

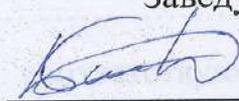
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
Кафедра фундаментальной математики и механики

РЕКОМЕНДОВАНО К ЗАЩИТЕ
В ГЭК И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ
ЗАИМСТВОВАНИЯ

Заведующий кафедрой

к.ф.-м.н.

 Басинский К.Ю.

1 июля 2019 г.

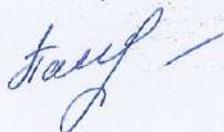
ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(магистерская диссертация)

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ
ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ НАГРЕВЕ ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ**

01.04.01 Математика

Магистерская программа «Вычислительная механика»

Выполнила работу
Студентка II курса
очной формы обучения



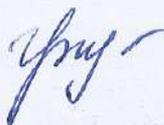
Ростенко
Полина
Михайловна

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент
кафедры ФМиМ



Актаев
Нуркен
Ерболатович

Рецензент
Руководитель группы
ООО «ТННЦ»,
к.т.н.



Грачева
Светлана
Камиловна

г. Тюмень, 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ	6
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ	7
1.1 Разностные схемы.....	7
1.2 Дифференциальные операторы в цилиндрической системе координат.....	8
1.3 Метод Гаусса-Зейделя	8
1.4 Физический смысл рассматриваемой проблемы.....	11
ГЛАВА 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	13
2.1 Построение математической модели и соответствующей ей краевой задачи математической физики	13
2.2 Численное представление краевой задачи	18
2.3 Инициализация программы.....	35
ГЛАВА 3. ОПИСАНИЕ И АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ	36
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	45
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	47
ПРИЛОЖЕНИЯ	48

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день научно-технический прогресс расширил свои границы в области гидродинамики. Значительных успехов достигли стремительно развивающиеся области науки: как нанотехнологии, генетическая инженерия, микро- и наноэлектроника, микро- и нанофлюидика. Все эти достижения требуют внимательного рассмотрения поведения границы раздела фаз в микроскопических объектах, в частности, границы раздела «жидкость-газ» в различных условиях [1]. Большой интерес ученых в таких системах представляет выявление закономерностей процессов тепломассопереноса, полученные исследования которых можно применить для решения широкого круга фундаментальных и прикладных задач из разных областей науки и техники [5].

Относительно недавно, было обнаружено явление диссипативной упорядоченной структуры из микрокапель конденсата, которые левитируют над поверхностью горизонтального слоя нагреваемой жидкости. Это явление получило название «Капельный кластер». Принципиально важным для формирования и устойчивого существования капельного кластера является локальный характер нагрева межфазной поверхности жидкость-газ, при этом, в слое не должны возникать термокапиллярные течения [6]. Такие условия реализуются в жидкостях с высоким поверхностным натяжением, при наличии в них примесей поверхностно-активных веществ (ПАВ) [6].

В жидкостях без примесей или с низким поверхностным натяжением при нагреве возникают термокапиллярные течения или эффект Марангони, вследствие чего возникает деформация поверхности слоя жидкости. Такой перенос вещества осуществляется вдоль границы раздела двух сред и возникает вследствие наличия градиента поверхностного натяжения. За счет действия сил поверхностного натяжения возникает конвекция, которую называют капиллярной или конвекцией Марангони.

В наземных условиях роль термокапиллярных течений в процессах тепломассопереноса может быть второстепенной – в случае макромасштабных систем [5]. Это объясняется наличием гравитационных конвективных течений, интенсивность которых, как правило, в десятки раз выше, что значительно затрудняет исследование конвекции Марангони. Однако, в объемах жидкости, имеющих относительно протяженную свободную поверхность и малый вертикальный размер — таких, как небольшие капли, жидкие мостики и зоны, тонкие горизонтальные слои и пленки жидкости, объемные силы оказываются малы по сравнению с поверхностными. В этих случаях конвекция Марангони способна вносить существенный вклад в процессы теплообмена и массообмена, а также влиять на форму свободной поверхности, вызывая поверхностные деформации и даже перемещения всего объема жидкости в целом [2].

Интерес в термокапиллярной деформации свободной поверхности тонкого слоя жидкости впервые был представлен в работах Бенарда в 1900г. Он первым наблюдал деформацию поверхности слоя с устойчивой конвекцией и измерил размер изгиба деформации. В 1939 году Херши экспериментальным путем наблюдал образование термокапиллярного «холма» в тонком слое воды и, используя упрощающие предположения, получил из уравнения Навье-Стокса приблизительную оценку высоты этого холма. Оценка глубины термокапиллярной деформации стала востребована в лакокрасочной промышленности. Тонкие жидкостные пленки нашли применение и в технологических процессах благодаря способности обеспечивать высокую скорость тепломассопереноса и, в некоторых случаях, незначительные потери давления при малых удельных скоростях потока жидкости. Тем не менее, они могут разрушаться, а поверхностные участки, свободные от жидкости – не участвовать в процессе тепломассопереноса, что значительно снижает эффективность системы. Избежать разрыва позволяет скорость потока жидкости, значительно превышающая количество выпаренной жидкости.

На данный момент, межфазная конвекция существенно влияет на интенсивность многих технологических процессов в пищевой, химической,

нефтяной, металлургической и разных других отраслях промышленности, в том числе протекающих в условиях невесомости, где гравитационные механизмы конвективного движения ослаблены или отсутствуют. Отдельное внимание к исследованиям по данной тематике обусловлено разработками в области космических технологий и систем жизнеобеспечения орбитальных станций и космических аппаратов [2].

В данной работе рассматривается термокапиллярное течение в тонком горизонтальном слое вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью при локальном нагреве этого слоя. Задача осесимметричная и стационарная, решается численно, используя метод Гаусса-Зейделя.

Актуальность данной темы обусловлена повышенным интересом к активно развивающимся направлениям в микрофлюидике и технологиям lab-on-a-chip¹, а также дальнейшей перспективой внедрения в разрабатываемые технологии.

Целью данной работы является, исследование термокапиллярной деформации тонкого слоя воды при локальном нагреве этого слоя в отсутствие поверхностно-активных веществ.

Задачи рассматриваемой проблемы стоят следующим образом:

- изучить литературу по теме диссертационной работы,
- построить математическую модель и поставить соответствующую краевую задачу математической физики,
- вывести и показать систему уравнений в численном виде,
- написать программный код в MATLAB, применяя инструменты численного моделирования, в частности, метод Гаусса-Зейделя,
- показать профиль изменения толщины, скорости и температуры,
- проанализировать полученные результаты.

¹ Lab-on-a-chip – микросистемы полного анализа – миниатюрный прибор, позволяющий осуществлять один или несколько многостадийных (био) химических процессов и использующий микро- или наноскопические количества образцов для пробоподготовки и проведения реакций. Это пластинка из стекла или кремния, на поверхности которой упорядоченно размещены рецепторы к нужным веществам, например, антитела. Прикрепление молекулы вещества к рецептору выявляется электрическим путем или по флюоресценции.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

u	радиальная компонента скорости	м/с
v	вертикальная компонента скорости	м/с
T	температура	К
p	давление	Па
q	плотность локального источника тепла	Вт/м ²
W	мощность локального источника тепла	Вт
r_b	радиус луча лазера	м
ρ	плотность жидкости	кг/м ³
ν	кинематическая вязкость	м ² /с
σ_T	температурный коэффициент поверхностного натяжения	Н/м·К
\tilde{T}	температура окружающей среды	К
λ	коэффициент теплопроводности	Вт/м·К
g	ускорение свободного падения	м/с ²
a	коэффициент температуропроводности	м ² /с
h	коэффициент теплоотдачи	Вт/м ² ·К
ε	заданная точность вычислений	—
h_0	начальная толщина слоя жидкости	м
R	радиус рассматриваемой области	м

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Большое количество задач физики и техники приводит к краевым либо начально краевым задачам для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. При этом число задач, имеющих аналитическое решение, ограничено. Это приводит к необходимости искать приближенные решения, пользуясь для этого различными численными методами. Достаточно эффективным методом численного решения задач математической физики является метод конечных разностей или метод сеток, позволяющий сводить приближенное решение уравнений в частных производных к решению систем алгебраических уравнений. Системы алгебраических уравнений при этом формулируются для приближенных значений решения в некотором наборе точек в расчетной области.

