путём выводим уравнение для нефти:

$$\frac{\partial m (s_H) \rho_H}{\partial t} + \text{div } w_H \rho_H = 0 \quad (1.6)$$

которое из (1.2) можно представить в виде

$$\frac{\partial m (1-s) \rho_H}{\partial t} + \text{div } w_H \rho_H = 0 \quad (1.7)$$

Вывод: Уравнения неразрывности для воды

$$\frac{\partial \rho_B m s}{\partial t} + \operatorname{div} w_B \rho_B = 0$$

и для нефти

$$\frac{\partial m(1-s) \rho_H}{\partial t} + \operatorname{div} w_H \rho_H = 0$$

Обобщённый закон Дарси для воды

$$\vec{w}_B = \frac{Q_B}{\omega} = -k \frac{k_B(s) \partial(p_H - p_C)}{\eta_B \partial x}$$

для нефти

$$\vec{w}_H = \frac{Q_H}{\omega} = -k \frac{k_H(s) \partial(p_H)}{\eta_H \partial x}$$

капиллярное давление,

$$p_c(s) = \alpha_n \cos(\theta) \sqrt{\frac{m}{k}} J(s)$$

относительной фазовой проницаемости воды

$$k_B = s^2$$

и нефти

$$k_H = (1 - s)^2$$

начальные и граничные условия,

при $t=0$ $s(x,0)=\varphi(x)$, $x>0$;

при $x=0$ $s(0,t)=\psi(t)$, $t>0$;

представляют собой математическую постановку задачи.

Глава 2. Аналитическое решение.

2.1 Построение решения Бакли-Левретта.

Давления водяной и нефтяной фазы будут одинаковыми при предположении, что капиллярное давление мало. Фазы воды и нефти несжимаемы, и температура не изменяется.

Сложив два уравнения (1.7) и (1.5) для двух жидкостей получим

$$\frac{\partial}{\partial x}(w_H + w_B) = 0 \quad (2.1)$$

Из чего находим первый интеграл:

$$w_H + w_B = w(t)$$

$$\text{или} \quad (2.2)$$

$$Q_H + Q_B = Q(t)$$

Из формул (2.1) или (2.2) видно, что суммарная скорость двухфазного потока (и суммарный расход фаз $Q(t)$) не зависит от координаты x , а следовательно, Q является постоянной величиной, либо известной функцией времени. Следствие предположения о несжимаемости фазы.

Уравнение (1.1), (1.7), (1.5) или (1.8) полностью описывают процесс вытеснения и позволяют полностью определить неизвестные функций $s(x,t)$, $w_B(x,t)$, $w_H(x,t)$ и $p(x,t)$. Исключив другие зависимые переменные можно получить уравнение, которое имеет только водонасыщенность s .

Убрав градиент давления с уравнения (1.1) $\frac{\partial p}{\partial x}$, поделив одно уравнение на другое, почтенно получим:

$$\frac{w_B}{w_H} = \frac{Q_B}{Q_H} = \frac{k_B(s)}{\eta_0 k_H(s)} \quad (2.3)$$

Где введено новое обозначение $\eta_0 = \frac{\eta_B}{\eta_H}$.

Применив к выражению (2.3) правило производных пропорций и применив (2.2), получим:

$$\frac{w_B}{w(t)} = \frac{Q_B}{Q(t)} = \frac{k_B(s)}{k_B(s) + \eta_0 k_H(s)} \quad (2.4)$$

Обозначим левую часть через $f(s)$.

$$f(s) = \frac{k_B(s)}{k_B(s) + \eta_0 k_H(s)} \quad (2.5)$$

Теперь из выражения (2.4) найдём значения скоростей фильтраций нефти и воды.

$$w_B = f(s)w(t) \text{ и } w_H = [1 - f(s)]w(t) \quad (2.6)$$

Введённая $f(s)$ функция насыщенности, называется функцией распределения потоков фаз либо функцией Бакли-Левретта и имеет простой физический смысл. Из выражения (2.6) видно, что $f(s)$, представляет отношение скорости течения (или расхода) вытесняющей жидкости (воды) к суммарной скорости w (расхода Q), равна объёмной доле воды в суммарном потоке двух жидкостей. Функция $f(s)$ важна при гидродинамических расчётах двухфазных течениях, определяет полноту вытеснения и характер распределения насыщенности по пласту. Задачи нефтеконденсатоотдачи и газоконденсат отдачи в большинстве своём приводит к таким воздействиям на пористую среду, которое приводит к тому, что функция $f(s)$ изменяется в сторону увеличения полноты вытеснения.

Из (2.5) видим, как функция $f(s)$ полностью определяется относительными фазовыми проницаемостями. На рисунке приведён график функции $f(s)$ и производная от него. С увеличением насыщенности воды функция $f(s)$ плавно увеличивается от 0 до 1. Выделяющаяся особенность графика функций $f(s)$ наличие точки перегиба Π с насыщенностью s_{Π} областей выпуклости и вогнутости, где вторая производная от $f(s)$ больше и меньше 0. Это свойство функций в основном определяет специфику задач фильтраций

вытеснения в рамках модели Бакли-Левретта (в отличие, например, от задач распространения ударных волн в газовой динамике). График функций $f(s)$ производной от неё для различных коэффициентов вязкости жидкостей

$\eta_0 = \frac{\eta_B}{\eta_H}$ показано на рисунке.

Подставив выражение (2.6) для w_B в (1.5) получим следующее:

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + w(t) \frac{\partial f(s)}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

Так как насыщенность зависит от двух переменных $s=s(x,t)$, то применяя правило дифференцирования сложной функций к слагаемому $\frac{\partial f[s(x,t)]}{\partial t}$, что позволяет сделать следующее:

$$\frac{\partial f(s)}{\partial x} = \frac{\partial f(s)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = f'(s) \frac{\partial s}{\partial x} \quad (2.8)$$

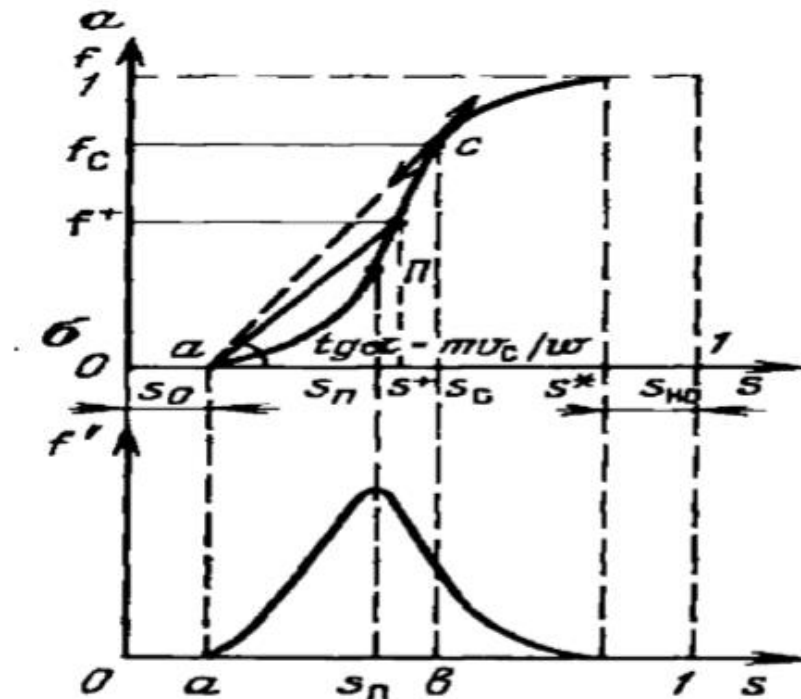


Рисунок 1 Зависимость объёмной доли вытесняющей фазы (в данном случае воды) в потоке f (а) и ее производной (б) от насыщенности.

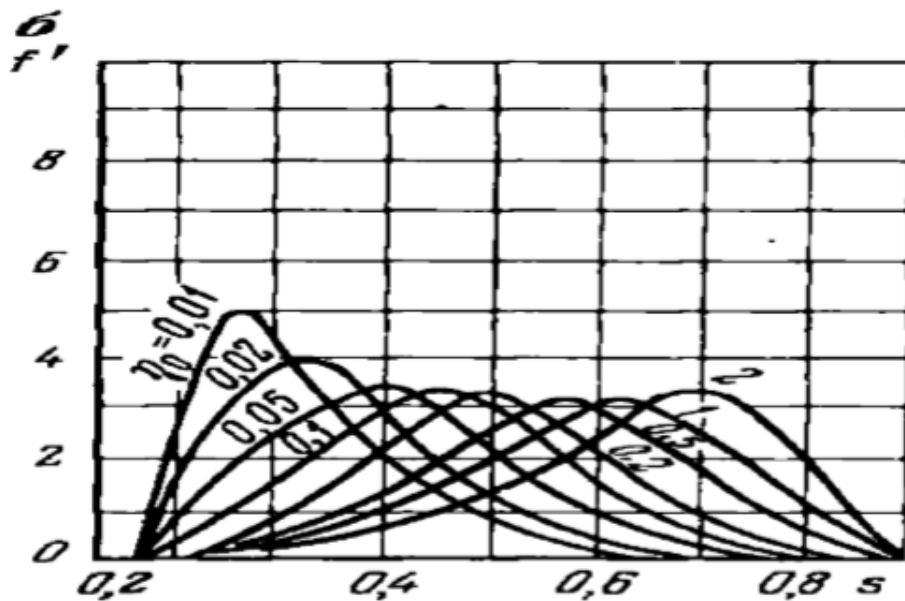
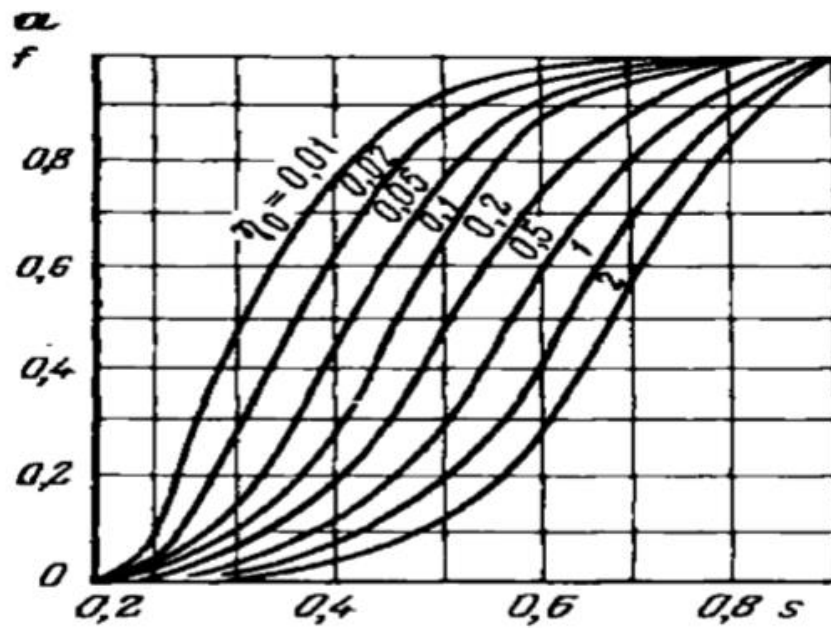