1.1. Разностные схемы

Определение 1: *разностная схема* — это конечная система алгебраических уравнений, поставленная в соответствие какой-либо дифференциальной задаче, содержащей дифференциальное уравнение и дополнительные условия.

Разностные схемы применяются для сведения дифференциальной задачи, к конечной системе уравнений, численное решение которых возможно на вычислительных машинах.

Левая разностная форма

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{f(x, y) - f(x - \Delta x, y)}{\Delta x} \rightarrow f_{ij} = \frac{f_{ij} - f_{i-1j}}{\Delta x} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{f(x, y) - f(x, y - \Delta y)}{\Delta y} \rightarrow f_{ij} = \frac{f_{ij} - f_{ij-1}}{\Delta y} \end{aligned} \quad (1)$$

Правая разностная форма

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \rightarrow f_{ij} = \frac{f_{i+1j} - f_{ij}}{\Delta x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \approx \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \rightarrow f_{ij} = \frac{f_{ij+1} - f_{ij}}{\Delta y}$$

Центральная разностная форма

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &\approx \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x - \Delta x, y)}{2\Delta x} \rightarrow f_{ij} = \frac{f_{i+1j} - f_{i-1j}}{2\Delta x} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &\approx \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y - \Delta y)}{2\Delta y} \rightarrow f_{ij} = \frac{f_{ij+1} - f_{ij-1}}{2\Delta y} \end{aligned} \quad (3)$$

Вторая производная

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &\approx \frac{f(x + \Delta x, y) - 2f(x, y) + f(x - \Delta x, y)}{(\Delta x)^2} \rightarrow f_{ij} = \frac{f_{i+1j} - 2f_{ij} + f_{i-1j}}{(\Delta x)^2} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} &\approx \frac{f(x, y + \Delta y) - 2f(x, y) + f(x, y - \Delta y)}{(\Delta y)^2} \rightarrow f_{ij} = \frac{f_{ij+1} - 2f_{ij} + f_{ij-1}}{(\Delta y)^2} \end{aligned} \quad (4)$$

1.2. Дифференциальные операторы в цилиндрической системе координат

Определение 2: *цилиндрическая система координат* – трёхмерная система координат, являющейся расширением полярной системы координат путем добавления третьей координаты, задающей высоту точки над плоскостью (принято обозначать z).

Цилиндрические координаты удобны при анализе поверхностей, симметричных относительно какой-либо оси, если ось Oz взять в качестве оси симметрии.

$$\operatorname{div} a = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ar) + \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{a}{r} + \frac{\partial a}{\partial r} + \frac{\partial a}{\partial z} \quad (5)$$

$$\Delta a = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial r} + \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \quad (6)$$

1.3. Метод Гаусса-Зейделя

Решение систем линейных алгебраических уравнений - одна из основных задач вычислительной линейной алгебры. Хотя задача решения системы линейных уравнений сравнительно редко представляет самостоятельный интерес для приложений, от умения эффективно решать такие системы часто

зависит сама возможность математического моделирования самых разнообразных процессов с применением ЭВМ. Значительная часть численных методов решения различных (в особенности - нелинейных) задач включает в себя решение систем линейных уравнений как элементарный шаг соответствующего алгоритма.

Особенности итерационных методов

- краткость времени расчета, чем в прямых численных методах;
- сохранность свойства разреженности матрицы;
- выполнение вычислений до определенной заданной точности, что позволяет при некотором округлении значительно сократить время выполнения и затраченные ресурсы;
- эффективность при разреженных матрицах и больших матрицах системы.

Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода простой итерации. Основная его идея заключается в том, что при вычислении $(k + 1)$ –го приближения неизвестной x учитываются уже вычисленные ранее $(k + 1)$ – е приближения неизвестных x .

Рассмотрим СЛАУ

$$Ax = b \text{ или } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (7)$$

Выразим из первого уравнения системы x_1 , из второго x_2 и т.д. Тогда получим систему вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{11}} (a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{1}{a_{22}} (a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n) \\ \dots \\ x_j = \frac{b_j}{a_{jj}} - \frac{1}{a_{jj}} (a_{j1}x_1 + \dots + a_{jj-1}x_{j-1} + a_{jj+1}x_{j+1} + \dots + a_{jn}x_n) \\ \dots \\ x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{1}{a_{nn}} (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}) \end{array} \right.$$

Каждая новая итерация начинается с расчета x_1 через уже известные значения x , полученные в предыдущей итерации.

$$x_1^{k+1} = \frac{b_1}{a_{11}} - (a_{12}x_2^k + a_{13}x_3^k + \dots + a_{1n}x_n^k)/a_{11}$$

Метод Гаусса-Зейделя похож на метод простой итерации, но различия появляются при расчете x_2^{k+1} . В выражении для расчета x_2^{k+1} для x_1 используется значение, полученное на данной итерации, а не с предыдущей, как в методе простой итерации. Таким образом будут рассчитываться последующие значения x . Тогда система (7) примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{k+1} = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{11}} (a_{12}x_2^k + \dots + a_{1n}x_n^k) \\ x_2^{k+1} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{1}{a_{22}} (a_{21}x_1^{k+1} + \dots + a_{2n}x_n^k) \\ \dots \\ x_n^{k+1} = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{1}{a_{nn}} (a_{n1}x_1^{k+1} + a_{n2}x_2^{k+1} + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}^{k+1}) \end{array} \right.$$

или такой

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{k+1} = c_{12}x_2^k + \dots + c_{1n}x_n^k + d_1 \\ x_2^{k+1} = c_{21}x_1^{k+1} + \dots + c_{2n}x_n^k + d_2 \\ \dots \\ x_n^{k+1} = c_{n1}x_1^{k+1} + \dots + c_{nn-1}x_{n-1}^{k+1} + d_n \end{array} \right. \quad (8)$$

Где

$$c_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & j \neq i \\ 0, & j = i \end{cases} \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad i = \overline{1, n} \quad (9)$$

Таким образом, уравнения системы будут вычисляться по формуле

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{k+1} + \sum_{j=i}^n c_{ij} x_j^k + d_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (10)$$

Где $x_i^0 = d_i$. Согласно теоремы условия сходимости метода, имеем следующее условие сходимости:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n} \quad (11)$$

При этом хотя бы для одного уравнения неравенство должно выполняться строго. Эти условия являются достаточными для сходимости метода, но они не являются необходимыми, т.е. для некоторых систем итерации сходятся и при нарушении условия.

Условие окончания итерационного процесса Зейделя при достижении точности ε имеет вид

$$\|Ax^k - b\| \leq \varepsilon \quad \text{или} \quad \delta = \max_i |x_i^k - x_i^{k-1}| \leq \varepsilon \quad (12)$$

Алгоритм выполнения метода (блок схема данного метода Приложение 1):

1. Ввод данных матриц A и b
2. Задание начального приближения $x_i^0 = x_i^1 = d_i, i = \overline{1, n}$;
3. Расчет (10);
4. Если условие (12) выполнено, то переход к следующему пункту 5, иначе переходим к новой итерации к пункту 2;
5. Расчет закончен. Результат – значения x .

1.4 Физический смысл рассматриваемой проблемы

Общеизвестно, что при нагреве жидкости возникает градиент температуры. Вследствие подогрева в первоначальном слое жидкости

начинается процесс диффузии (**Определение 4**) из-за возникшей неоднородности концентрации вещества. При преодолении некоторых критических значений градиента температуры, диффузия «не успевает» привести вещество к однородности концентрации, а значит и температуру по всему объему. Такой процесс называется конвекцией Марангони (**Определение 3**).

Конвекция возникает за счет действия сил поверхностного натяжения. Дело в том, что они имеют зависимость от температуры. В жидкостях без примесей, т.е. в чистых жидкостях, при увеличении температуры – коэффициент поверхностного натяжения уменьшается. Вследствие этого, появляется градиент поверхностного натяжения, благодаря которому жидкость начинает перемещаться в области с большим коэффициентом поверхностного натяжения (значит будет стремиться к правой и левой границам рассматриваемой модели). Такая конвекция называется термокапиллярной. Таким образом, в месте высокой температуры находится наименьшее значение коэффициента поверхностного натяжения, что говорит о том, что поверхностное натяжение жидкости в этой области в наименьшей степени стремится стягиваться. Поэтому возникает так называемый «прогиб» поверхности тонкого слоя жидкости.

Определение 3: *эффект Марангони* – явление переноса вещества вдоль границы раздела двух сред, которое возникает вследствие наличия градиента поверхностного натяжения.

Определение 4: *диффузия* – процесс взаимного проникновения молекул или атомов одного вещества между молекулами или атомами другого, приводящий к самопроизвольному выравниванию их концентраций по всему занимаемому объёму [2].

Определение 5: *конвекция* – явление переноса теплоты (энергии) в жидкостях, газах или сыпучих средах потоками самого вещества.

ГЛАВА 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Построение математической модели и соответствующей ей краевой задачи математической физики

Рассмотрим тонкий горизонтальный слой вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью с осевым симметричным распределением температуры, сосредоточенном на основании.

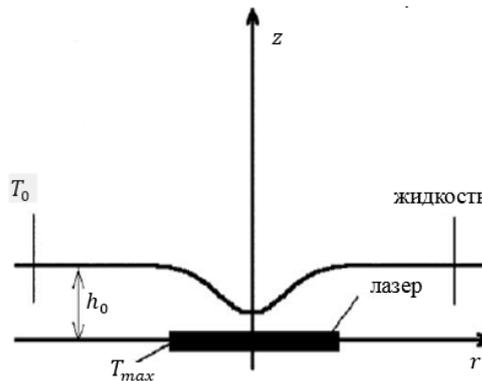


Рисунок 1 Рассматриваемый горизонтальный тонкий слой жидкости при локальном нагреве у основания

Математическая формулировка задачи состоит из уравнений Навье-Стокса, неразрывности и уравнения теплопроводности [3]. Предполагается, что на свободной поверхности силы вязких и поверхностных напряжений равны (эффект Марангони):

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=h} = \frac{\partial \sigma}{\partial r}$$

Запишем систему уравнений, описывающих данный процесс, в двумерной цилиндрической системе координат

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \Delta u \\ u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v - g \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\ u \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial z} = a \Delta T \end{array} \right. \quad (2.1.1)$$

Где u – радиальная компонента скорости в направлении горизонтальной оси Or , v – вертикальная компонента скорости в направлении вертикальной оси Oz , h_0 – начальная толщина слоя жидкости, p – давление, ρ_0 – плотность жидкости, a – коэффициент температуропроводности.

Выведем выражение для давления, выполнив ряд действий с первым и вторым уравнениями системы (1).

I) Для начала, умножим первое уравнение на r и продифференцируем полученное выражение по r :

$$\begin{aligned} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} + ur \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + vr \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + r \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial r} \\ = - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial r} + r \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} (rv \Delta u) \end{aligned}$$

Ввиду линейности оператора, последнее слагаемое распишется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial r} (rv \Delta u) = v \Delta u + rv \Delta \frac{\partial u}{\partial r}$$

Разделим полученное выражение на r :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial r} \\ = - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right) + \frac{v}{r} \Delta u + v \Delta \frac{\partial u}{\partial r} \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

II) Продифференцируем второе уравнение системы (1) по z

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + u \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial r} + v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial r} = -\rho_0 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + v \Delta \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.1.4)$$

III) Сложим уравнения (3) и (4).

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + u \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial r} + v \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial r} \\ & = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) + \frac{v}{r} \Delta u + v \Delta \frac{\partial u}{\partial r} + v \Delta \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned}$$

Применяя то же свойство линейности оператора, получим уравнение неразрывности:

$$\begin{aligned} & \frac{v}{r} \Delta u + v \Delta \frac{\partial u}{\partial r} + v \Delta \frac{\partial v}{\partial z} = \left[v \Delta \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0 \right] - \frac{v}{r^2} \left(\frac{u}{r} + \frac{2\partial u}{\partial r} \right) \\ & \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned}$$

Таким образом, получим выражение вида

$$\begin{aligned} \Delta p = & \\ & -\rho_0 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} \right. \\ & \left. + \frac{v}{r^2} \left(\frac{u}{r} + \frac{2\partial u}{\partial r} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Отсюда следует система уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} & u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} + v \Delta u \\ & u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + v \Delta v - g \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\ & u \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial z} = a \Delta T \\ & \Delta p = -\rho_0 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{v}{r^2} \left(\frac{u}{r} + \frac{2\partial u}{\partial r} \right) \right] \end{aligned} \right. \quad (2.1.6)$$

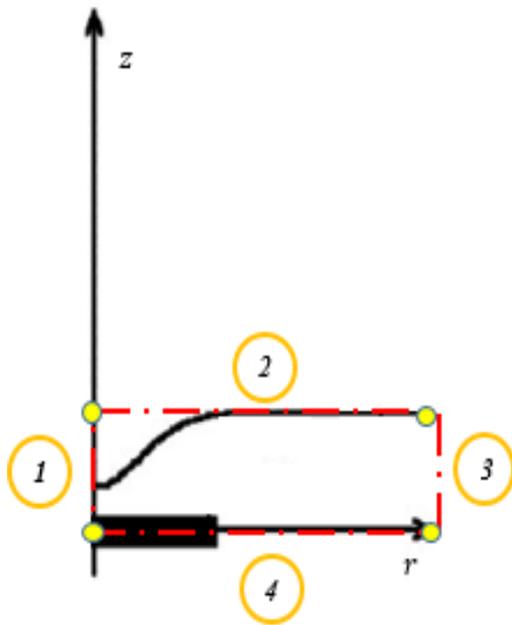


Рисунок 2 Рассматриваемая осесимметричная область

На рисунке 2 красным цветом выделена рассматриваемая область данной задачи. Для удобства описания граничных условий каждая сторона пронумерована. Граничные условия в углах рассчитываются через слияние граничных условий двух образующих искомый угол сторон.

1. Нижнее граничное условие $z = 0$:

$$\begin{cases} u|_{z=0} = 0 \\ v|_{z=0} = 0 \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}|_{z=0} = h_1(\tilde{T} - T) + q \quad (2.1.7) \\ \frac{\partial p}{\partial z}|_{z=0} = 0 \end{cases}$$

Здесь q источник тепла. Он представлен следующим образом

$$q = \frac{W}{\pi(r_b + 3.66 \cdot 10^{-4})^2} \cdot \exp\left(\frac{-2r^2}{(r_b + 3.66 \cdot 10^{-4})^2}\right)$$

Где W – мощность локального источника тепла, r – радиус, r_b – радиус луча лазера. Данная зависимость соответствует реальному лазерному источнику.

2. Левое граничное условие $r = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r}|_{r=0} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial r}|_{r=0} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r}|_{r=0} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z}|_{r=0} = 0 \end{cases} \quad (2.1.8)$$

В первом и во втором условиях (2.9) есть неопределенность при $r \rightarrow 0$.