Рисунок 2 Вид функции Бакли-Лeverетта и производной при различных соотношениях $\eta_0 = \frac{\eta_B}{\eta_H}$

Приведём окончание выражения (2.7) к виду:

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + w(t) f'(s) \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (2.9)$$

Которое есть дифференциальное уравнение только для насыщенности. Изменение насыщенности с изменением времени по пористой среде получается в следствии решений (2.9) независимого от распределения давления $p(x, t)$. Это уравнение известно, как уравнение Бакли-Леверетта по имени исследователей, которые впервые получили его.

Для того чтобы найти распределение насыщенности к уравнению Бакли-Леверетта нужно добавить начальные и граничные условия:

$$\text{при } t = 0 \quad s = (x, 0) = \varphi(x), \quad x > 0;$$

Которое означает, что в момент времени $t=0$ (до начала вытеснения) в пласте находится некоторое начальное, известное значение насыщенности s вытесняющей жидкости (воды), определяющейся функцией $\varphi(x)$.

$$\text{при } x = 0 \quad s(0, t) = \psi(t), \quad t > 0;$$

Это условие обозначает, что при $t > 0$ в пористую среду через нагнетательную скважину, находящейся на «линии» $x=0$, заканчивается вытесняющая жидкость (вода), насыщенность которой при $x=0$ меняется с течением времени по определяющему закону $\psi(t)$. В некоторых случаях можно положить, что

$$\varphi(x) = s_0 = \text{const} \quad \text{при } t = 0;$$

$$\psi(t) = s_0 = \text{const} \quad \text{при } x = 0;$$

Это случай кусочнопостоянных начальных данных, имеющий важное значение для практических приложений. Значение начальной водонасыщенности s_0 имеет влияние на процесс заводнения, а также определяет структуру области вытеснения.

В дальнейшем будем для простоты суммарную скорость фильтраций $w(t)$ (суммарный расход Q) считать постоянной.

2.2 Решение уравнения Бакли-Левретта

В процессе закачки вытесняющей жидкости в пористую среду её насыщенность будет, меняться с течением времени по направлению движения по x . Связь между величинами t, s, x можно представить в фундаментальной форме $s = s(x, t)$ или же в другой равнозначной форме

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x} dx + \frac{\partial s}{\partial t} dt \quad (2.10)$$

Рассмотрим на плоскости (x, t) такие линии $x(t)$, вдоль которых значение насыщенности принимает постоянное заданное значение. Они называются изосатами (с англ.-насыщенность, то есть где насыщенность постоянна). и это означает, что для любого постоянного заданного значения можно составить связь между переменными x, t которое будет соответствовать уравнению $s = s(x, t) = \text{const}$ или же в другой равнозначной дифференциальной форме.

$$\frac{\partial s}{\partial x} dx + \frac{\partial s}{\partial t} dt = 0$$

линия распространения заданной насыщенности (связь между x и t при фиксированном s), получаются совместным решением (2.9) и (2.10) при значениях $ds = 0$.

$$\frac{\partial s}{\partial x} dx + \frac{\partial s}{\partial t} dt = 0$$

(2.11)

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + w(t) f'(s) \frac{\partial s}{\partial x} = 0$$

Решение данных уравнений (2.11) даст нам связь между x, t в дифференциальной форме.

Для того чтобы система однородных, линейных уравнений (2.11) относительно $\frac{\partial s}{\partial t}$ и $\frac{\partial s}{\partial x}$ имела не нулевое решение, то есть не тривиальное, нужно чтоб определитель равнялся 0:

$$\begin{vmatrix} m & wf'(s) \\ dt & dx \end{vmatrix} = 0$$

Откуда мы можем найти:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{w}{m} f'(s) \quad (2.12)$$

Мы находим значение производной $\frac{\partial x}{\partial t}$ при постоянной насыщенности s , то есть $\frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_s$.

Точка с постоянной насыщенностью s движется с постоянной скоростью, пропорциональной $\frac{w}{m}$, и является функцией самой насыщенности.

Так как правая часть (2.12) постоянна, то уравнение можно интегрировать и найти положение значения координаты x заданного значения насыщенности как функцию времени:

$$x(s) = \frac{w}{m} f'(s)t + x_0 \quad (2.13)$$

где x_0 – значения координат с начальной водонасыщенностью s_0 при $t = 0$.

Так как f' и x_0 есть функций s , то при помощи (2.13) можно построить полный профиль насыщенности в любой момент времени t , вычисляя x для различных значений. Предположим, что в начале пористая среда была заполнена нефтью и содержала в себе лишь неподвижную воду, так что в начальных условиях было: $s^* \leq s^0 \leq 1$, водонасыщенность в s_0 (в начальном времени) такова, что $0 \leq s_0 \leq s_*$ и расположена в начальный момент $t = 0$ в сечении $x = 0$ (или же x_0 как показано в (2.13)).