Раскроем ее, используя правило Лопиталья:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right)}{\frac{\partial}{\partial r} (r)} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

Аналогично

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right) = 2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) = 2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$$

Тогда уравнения из системы (2.7) примут вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} v \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left(2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ v \frac{\partial T}{\partial z} = a \left(2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \\ \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \end{array} \right. \quad (2.1.9)$$

3. Верхнее граничное условие $z = h_0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h_0} = -\frac{\sigma_T}{\nu \rho_0} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=h_0} = -\frac{\sigma_T}{\nu \rho_0} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=h_0} = h_2 (\tilde{T} - T) \\ \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{z=h_0} = 0 \end{array} \right. \quad (2.1.10)$$

4. Правое граничное условие $r = R$:

$$\begin{cases} u|_{r=R} = 0 \\ v|_{r=R} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

2.2. Численное представление краевой задачи

Представим каждое уравнение системы (6) в разностной форме. Тогда получим уравнения следующего вида:

$$F_{ij}^{n+1} = f(F_{i+1j}^n, F_{i-1j}^{n+1}, F_{ij+1}^n, F_{ij-1}^{n+1}) \quad (2.2.1)$$

Расписав первые уравнения системы (6) через правые разностные формы получим выражения для нахождения скоростей

$$\begin{aligned} u_{ij}^{n+1} &= A_1 u_{i+1j}^n + A_2 u_{i-1j}^{n+1} + A_3 u_{ij+1}^n + A_4 u_{ij-1}^{n+1} + A_5 p_r \\ v_{ij}^{n+1} &= A_1 v_{i+1j}^n + A_2 v_{i-1j}^{n+1} + A_3 v_{ij+1}^n + A_4 v_{ij-1}^{n+1} + A_5 p_z - g \\ T_{ij}^{n+1} &= B_1 T_{i+1j}^n + B_2 T_{i-1j}^{n+1} + B_3 T_{ij+1}^n + B_4 T_{ij-1}^{n+1} \\ p_{ij}^{n+1} &= \frac{1}{F} \left\{ \rho_0 \left(v_{ij+1}^n \left[(v_{ij+1}^n \cdot 2r\Delta r^2 - 2v_{ij}^{n+1} + v_{ij}^n) (\Delta r)^2 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - r\Delta r\Delta z (u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1}) - 2r\Delta r^2 v_{ij}^{n+1} \right] \right. \\ &\quad \left. + v_{ij}^{n+1} \left[(v_{ij}^{n+1} - 2)r\Delta r^2 + r\Delta r\Delta z (u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1}) \right] \right. \\ &\quad \left. + v_{ij-1}^{n+1} r\Delta r^2 - u_{ij}^{n+1} \left[\Delta z^2 (v_{ij}^n \Delta r + 2ru_{ij}^n) + 2r\Delta z \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \left(u_{ij}^n \Delta z + \Delta r (v_{i+1j}^n - v_{ij}^{n+1}) \right) + \frac{2v\Delta r\Delta z^2}{r} \right] + u_{i-1j}^{n+1} u_{ij}^n r\Delta z^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{v\Delta r\Delta z^2}{r} \left(2 \cdot u_{i+1j}^n + \frac{u_{ij}^n \Delta r\Delta z}{r^2} \right) \right) \\ &\quad \left. + p_{i+1j}^n (\Delta r\Delta z^2 + r(\Delta r^2 + \Delta z^2)) + p_{i-1j}^{n+1} r\Delta z^2 \right. \\ &\quad \left. + (p_{ij+1}^n + p_{ij-1}^{n+1}) r\Delta r^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Где

$$p_r = -\frac{1}{\rho_0} \frac{p_{i+1j}^n - p_{ij}^{n+1}}{\Delta r}; \quad p_z = -\frac{1}{\rho_0} \frac{p_{ij+1}^n - p_{ij}^{n+1}}{\Delta z};$$

$$A_1 = \frac{(\Delta z)^2 [v(\Delta r + r) - ur\Delta r]}{A}; \quad A_2 = \frac{vr(\Delta z)^2}{A}; \quad A_3 = \frac{r(\Delta r)^2 (v - v\Delta z)}{A};$$

$$A_4 = \frac{vr(\Delta r)^2}{A}; \quad A_5 = \frac{r(\Delta r)^2 (\Delta z)^2}{A};$$

$$A = v[\Delta r(\Delta z)^2 + 2r((\Delta z)^2 + (\Delta r)^2)] - r\Delta r\Delta z[u\Delta z + v\Delta r];$$

$$B_1 = \frac{(\Delta z)^2 [a(\Delta r + r) - r\Delta ru]}{B}; \quad B_2 = \frac{ar(\Delta z)^2}{B}; \quad B_3 = \frac{r(\Delta r)^2 (a - \Delta zu)}{B};$$

$$B_4 = \frac{ar(\Delta r)^2}{B}; \quad B = a[\Delta r(\Delta z)^2 + 2r((\Delta z)^2 + (\Delta r)^2)] - r\Delta r\Delta z[u\Delta z + v\Delta r];$$

$$F = \Delta r\Delta z^2 + 2r(\Delta r^2 + \Delta z^2).$$

Здесь Δr – радиальный шаг; Δz – шаг по толщине слоя.

А. Граничные условия для сторон рассматриваемой области

1. Нижние граничные условия при $z = 0$

а)

$$u_{ij}^{n+1} = 0$$

б)

$$v_{ij}^{n+1} = 0$$

с)

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = h_1(\tilde{T} - T) + q$$

Используем правую разностную форму

$$-\lambda \left. \frac{T_{ij+1}^n - T_{ij-1}^{n+1}}{2\Delta z} \right|_{z=0} = h_1(\tilde{T} - T_{ij}^n) + q$$

$$-\lambda \frac{T_{i1}^n - T_{i,-1}^{n+1}}{2\Delta z} = h_1(\tilde{T} - T_{ij}^n) + q$$

$$T_{i,-1}^{n+1} = \widetilde{h}_1(\tilde{T} - T_{i0}^n) + q \frac{\widetilde{h}_1}{h_1} + T_{i1}^n$$

Необходимо привести к выражению (2.2.2) для T при $z = 0$:

$$T_{i0}^{n+1} = B_1 T_{i+10}^n + B_2 T_{i-10}^{n+1} + B_3 T_{i1}^n + B_4 T_{i,-1}^{n+1}$$

На нижней границе имеем равенство коэффициентов $B_3 = B_4$ для температуры. Таким образом, получим

$$T_{i0}^{n+1} = \frac{1}{1 + B_3 \widetilde{h}_1} \left\{ B_1 T_{i+10}^n + B_2 T_{i-10}^{n+1} + B_3 \left(2T_{i1}^n + \widetilde{h}_1 \left(\tilde{T} + \frac{q}{h_1} \right) \right) \right\}$$

Где $\widetilde{h}_1 = \frac{2h_1 \Delta z}{\lambda}$.

d)

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$$

$$\begin{aligned} p_{i0}^{n+1} = \frac{1}{F - r\Delta r^2} \left\{ \rho_0 \left(v_{i1}^n [v_{i1}^n \cdot 2r\Delta r^2 - r\Delta r\Delta z^2 (u_{i+10}^n - u_{i0}^{n+1}) - 2r\Delta r^2 v_{i0}^{n+1}] \right. \right. \\ + v_{i0}^{n+1} [(v_{i0}^{n+1} - 2)r\Delta r^2 + r\Delta r\Delta z (u_{i+10}^n - u_{i0}^{n+1}) + r\Delta r^2] \\ + u_{i1}^n [v_{ij}^n \Delta r\Delta z^2 + 2r\Delta r\Delta z (v_{i+10}^n - v_{i0}^{n+1})] \\ - u_{i0}^{n+1} \left[v_{i0}^n \Delta r\Delta z^2 + 2ru_{i0}^n \Delta z^2 + 2r\Delta r\Delta z \cdot (v_{i+10}^n - v_{i0}^{n+1}) \right. \\ \left. + \frac{2v\Delta r\Delta z^2}{r} \right] + u_{i-10}^{n+1} \cdot u_{i0}^n r\Delta z^2 + u_{i+10}^n \cdot \frac{2v\Delta r\Delta z^2}{r} + \frac{vu_{i0}^n \Delta r^2 \Delta z^2}{r^3} \\ \left. + p_{i+10}^n (\Delta r\Delta z^2 + r(\Delta r^2 + \Delta z^2)) + p_{i-10}^{n+1} r\Delta z^2 + p_{i1}^n r\Delta r^2 \right\} \end{aligned}$$

Где $F = \Delta r(\Delta z)^2 + 2r((\Delta r)^2 + (\Delta z)^2)$.