В начале времени $t = 0$ все точки функций $s(x)$, для которых s больше s_* и меньше $s^* = 1 - s_{н0}$, где $s_{н0}$ – остаточная нефтенасыщенность, начнут перемещаться по пористой среде по выражению (2.13), со скоростями пропорциональными $f'(s)$. Делаем вывод, что если известно $f'(s)$ для каждого значения s , то будем знать скорость точки на $s(x)$. Как видно, функция $f'(s)$ не монотонна, а имеет точку максимума в области перегиба в точке П (рисунок 3). Отсюда следует, что из (2.13) некоторые промежуточные значения насыщенности, движущейся функций $s(x)$ будут перемещаться быстрее, чем значения насыщенности, принимающие значения меньше либо больше. Через некоторое время после начала закачки форма профиля насыщенности примет вид графика $f'(s)$ (рисунок 5) из неё видно, что для координаты x насыщенность становится не определённой (3 разных значения). Такое поведение физически допустимо – это значит, что начиная с этого времени применение формулы (2.13) не допустимо. Тогда вспомним, что при составлении уравнений совместного течения нефти и газа мы предполагали, что решение для профиля насыщенности – непрерывная и гладкая функция x, t . Из-за этого дифференциальное уравнение (2.9) не может быть использовано в местах, где профиль насыщенности и тангенсом угла наклона $\frac{\partial s}{\partial x}$ имеет скачок или разрыв.

Введение фронта или как его называют «скачка» насыщенности (прямая АВ на рисунке 5) поможет избавиться от многозначности решения. Расположение скачка насыщенности определяется из условия материального баланса на скачке (область заштрихованных сегментов равны (рис.5)).

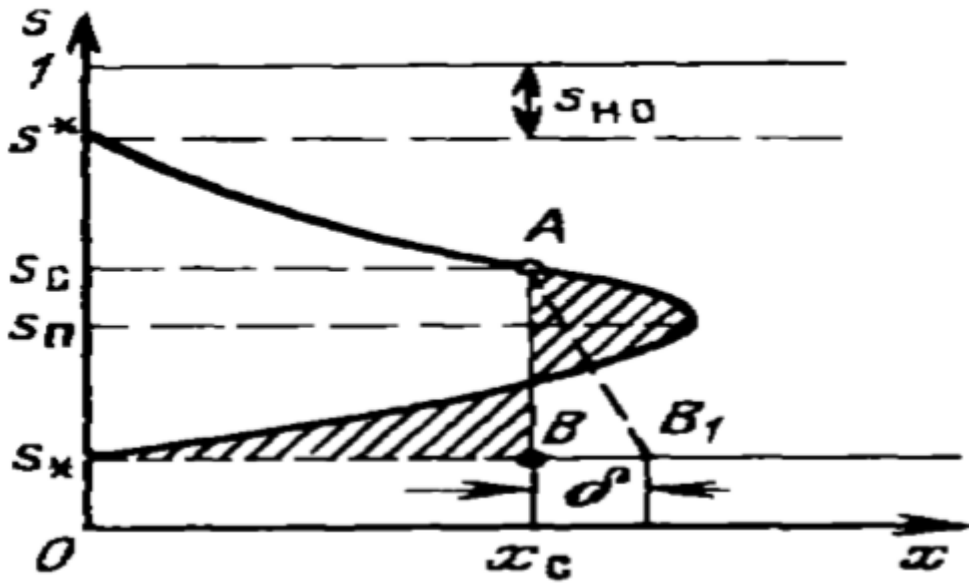


Рис. 3 Профиль насыщенности

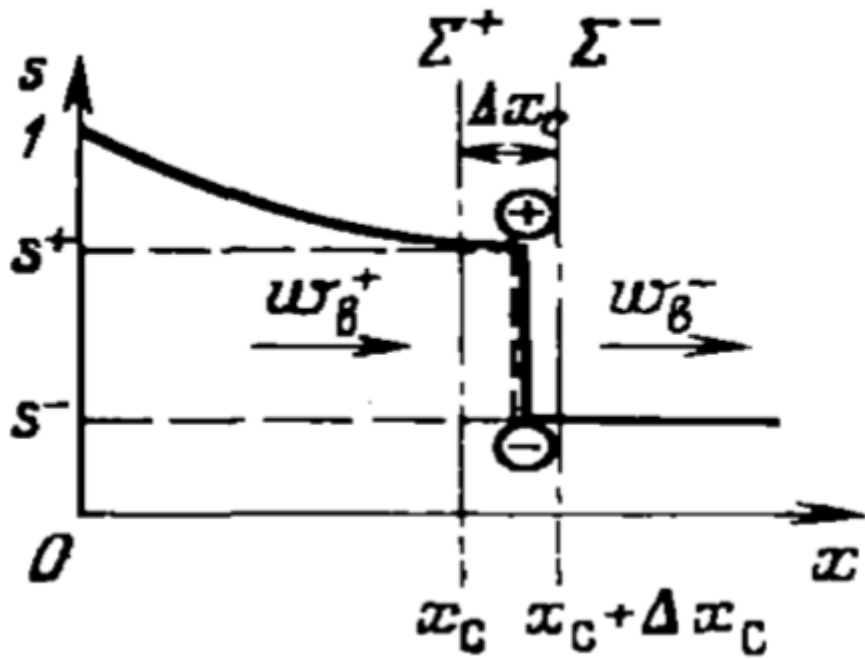


Рисунок 4 Схема для составления математического баланса на фронте (скачка) насыщенности

Нужно упомянуть, что в действительности скачка нету он появляется в следствии того, что пренебрегли капиллярным давлением. А в действительности есть некоторая область длиной δ (рис.5), в котором насыщенность резко изменяется, падая от s_c до s_* (вдоль кривой АВ₁ на рис.5). Область зоны, зависящая от капиллярного давления мала по сравнению с течением возрастающей во времени зоной смеси x_c в пределах области всего разрабатываемого пласта.

Сам баланс должен осуществляться и даже если уравнения баланса масс каждой жидкости (1.5) и (1.6) в дифференциальной форме в местах разрыва, не имеет смысла.

2.2.1 Условия на скачке насыщенности.

Рассмотрим условия сохранения массы каждой жидкости при прохождении разрыва через некоторый элементарный объём пласта (рис.6), ограниченный двумя поверхностями Σ^+ и Σ^- по обе стороны от скачка насыщенности.

Пусть в момент времени t скачок находится в координатах x_c , а после некоторого изменения времени Δt перешёл на координаты $x_c + \Delta x_c$. И при этом в пористую среду длина которого Δx_c войдёт слева объём воды, равный $w_B^+ \omega \Delta t$, а выйдет с права объём $w_B^- \omega \Delta t$, что означает объём воды, увеличится на величину: $(w_B^+ - w_B^-) \omega \Delta t$, где ω – площадь поперечного сечения пористой среды.

В следствии того, что у нас изменилось количество воды, то и изменилась насыщенность: $(s^+ - s^-)m \omega \Delta x_c$.

Тогда приравняв полученные данные по закону сохранения массы для воды при таких условиях, получаем: $(w_B^+ - w_B^-) \omega \Delta t = (s^+ - s^-)m \omega \Delta x_c$.

Сократив и разделив, получим следующее:

$$\frac{\Delta x_c}{\Delta t} = \frac{(w_B^+ - w_B^-)}{m(s^+ - s^-)} \quad (2.14)$$

где знаки « - », « + » показывают условия соответствующие значениям перед скачком и после скачка.

Выражение уравнения сохранения массы для нефти приводит к аналогичному результату (2.14), так как суммарная скорость течения сохраняется как в (2.2): $(w_B^+ + w_B^-) = (w_H^- - w_H^+)$.

В формуле (2.14) перейдём к пределу $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$ воспользовавшись функцией Бакли-Левретта и получим:

$$\frac{dx}{dt} = v_c = \frac{(w_B^+ - w_B^-)}{m(s^+ - s^-)} = \frac{w(f^+ - f^-)}{m(s^+ - s^-)} \quad (2.15)$$

где s^- индекс, обозначающий величины относящиеся к фронту насыщенности, а $f^\pm = f^\pm(s^\pm)$. Формула (2.15) задаёт скорость v_c движения, распространения скачка насыщенности и известна как условие на фронте.

Геометрический смысл выражения (2.15) : скорость фронта v_c пропорционально тангенсу угла наклона к оси s секущей, соединяющей точки кривой $f(s)$, имеющие абсциссы $s^+ s^-$ (рис. 4(а): $s^- = s_*$) с коэффициентом пропорциональности $\frac{w}{m}$.

Когда насыщенность постоянна до скачка и после скачка (в нашем случае $s^- = s_0, s^+ = s_c$, фронт насыщенности $\Delta s = s^+ - s^- = \text{const}$), то (2.15) её можно проинтегрировать и найти расположение скачка как функцию времени:

$$x_c = \frac{w(f^+ - f^-)}{m(s^+ - s^-)} t + x_{c0} \quad (2.16)$$

где x_{c0} – положение скачка при $t = 0$ (в нашем случае при постоянном начальном распределении насыщенности $x_{c0} = 0$).

Для насыщенности на скачке s_c , и для других значений насыщенности s , будет выполняться (2.13). Если s_c постоянно, то есть не меняется со временем, то из (2.13) получаем:

$$\frac{dx_c}{dt} = \frac{w}{m} f'(s_c) \quad (2.17)$$

А скорость скачка определяет выражением (2.15), в котором $s^- = s_0$ и $s^+ = s_c$. Приравнивая выражения (2.15) и (2.17) правые части, получим выражение для нахождения насыщенности на скачке s_c :

$$f'(s_c) = \frac{f(s_c) - f(s_0)}{(s_c - s_0)} \quad (2.18)$$

Заметим при $0 < s_0 \leq s_*$ функция $f(s_0) = 0$.

Из выражения (2.18) следует, что скорость движения фронта v_0 равна скорости распространения скачка насыщенности $f'(s_c)$.

Это уравнение имеет простую графическую иллюстрацию (рис. 3(a)): представляет собой уравнение касательной, проведённой из точки $(s_0, f(s_0))$ к кривой $f(s)$ (s_c – абсцисса точки касания). Из этого получаем простой графический метод определения насыщенности по функции известной $f(s)$ Бакли-Левретта.

В результате мы получили два уравнения (2.12) и (2.13) пользуясь которыми можно рассчитать скорость и координаты данного значения насыщенности в районе непрерывной профиля, и уравнения (2.15) с (2.16) при помощи которых можно найти значения скорости и местоположения фронта насыщенности.

Способ графического построения профиля насыщенности, которое состоит в следующем (рис.4):

1. В соответствии с данными о фазовых проницаемостях флюидов, по формуле (2.2) строится кривая Бакли-Левретта $f(s)$;

2. Из точки (а) на $f(s)$, равной начальной водонасыщенности s_0 в пористой среде ($0 < s_0 \leq s_*$), проводится касательная к $f(s)$;
3. Насыщенность в точке касания s_c есть насыщенность, которая устанавливается в пласте за скачком;
4. Отрезок АВ (рис. 4(б)) представляет величину насыщенности $s_c - s_0$, которая не меняется со временем t (стационарный скачок);
5. Скорость перемещения постоянных насыщенных, больших s_c , пропорционально наклону касательной к $f(s)$ в соответствующей точке;

Расчёт распределения насыщенности выполняется следующим образом:

- 1) Находим насыщенность s_c на скачке (фронте) из выражения (2.18).