Тогда условия на нижней границы в форме численных схем примут вид:

$$u_{ij}^{n+1} = 0$$

$$u_{ij}^{n+1} = 0$$

$$\begin{aligned}
T_{ij}^{n+1} &= \frac{1}{1 + B_3 \widetilde{h}_1} \left\{ B_1 T_{i+1j}^n + B_2 T_{i-1j}^{n+1} + B_3 \left(2T_{ij+1}^n + \widetilde{h}_1 \left(\widetilde{T} + \frac{q}{h_1} \right) \right) \right\} \\
p_{ij}^{n+1} &= \frac{1}{F - r\Delta r^2} \left\{ \rho_0 \left(v_{ij+1}^n [v_{ij+1}^n \cdot 2r\Delta r^2 - r\Delta r\Delta z^2 (u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2r\Delta r^2 v_{ij}^{n+1} \right] \right. \\
&\quad \left. + v_{ij}^{n+1} [(v_{ij}^{n+1} - 2)r\Delta r^2 + r\Delta r\Delta z (u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1}) + r\Delta r^2] \right. \\
&\quad \left. + u_{ij+1}^n [v_{ij}^n \Delta r\Delta z^2 + 2r\Delta r\Delta z (v_{i+1j}^n - v_{ij}^{n+1})] \right. \\
&\quad \left. - u_{ij}^{n+1} \left[v_{ij}^n \Delta r\Delta z^2 + 2ru_{ij}^n \Delta z^2 + 2r\Delta r\Delta z \cdot (v_{i+1j}^n - v_{ij}^{n+1}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2v\Delta r\Delta z^2}{r} \right] + u_{i-1j}^{n+1} \cdot u_{ij}^n r\Delta z^2 + u_{i+1j}^n \cdot \frac{2v\Delta r\Delta z^2}{r} \right. \\
&\quad \left. + \frac{vu_{ij}^n \Delta r^2 \Delta z^2}{r^3} \right) + p_{i+1j}^n (\Delta r\Delta z^2 + r(\Delta r^2 + \Delta z^2)) \\
&\quad \left. + p_{i-1j}^{n+1} r\Delta z^2 + p_{ij+1}^n r\Delta r^2 \right\} \tag{2.2.4}
\end{aligned}$$

2. Левые граничные условия при $r = 0$

a)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

При $r \rightarrow 0$ первое уравнение системы (2.1.6) примет вид

$$v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left(2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$u_{oj}^{n+1} = C_1 u_{1j}^n + C_2 u_{0j+1}^n + C_3 u_{0j-1}^{n+1} + C_4 p_r$$

$$p_r = -\frac{1}{\rho_0} \frac{p_{1j}^n - p_{0j}^{n+1}}{\Delta r};$$

$$C_1 = \frac{2v(\Delta z)^2}{C}; \quad C_2 = \frac{(\Delta r)^2 (v - v_{0j}^n)}{C}; \quad C_3 = \frac{v(\Delta r)^2}{C}; \quad C_4 = \frac{(\Delta r)^2 (\Delta z)^2}{C};$$

$$C = 2v((\Delta r)^2 + (\Delta z)^2) - v_{0j}^n \Delta z$$

б) Аналогично

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

$$v_{0j}^{n+1} = C_1 v_{1j}^n + C_2 v_{0j+1}^n + C_3 v_{0j-1}^{n+1} + C_4 p_z$$

$$p_z = -\frac{1}{\rho_0} \frac{p_{0j+1}^n - p_{0j}^{n+1}}{\Delta z};$$

$$C_1 = \frac{2v(\Delta z)^2}{C}; \quad C_2 = \frac{(\Delta r)^2(v - v_{0j}^n \Delta z)}{C}; \quad C_3 = \frac{v(\Delta r)^2}{C}; \quad C_4 = \frac{(\Delta r)^2(\Delta z)^2}{C};$$

$$C = 2v((\Delta r)^2 + (\Delta z)^2) - v_{0j}^n \Delta z$$

с)

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

При $r \rightarrow 0$ четвертое уравнение системы (2.1.6) примет вид

$$v \frac{\partial T}{\partial z} = a \left(2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

$$T_{0j}^{n+1} = D_1 T_{1j}^n + D_2 T_{0j+1}^n + D_3 T_{0j-1}^{n+1}$$

$$D_1 = \frac{2a(\Delta z)^2}{D}; \quad D_2 = \frac{(\Delta r)^2(a - v_{0j}^n \Delta z)}{D}; \quad D_3 = \frac{a(\Delta r)^2}{D};$$

$$D = 2a((\Delta r)^2 + (\Delta z)^2) - v_{0j}^n (\Delta r)^2 \Delta z$$

д)

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

Если $j > 2$, то выражение для давления будет

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2L} \left\{ \rho_0 \left(v_{i+1j}^n \left[(v_{i+1j}^n - 2v_{ij}^{n+1} + v_{ij}^n) (\Delta r)^2 - \Delta r \Delta z (u_{i+i_j}^n - u_{ij}^{n+1}) \right] \right. \right. \\
+ v_{ij}^{n+1} \left[(v_{ij}^{n+1} - 2v_{ij}^n) \Delta r^2 - 3\Delta r \Delta z (u_{ij+1}^n - u_{ij}^{n+1}) \right. \\
+ \Delta r \Delta z (u_{i+i_j}^n - u_{ij}^{n+1}) \left. \right] + v_{i+1j}^n \left[3\Delta r \Delta z (u_{ij+1}^n - u_{ij}^{n+1}) \right] + v_{ij-1}^{n+1} \\
\cdot v_{ij}^n (\Delta r)^2 + (u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1}) \left[u_{ij}^n (\Delta z)^2 + \frac{7v(\Delta z)^2}{6\Delta r} \right] + \frac{7v(\Delta z)^2}{6\Delta r} [u_{ij-1}^{n+1} \\
- u_{ij-2}^{n+1}] \left. \right) + 2(\Delta z)^2 p_{i+1j}^n + (p_{ij+1}^n + p_{ij-1}^n) (\Delta r)^2 \left. \right\}
\end{aligned}$$

иначе

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2L} \left\{ \rho_0 \left(v_{i+1j}^n \left[(v_{i+1j}^n - 2v_{ij}^{n+1} + v_{ij}^n) (\Delta r)^2 - \Delta r \Delta z (u_{i+i_j}^n - u_{ij}^{n+1}) \right] \right. \right. \\
+ v_{ij}^{n+1} \left[(v_{ij}^{n+1} - 2v_{ij}^n) \Delta r^2 - 3\Delta r \Delta z (u_{ij+1}^n - u_{ij}^{n+1}) \right. \\
+ \Delta r \Delta z (u_{i+i_j}^n - u_{ij}^{n+1}) \left. \right] + v_{i+1j}^n \left[3\Delta r \Delta z (u_{ij+1}^n - u_{ij}^{n+1}) \right] + v_{ij-1}^{n+1} \\
\cdot v_{ij}^n (\Delta r)^2 + (u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1}) \left[u_{ij}^n (\Delta z)^2 + \frac{7v(\Delta z)^2}{6\Delta r} \right] \left. \right) \\
+ 2(\Delta z)^2 p_{i+1j}^n + (p_{ij+1}^n + p_{ij-1}^n) (\Delta r)^2 \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$u_{ij}^{n+1} = C_1 u_{i+1j}^n + C_2 u_{ij+1}^n + C_3 u_{ij-1}^{n+1} + C_4 p_r$$

$$v_{ij}^{n+1} = C_1 v_{i+1j}^n + C_2 v_{ij+1}^n + C_3 v_{ij-1}^{n+1} + C_4 p_z$$