При численных расчётах s_c вместо уравнения (2.18) проще использовать равнозначный способ, не требующий дифференцирования функций $f(s)$. За граничную насыщенность нужно принимать те значения s , которые обеспечивают максимум дроби:

$$\frac{f(s_c) - f(s_0)}{(s_c - s_0)} = \max \quad (2.19)$$

Из выражения следует, что на фронте выполняется такое значение насыщенности, при котором реализуется максимальная скорость. На ЭВМ проще рассчитать точку максимума, чем решить (2.18), где нужно найти численное дифференцирование.

- 2) Зная s_c из (2.16) ($s^- = s_0, s^+ = s_c$) определяют положение x_c фронта насыщенности.
- 3) По выражению (2.13) находят непрерывную ветвь профиля насыщенности при $s_c < s < s^* \quad 0 < x < x_c$.

Глава 3. Численное решение.

Решим численно уравнение Бакли-Левретта. Запишем уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho_B m s}{\partial t} + \operatorname{div} w_B \rho_B = 0$$
$$\frac{\partial m(1-s) \rho_H}{\partial t} + \operatorname{div} w_H \rho_H = 0$$

Вставим в неё обобщённый закон Дарси

$$\vec{w}_B = \frac{Q_B}{\omega} = -k \frac{k_B(s) \partial(p_H - p_c)}{\eta_B \partial x}$$
$$\vec{w}_H = \frac{Q_H}{\omega} = -k \frac{k_H(s) \partial(p_H)}{\eta_H \partial x}$$

Получим (но помня, что $s_B + s_H = 1$ и $p_B = p_H - p_c(s)$),

$$m \frac{\partial (s_B) \rho_B}{\partial t} - \rho_B \frac{k}{\eta_B} \operatorname{div} \frac{k_B(s) \partial(p_H - p_c)}{\partial x} = 0$$
(3.1)

$$m \frac{\partial (1 - s_B) \rho_H}{\partial t} - \rho_H \frac{k}{\eta_H} \operatorname{div} \frac{k_H(s) \partial(p_H)}{\partial x} = 0$$

Избавимся от давления: первое разделим на ρ_B , а второе на ρ_H :

$$m \frac{\partial s_B}{\partial t} - \frac{k}{\eta_B} \operatorname{div} \frac{k_B(s) \partial(p_H - p_c)}{\partial x} = 0$$
(3.2)

$$m \frac{\partial (1 - s_B)}{\partial t} - \frac{k}{\eta_H} \operatorname{div} \frac{k_H(s) \partial(p_H)}{\partial x} = 0$$

Для дискретизации по пространству будем использовать метод контрольного объёма.

Покроем расчётную область равномерной сеткой, состоящей из контрольных объёмов. Для каждого объёма рассматриваемое уравнение примет вид:

$$+V_l m \frac{(s_l - s_l^n)}{\Delta t} - \frac{k}{\eta_B} \Sigma_j k_B(\tilde{s}_j) \frac{(p_j - p_c(s_j) - p_l + p_c(s_l))}{\Delta x_j} \omega_j = 0 \quad (3.3)$$

$$-V_l m \frac{(s_l - s_l^n)}{\Delta t} - \frac{k}{\eta_H} \Sigma_j k_H(\tilde{s}_j) \frac{(p_j - p_l)}{\Delta x_j} \omega_j = 0$$

где $\tilde{s}_j = \begin{cases} s_j, & \text{при } p_j > p_l \\ s_l, & \text{при } p_l \geq p_j \end{cases}$ насыщенность, взятая по направлению против потока S_j - площадь поверхности

Найдём выражение невязки для численного метода (q) – итераций, для воды (обозначим через в)

$$R_l^{q,B} = +V_l m \frac{(s_l^q - s_l^n)}{\Delta t} - \frac{k}{\eta_B} \Sigma_j k_B(\tilde{s}_l^q) \frac{(p_j^q - p_c^q(s_j^q) - p_l^q + p_c^q(s_j^q))}{\Delta x_j} \omega_j$$

и нефти (обозначим через н): (3.4)

$$R_l^{q,H} = -V_l m \frac{(s_l^q - s_l^n)}{\Delta t} - \frac{k}{\eta_H} \Sigma_j k_H(\tilde{s}_l^q) \frac{(p_j^q - p_l^q)}{\Delta x_j} \omega_j$$

Найдём частные производные от невязки (ошибки погрешности вычисления) по $p_j^q, s_j^q, s_l^q, p_l^q$ для

$$\frac{\partial R_l^{q,H}}{\partial p_j^q} = -\frac{k}{\eta_H} k_H(\tilde{s}_j^q) \frac{\omega_j}{\Delta x_j}$$

$$\frac{\partial R_l^{q,H}}{\partial s_j^q} = -\frac{k}{\eta_H} \frac{(p_j^q - p_l^q)}{\Delta x_j} \omega_j \frac{dk_H(\tilde{s}_j^q)}{ds_j^q} \frac{d\tilde{s}_l^q}{d\tilde{s}_j^q}$$

$$\frac{\partial R_l^{q,H}}{\partial s_l^q} = -V_l m \frac{1}{\Delta t} \frac{ds_l^n}{ds_l^q} - \frac{k}{\eta_H} \sum_j \frac{dk_H(\tilde{s}_j^q)}{ds_j^q} \frac{d\tilde{s}_l^q}{d\tilde{s}_j^q} \omega_j$$

$$\frac{\partial R_l^{q,H}}{\partial p_l^q} = -\frac{k}{\eta_H} \sum_j k_H(\tilde{s}_j^q) \frac{\omega_j}{\Delta x_j}$$

это для нефти, а теперь распишем для воды

$$\frac{\partial R_l^{q,B}}{\partial p_l^q} = -\frac{k}{\eta_B} k_B(\tilde{s}_j^q) \frac{\omega_j}{\Delta x_j}$$

$$\frac{\partial R_l^{q,B}}{\partial s_j^q} = -\frac{k}{\eta_B} \omega_j \left(\left(\frac{(p_j^q - p_l^q + p_c^q(s_l^q) - p_c^q(s_j^q))}{\Delta x_j} \right) \frac{dk_B(\tilde{s}_j^q)}{ds_j^q} \frac{d\tilde{s}_j^q}{ds_j^q} - \frac{dp_c^q(s_j^q)}{ds_j^q} \frac{1}{\Delta x_j} k_B(\tilde{s}_j^q) \right)$$

$$\frac{\partial R_l^{q,B}}{\partial s_l^q} = -V_l m \frac{1}{\Delta t} \frac{ds_l^n}{ds_l^q} - \frac{k}{\eta_B} \sum_j \left(\left(\frac{(p_j^q - p_l^q + p_c^q(s_l^q) - p_c^q(s_j^q))}{\Delta x_j} \right) \frac{dk_B(\tilde{s}_j^q)}{ds_l^q} \frac{d\tilde{s}_j^q}{ds_l^q} + \right.$$

$$\left. \frac{dp_c^q(s_l^q)}{ds_l^q} \frac{1}{\Delta x_j} k_B(\tilde{s}_j^q) \right) \omega_j$$

$$\frac{\partial R_l^{q,B}}{\partial p_l^q} = -\frac{k}{\eta_B} \sum_j k_H(\tilde{s}_j^q) \frac{\omega_j}{\Delta x_j}$$

$$\bar{f}'(\bar{x}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Формула (3.7) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $\Delta \bar{x}$, причём все её коэффициенты выражаются через $\bar{x}^{(k)}$, $k \geq 0$. Решив эту систему любым известным методом, например по правилу Крамера, методом исключения Гаусса, полагаем что:

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} + \Delta \bar{x}$$

Если использовать формулы (3.10), то на каждой итерации требуется находить $\bar{x}^{(k)}$, $\Delta \bar{x}$. Таким образом, фактическая реализация метода Ньютона проводится в 2 этапа:

I. Решаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\bar{f}'(\bar{x}^{(k)})\Delta \bar{x} = -\bar{f}(\bar{x}^{(k)}) \quad (3.8)$$

развернём её в понятную нам форму

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Delta x_n = -f_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \Delta x_n = -f_2 \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \Delta x_n = -f_n \end{cases}$$

относительно неизвестных $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$.

Значения функций f_1, f_2, \dots, f_n и их производных вычисляем в известной точке $\bar{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$. При этом предполагаем, что

$$\det \left(\bar{f}'(\bar{x}^{(k)}) \right) \neq 0;$$

II. Полагаем

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} + \Delta \bar{x} \quad (3.9)$$

или покомпонентном

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i, i = \overline{1, n}$$

и переходим к п.1.

Счёт прекращаем, когда все превращения Δx_i неизвестных становится малым по абсолютной величине, а именно:

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\Delta x_i| < \varepsilon$$

где ε – заданная точность вычислений.

Если матрицы Якоби $\bar{f}'(\bar{x}^{(k)})$, $k = 0, 1, \dots$ являются невырожденными, то из (3.3) получим ещё одну запись итерационного процесса:

$$\Delta \bar{x} = -[\bar{f}'(\bar{x}^{(k)})]^{-1} * \bar{f}(\bar{x}^{(k)})$$

или

(3.10)