$$T_{ij}^{n+1} = D_1 T_{i+1j}^n + D_2 T_{ij+1}^n + D_3 T_{ij-1}^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2L} \left\{ \rho_0 \left(v_{i+1j}^n \left[(v_{i+1j}^n - 2v_{ij}^{n+1} + v_{ij}^n) (\Delta r)^2 - \Delta r \Delta z (u_{i+i_j}^n - \right. \right. \right. \\
u_{ij}^{n+1}) \left. \right] + v_{ij}^{n+1} \left[(v_{ij}^{n+1} - 2v_{ij}^n) \Delta r^2 - 3\Delta r \Delta z (u_{ij+1}^n - u_{ij}^{n+1}) + \right. \\
\Delta r \Delta z (u_{i+i_j}^n - u_{ij}^{n+1}) \left. \right] + v_{i+1j}^n \left[3\Delta r \Delta z (u_{ij+1}^n - u_{ij}^{n+1}) \right] + v_{ij-1}^{n+1} \cdot \\
v_{ij}^n (\Delta r)^2 + (u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1}) \left[u_{ij}^n (\Delta z)^2 + \frac{7v(\Delta z)^2}{6\Delta r} \right] + \frac{7v(\Delta z)^2}{6\Delta r} [u_{ij-1}^{n+1} - \\
u_{ij-2}^{n+1}] \left. \right) + 2(\Delta z)^2 p_{i+1j}^n + (p_{ij+1}^n + p_{ij-1}^n) (\Delta r)^2 \left. \right\}, \text{ при } j > 2
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{n+1} = & \frac{1}{2L} \left\{ \rho_0 \left(v_{ij+1}^n \left[\left(v_{ij+1}^n - 2v_{ij}^{n+1} + v_{ij}^n \right) (\Delta r)^2 - \Delta r \Delta z \left(u_{i+i_j}^n - \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. u_{ij}^{n+1} \right) \right] + v_{ij}^{n+1} \left[\left(v_{ij}^{n+1} - 2v_{ij}^n \right) \Delta r^2 - 3\Delta r \Delta z \left(u_{ij+1}^n - u_{ij}^{n+1} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \Delta r \Delta z \left(u_{i+i_j}^n - u_{ij}^{n+1} \right) \right] + v_{i+1j}^n \left[3\Delta r \Delta z \left(u_{ij+1}^n - u_{ij}^{n+1} \right) \right] + v_{ij-1}^{n+1} \cdot \right. \\
& \left. v_{ij}^n (\Delta r)^2 + \left(u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1} \right) \left[u_{ij}^n (\Delta z)^2 + \frac{7\nu(\Delta z)^2}{6\Delta r} \right] \right\} + 2(\Delta z)^2 p_{i+1j}^n + \\
& \left. \left(p_{ij+1}^n + p_{ij-1}^n \right) (\Delta r)^2 \right\}, \text{ при } j = 2
\end{aligned}$$

Где $p_r = -\frac{1}{\rho_0} \frac{p_{i+1j}^n - p_{ij}^{n+1}}{\Delta r}$, $p_z = -\frac{1}{\rho_0} \frac{p_{ij+1}^n - p_{ij}^{n+1}}{\Delta z}$.

3. Верхние граничные условия при $z = h_0$ ($j_{max} = N$)

a)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h_0} = -\frac{\sigma_T}{\nu\rho_0} \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$\begin{aligned}
u_{iN}^{n+1} = & A_1 u_{i+1N}^n - A_2 \frac{2\sigma_T \Delta z}{\nu\rho_0 \Delta r} (T_{i+1N}^n - T_{iN}^{n+1}) + A_3 u_{iN-1}^{n+1} + A_4 u_{iN-1}^{n+1} \\
& + A_5 \frac{(p_{i+1N}^n - p_{iN}^{n+1})}{\Delta r}
\end{aligned}$$

b) Аналогично

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=h_0} = -\frac{\sigma_T}{\nu\rho_0} \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$\begin{aligned}
v_{iN}^{n+1} = & A_1 v_{i+1N}^n - A_2 \frac{2\sigma_T \Delta z}{\nu\rho_0 \Delta r} (T_{i+1N}^n - T_{iN}^{n+1}) + A_3 v_{iN-1}^{n+1} + A_4 v_{iN-1}^{n+1} \\
& + A_5 \frac{(p_{iN}^n - p_{iN-1}^{n+1})}{\Delta z}
\end{aligned}$$

c)

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=h_0} = h_2 (\tilde{T} - T)$$

Используем правую разностную форму

$$-\lambda \frac{T_{ij+1}^n - T_{ij-1}^{n+1}}{2\Delta z} \Big|_{z=h_0} = h_1(\tilde{T} - T_{ij}^n)$$

$$-\lambda \frac{T_{iN+1}^n - T_{iN-1}^{n+1}}{2\Delta z} = h_2(\tilde{T} - T_{ij}^n)$$

$$T_{i,N+1}^n = \widetilde{h}_2(\tilde{T} - T_{iN}^n) + T_{iN-1}^{n+1}$$

Необходимо привести к выражению (2.2.2) для T при $z = h_0$:

$$T_{i0}^{n+1} = B_1 T_{i+10}^n + B_2 T_{i-10}^{n+1} + B_3 T_{i1}^n + B_4 T_{i,-1}^{n+1}$$

Таким образом, получим

$$T_{iN}^{n+1} = \frac{1}{1 + B_3 \widetilde{h}_2} \{ B_1 T_{i+1N}^n + B_2 T_{i-1N}^{n+1} + B_3 (\tilde{T} \widetilde{h}_2 + T_{iN-1}^{n+1}) + B_4 T_{iN-1}^{n+1} \}$$

Где $\widetilde{h}_2 = \frac{2h_2\Delta z}{\lambda}$.

d)

$$\frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$$

$$\begin{aligned} p_{iN}^{n+1} = \frac{1}{F} \left\{ \rho_0 \left(v_{iN}^n [v_{iN}^n \cdot 2r\Delta r^2 - r\Delta r\Delta z(u_{i+1N}^n - u_{iN}^{n+1}) - 2r\Delta r^2 v_{iN}^{n+1}] \right. \right. \\ + v_{iN}^{n+1} [(v_{iN}^{n+1} - 2)r\Delta r^2 + r\Delta r\Delta z(u_{i+1N}^n - u_{iN}^{n+1})] \\ - u_{iN}^n \left[(v_{iN}^n \Delta r + 2ru_{iN}^n)\Delta z^2 + 2r\Delta r\Delta z(v_{i+1N}^n - v_{iN}^{n+1}) + \frac{2v\Delta r\Delta z^2}{r} \right] \\ + u_{i-1N}^{n+1} \cdot u_{iN}^n r\Delta z^2 + \frac{v\Delta r\Delta z^2}{r} \left[2 \cdot u_{i+1N}^n + \frac{u_{iN}^n \Delta r}{\Delta r^2} \right] \\ + p_{i+1N}^n (\Delta r\Delta z^2 + r(\Delta r^2 + \Delta z^2)) + p_{i-1N}^{n+1} r\Delta z^2 \\ \left. + (p_{iN+1}^n + p_{iN-1}^{n+1}) r\Delta r^2 \right\} \end{aligned}$$