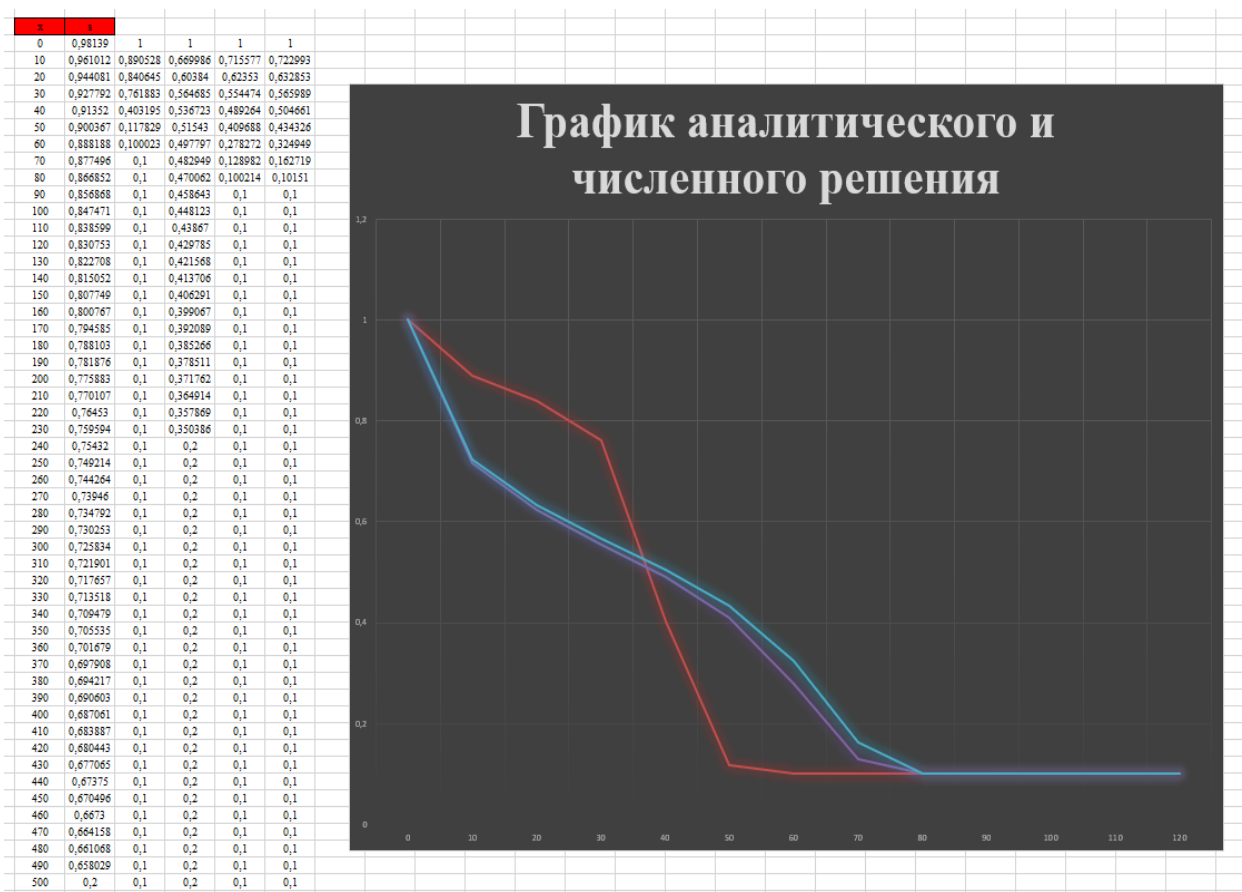
$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \left(-[\bar{f}'(\bar{x}^{(k)})]^{-1} * \bar{f}(\bar{x}^{(k)}) \right), k \geq 0$$

Формула (3.10) есть обобщение метода Ньютона для одного уравнения на случай n ($n \geq 2$) уравнений. Из приведённых здесь обобщений метода Ньютона на случай n уравнений алгоритм (3.8) и (3.9) является наиболее последовательным.

Результаты

Было построено распределение водонасыщенности s по пласту длиной $L=500\text{м}$, время измерения равно двум суткам $t=48\text{ч}$, вязкость $\mu=0.35\text{Па}\cdot\text{с}$, пористость равна $m=0.25$, относительная фазовая проницаемость воды равна $k_B(s)=s^2$, относительная фазовая проницаемость нефти $k_H(s)=(1-s)^2$. Получили результаты численного решения при шаге $h=0.05$ и $h=10\text{м}$.

Результаты, полученные аналитически и численного решения показаны в виде графиков:



Из графика делаем вывод, что численные решения практически совпадают, перемена шага не сильно воздействовало на график. Итоги, приобретённые впоследствии проведения численных расчётов, абсолютно отвечают аналитическому заключению. В следующей таблице приведены те самые значения из аналитического и численного решения задачи Баклея-Левретта.

Заключение

В данной работе была рассмотрена классическая модель Бакли-Левретта. В ходе проводимой работы было решено данное уравнение аналитическим методом и численным методом. Метод Ньютона является эффективным методом повышения точности решения системы нелинейных уравнений, и поэтому был выбран для реализации данной задачи.

Полученные результаты, после проведения исследования, приблизительно соответствуют своим значениям как численным решениям, так и аналитическим. И вполне схожи с моделируемым процессом решения всей задачи.

Список литературы

А.Б. Мазо, К. П. (2013). *Гидродинамика: учеб. пособие для студентов нематематических факультетов*. Казань: 2-е изд. 128 стр.

Басниев К. С, К. И. (1993). *Подземная гидромеханика: Учебник для вузов*. В К. И. Басниев К. С, *Подземная гидромеханика: Учебник для вузов*. (стр. 261-283). Москва: Недра.

Большая энциклопедия Нефти и Газа. (б.д.). Получено из ngpedia.ru:
<https://www.ngpedia.ru/id186241p1.html>

Виды крекинга нефти и нефтепродуктов. (б.д.). Получено из neftok.ru:
<https://neftok.ru/dobycha-razvedka/kreking-nefteproduktov.html>

Классификация нефти. (б.д.). Получено из wikipedia.ru:
https://ru.wikipedia.org/wiki/Классификации_нефти

Ручкин, Ю. (Режиссер). (2011). *Тяжелая нефть* [Кино]. Россия. Получено из
<https://vseonefti.ru/neft/tyazhelaya-neft.html>

Справочник. (б.д.). Получено из chem21.ru:
<https://www.chem21.info/page/034062000130228057074074108144242000032195193102/>

Теоретические основы процессов разработки нефтяных месторождений: Курс лекций. Часть 2. (2009). В И. Р.Р., *Процессы воздействия на пласты (технологии и методы расчета)* (стр. 16-24). Альметьевск: Альметьевский государственный нефтяной институт.

техники", П. з. (Режиссер). (2017). *Путь нефти: мифы и реальность* [Кино].

Тяжелая нефть. (б.д.). Получено из petrodigest.ru:
<https://petrodigest.ru/articles/neft/heavy-crude-oil>