Тогда при $z = h_0$, получим

$$\begin{aligned}
u_{ij}^{n+1} &= A_1 u_{i+1j}^n - A_2 \frac{2\sigma_T \Delta z}{\nu \rho_0 \Delta r} (T_{i+1j}^n - T_{ij}^{n+1}) + A_3 u_{ij-1}^{n+1} + A_4 u_{ij-1}^{n+1} \\
&\quad + A_5 p_r \\
v_{ij}^{n+1} &= A_1 v_{i+1j}^n - A_2 \frac{2\sigma_T \Delta z}{\nu \rho_0 \Delta r} (T_{i+1j}^n - T_{ij}^{n+1}) + A_3 v_{ij-1}^{n+1} + A_4 v_{ij-1}^{n+1} \\
&\quad + A_5 p_z \\
T_{ij}^{n+1} &= D_1 T_{1j}^n + D_2 T_{0j+1}^n + D_3 T_{0j-1}^{n+1} \\
p_{ij}^{n+1} &= \frac{1}{F} \left\{ \rho_0 \left(v_{ij}^n [v_{ij}^n \cdot 2r\Delta r^2 - r\Delta r\Delta z (u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1}) - 2r\Delta r^2 v_{ij}^{n+1}] \right. \right. \\
&\quad + v_{ij}^{n+1} [(v_{ij}^{n+1} - 2)r\Delta r^2 + r\Delta r\Delta z (u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1})] \\
&\quad - u_{ij}^n \left[(v_{ij}^n \Delta r + 2ru_{ij}^n) \Delta z^2 + 2r\Delta r\Delta z (v_{i+1j}^n - v_{ij}^{n+1}) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2v\Delta r\Delta z^2}{r} \right] + u_{i-1j}^{n+1} \cdot u_{ij}^n r\Delta z^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{v\Delta r\Delta z^2}{r} \left[2 \cdot u_{i+1j}^n + \frac{u_{ij}^n \Delta r}{\Delta r^2} \right] \right) \\
&\quad + p_{i+1j}^n (\Delta r\Delta z^2 + r(\Delta r^2 + \Delta z^2)) + p_{i-1j}^{n+1} r\Delta z^2 \\
&\quad \left. + (p_{ij+1}^n + p_{ij-1}^{n+1}) r\Delta r^2 \right\} \tag{2.2.6}
\end{aligned}$$

Где $p_r = -\frac{1}{\rho_0} \frac{p_{i+1j}^n - p_{ij}^{n+1}}{\Delta r}$, $p_z = -\frac{1}{\rho_0} \frac{p_{ij}^n - p_{ij-1}^{n+1}}{\Delta z}$.

4. Правые граничные условия при $r = R$ ($i_{max} = M$):

$$\begin{cases} u|_{r=R} = 0 \\ v|_{r=R} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r}|_{r=R} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial r}|_{r=R} = 0 \end{cases}$$

a)

$$u_{Mj}^n = 0$$

b)

$$v_{Mj}^n = 0$$

c)

$$T_{Mj}^{n+1} = \frac{1}{1 - B_1} \{B_2 T_{M-1j}^{n+1} + B_3 T_{Mj+1}^n + B_4 T_{Mj-1}^{n+1}\}$$

d)

Тогда при $r = R$ ($i_{max} = M$), получим

$$u_{ij}^n = 0$$

$$v_{ij}^n = 0$$

$$T_{ij}^{n+1} = \frac{1}{1 - B_1} \{B_2 T_{i-1j}^{n+1} + B_3 T_{ij+1}^n + B_4 T_{ij-1}^{n+1}\}$$

$$p_{ij}^{n+1} = \frac{1}{F} \left\{ \rho_0 \left(v_{ij+1}^n [v_{ij+1}^n \cdot 2r\Delta r^2 - r\Delta r\Delta z(u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1}) - 2r\Delta r^2 v_{ij}^{n+1}] \right. \right. \\ + v_{ij}^{n+1} [(v_{ij}^{n+1} - 2)r\Delta r^2 + r\Delta r\Delta z(u_{ij}^n - u_{ij}^{n+1})] \\ + u_{ij+1}^n [v_{ij}^n \Delta r\Delta z^2 + 2r\Delta r\Delta z(v_{ij}^n - v_{ij}^{n+1})] + v_{ij-1}^{n+1} r\Delta r^2 \\ - u_{ij}^{n+1} [\Delta z^2 (v_{ij}^n \Delta r + 2ru_{ij}^n) + 2r\Delta z \\ \cdot (u_{ij}^n \Delta z + \Delta r(v_{ij}^n - v_{ij}^{n+1})) - \frac{2v\Delta r\Delta z^2}{r}] + u_{i-1j}^{n+1} u_{ij}^n r\Delta z^2 \\ + \frac{v\Delta r\Delta z^2}{r} \left(2 \cdot u_{ij}^n + \frac{u_{ij}^n \Delta r\Delta z}{r^2} \right) \\ + p_{ij}^n (\Delta r\Delta z^2 + r(\Delta r^2 + \Delta z^2)) + p_{i-1j}^{n+1} r\Delta z^2 \\ \left. + (p_{ij+1}^n + p_{ij-1}^{n+1}) r\Delta r^2 \right\} \quad (2.2.7)$$

В. Граничные условия в углах рассматриваемой области

1. Левый нижний угол при $r = 0$ и $z = 0$

a)

$$u_{ij}^{n+1} = 0$$

b)

$$v_{ij}^{n+1} = 0$$

с)

- Нижнее граничное условие

$$T_{ij-1}^{n+1} = \widetilde{h}_1(\widetilde{T} - T_{ij}^{n+1}) + q \frac{\widetilde{h}_1}{h_1} + T_{ij+1}^n$$

- Левое граничное условие из формулы (2.2.5)

$$T_{ij}^{n+1} = D_1 T_{i+1j}^n + D_2 T_{ij+1}^n + D_3 T_{ij-1}^{n+1}$$

Подставим нижнее граничное условие в левое граничное условие, тогда получим

$$T_{ij}^{n+1} = \frac{1}{1 + D_3 \widetilde{h}_1} \left\{ D_1 T_{i+1j}^n + (D_2 + D_3) T_{ij+1}^n + D_3 \widetilde{h}_1 \left(\widetilde{T} + q \frac{\widetilde{h}_1}{h_1} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } p_{ij}^{n+1} = & \frac{1}{F - r \Delta r^2} \left\{ \rho_0 \left(v_{ij+1}^n [v_{ij+1}^n \cdot 2r \Delta r^2 - r \Delta r \Delta z^2 (u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1}) - \right. \right. \\ & 2r \Delta r^2 v_{ij}^{n+1}] + v_{ij}^{n+1} [(v_{ij}^{n+1} - 2)r \Delta r^2 + r \Delta r \Delta z (u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1}) + r \Delta r^2] + \\ & u_{ij+1}^n [v_{ij}^n \Delta r \Delta z^2 + 2r \Delta r \Delta z (v_{i+1j}^n - v_{ij}^{n+1})] - u_{ij}^{n+1} [v_{ij}^n \Delta r \Delta z^2 + 2r u_{ij}^n \Delta z^2 + \\ & 2r \Delta r \Delta z \cdot (v_{i+1j}^n - v_{ij}^{n+1}) + \frac{2v \Delta r \Delta z^2}{r}] + u_{i-1j}^{n+1} \cdot u_{ij}^n r \Delta z^2 + u_{i+1j}^n \cdot \frac{2v \Delta r \Delta z^2}{r} + \\ & \left. \left. \frac{v u_{ij}^n \Delta r^2 \Delta z^2}{r^3} \right) + p_{i+1j}^n (\Delta r \Delta z^2 + r (\Delta r^2 + \Delta z^2)) + p_{i-1j}^{n+1} r \Delta z^2 + p_{ij+1}^n r \Delta r^2 \right\} \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$u_{ij}^n = 0$$

$$v_{ij}^n = 0$$

(2.2.8)

$$T_{ij}^{n+1} = \frac{1}{1 + D_3 \widetilde{h}_1} \left\{ D_1 T_{i+1j}^n + (D_2 + D_3) T_{ij+1}^n + D_3 \widetilde{h}_1 \left(\widetilde{T} + q \frac{\widetilde{h}_1}{h_1} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{n+1} = \frac{1}{F - r\Delta r^2} \left\{ \rho_0 \left(v_{ij+1}^n [v_{ij+1}^n \cdot 2r\Delta r^2 - r\Delta r\Delta z^2 (u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1}) \right. \right. \\
- 2r\Delta r^2 v_{ij}^{n+1}] \\
+ v_{ij}^{n+1} [(v_{ij}^{n+1} - 2)r\Delta r^2 + r\Delta r\Delta z (u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1}) + r\Delta r^2] \\
+ u_{ij+1}^n [v_{ij}^n \Delta r\Delta z^2 + 2r\Delta r\Delta z (v_{i+1j}^n - v_{ij}^{n+1})] \\
- u_{ij}^{n+1} [v_{ij}^n \Delta r\Delta z^2 + 2ru_{ij}^n \Delta z^2 + 2r\Delta r\Delta z \cdot (v_{i+1j}^n - v_{ij}^{n+1}) \\
+ \frac{2v\Delta r\Delta z^2}{r}] + u_{i-1j}^{n+1} \cdot u_{ij}^n r\Delta z^2 + u_{i+1j}^n \cdot \frac{2v\Delta r\Delta z^2}{r} \\
+ \left. \left. \frac{vu_{ij}^n \Delta r^2 \Delta z^2}{r^3} \right) + p_{i+1j}^n (\Delta r\Delta z^2 + r(\Delta r^2 + \Delta z^2)) \right. \\
\left. + p_{i-1j}^{n+1} r\Delta z^2 + p_{ij+1}^n r\Delta r^2 \right\}
\end{aligned}$$

Где $i = 0, j = 0$.

2. Правый нижний угол $r = R$ и $z = 0$

a)

$$u_{ij}^{n+1} = 0$$

b)

$$v_{ij}^{n+1} = 0$$

c)

- Нижнее граничное условие

$$T_{ij-1}^{n+1} = \widetilde{h}_1 (\widetilde{T} - T_{ij}^{n+1}) + q \frac{\widetilde{h}_1}{h_1} + T_{ij+1}^n$$

- Правое граничное условие из формулы (2.2.7)

$$T_{ij}^{n+1} = \frac{1}{1 - B_1} \{B_2 T_{i-1j}^{n+1} + B_3 T_{ij+1}^n + B_4 T_{ij-1}^{n+1}\}$$

Подставим нижнее граничное условие в правое граничное условие и получим

$$T_{ij}^{n+1} = \frac{1}{1 - B_1 + B_4 \widetilde{h}_1} \left\{ B_1 T_{i-1j}^{n+1} + B_2 T_{i-1j}^{n+1} + (B_3 + B_4) T_{ij+1}^n + B_4 \left(\widetilde{h}_1 \widetilde{T} + q \frac{\widetilde{h}_1}{h_1} \right) \right\}$$

Поскольку $z = 0$, то выполнится равенство $B_3 = B_4$, тогда получим

$$T_{ij}^{n+1} = \frac{1}{1 - B_1 + B_3 \widetilde{h}_1} \left\{ B_1 T_{i-1j}^{n+1} + B_2 T_{i-1j}^{n+1} + 2B_3 T_{ij+1}^n + B_3 \left(\widetilde{h}_1 \widetilde{T} + q \frac{\widetilde{h}_1}{h_1} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } p_{ij}^{n+1} = & \frac{1}{F - r\Delta r^2} \left\{ \rho_0 \left(v_{ij+1}^n [v_{ij+1}^n \cdot 2r\Delta r^2 - r\Delta r\Delta z^2 (u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1}) - \right. \right. \\ & 2r\Delta r^2 v_{ij}^{n+1}] + v_{ij}^{n+1} [(v_{ij}^{n+1} - 2)r\Delta r^2 + r\Delta r\Delta z (u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1}) + r\Delta r^2] + \\ & u_{ij+1}^n [v_{ij}^n \Delta r\Delta z^2 + 2r\Delta r\Delta z (v_{i+1j}^n - v_{ij}^{n+1})] - u_{ij}^{n+1} [v_{ij}^n \Delta r\Delta z^2 + 2ru_{ij}^n \Delta z^2 + \\ & 2r\Delta r\Delta z \cdot (v_{i+1j}^n - v_{ij}^{n+1}) + \frac{2v\Delta r\Delta z^2}{r}] + u_{i-1j}^{n+1} \cdot u_{ij}^n r\Delta z^2 + u_{i+1j}^n \cdot \frac{2v\Delta r\Delta z^2}{r} + \\ & \left. \left. \frac{vu_{ij}^n \Delta r^2 \Delta z^2}{r^3} \right) + p_{i+1j}^n (\Delta r\Delta z^2 + r(\Delta r^2 + \Delta z^2)) + p_{i-1j}^{n+1} r\Delta z^2 + p_{ij+1}^n r\Delta r^2 \right\} \end{aligned}$$

Таким образом, получим численные схемы для правого нижнего угла рассматриваемой области

$$u_{ij}^n = 0$$

$$v_{ij}^n = 0$$

$$\begin{aligned} T_{ij}^{n+1} = & \frac{1}{1 - B_1 + B_3 \widetilde{h}_1} \left\{ B_1 T_{i-1j}^{n+1} + B_2 T_{i-1j}^{n+1} + 2B_3 T_{ij+1}^n \right. \\ & \left. + B_3 \left(\widetilde{h}_1 \widetilde{T} + q \frac{\widetilde{h}_1}{h_1} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{n+1} = \frac{1}{F - r\Delta r^2} \left\{ \rho_0 \left(v_{ij+1}^n [v_{ij+1}^n \cdot 2r\Delta r^2 - r\Delta r\Delta z^2 (u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1}) \right. \right. \\
- 2r\Delta r^2 v_{ij}^{n+1}] \\
+ v_{ij}^{n+1} [(v_{ij}^{n+1} - 2)r\Delta r^2 + r\Delta r\Delta z (u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1}) + r\Delta r^2] \\
+ u_{ij+1}^n [v_{ij}^n \Delta r\Delta z^2 + 2r\Delta r\Delta z (v_{i+1j}^n - v_{ij}^{n+1})] \\
- u_{ij}^{n+1} \left[v_{ij}^n \Delta r\Delta z^2 + 2ru_{ij}^n \Delta z^2 + 2r\Delta r\Delta z \cdot (v_{i+1j}^n - v_{ij}^{n+1}) \right. \\
+ \left. \frac{2v\Delta r\Delta z^2}{r} \right] + u_{i-1j}^{n+1} \cdot u_{ij}^n r\Delta z^2 + u_{i+1j}^n \cdot \frac{2v\Delta r\Delta z^2}{r} \\
+ \left. \frac{vu_{ij}^n \Delta r^2 \Delta z^2}{r^3} \right) + p_{i+1j}^n (\Delta r\Delta z^2 + r(\Delta r^2 + \Delta z^2)) \\
+ p_{i-1j}^{n+1} r\Delta z^2 + p_{ij+1}^n r\Delta r^2 \left. \right\}
\end{aligned}$$

Где $i = M, j = 0$.

3. Верхний левый угол $r = 0$ и $z = h_0$

а)

Выпишем верхнее граничное условие для радиальной скорости

$$u_{ij}^{n+1} = -2 \frac{\sigma_T}{\nu \rho_0} \frac{\Delta z}{\Delta r} (T_{i+1j}^n - T_{ij}^{n+1}) + v_{ij-1}^{n+1}$$

Выпишем левое граничное условие

$$u_{ij}^{n+1} = C_1 u_{i+1j}^n + C_2 u_{ij+1}^n + C_3 u_{ij-1}^{n+1} + C_4 p_r$$

Тогда получим окончательное выражение для радиальной скорости

$$u_{ij}^{n+1} = C_1 u_{i+1j}^n - 2C_2 \frac{\sigma_T}{\nu \rho_0} \frac{\Delta z}{\Delta r} (T_{i+1j}^n - T_{ij}^{n+1}) + (C_2 + C_3) u_{ij-1}^{n+1} + C_4 p_r$$

б) Аналогично

$$u_{ij}^{n+1} = -2 \frac{\sigma_T}{\nu \rho_0} \frac{\Delta z}{\Delta r} (T_{i+1j}^n - T_{ij}^{n+1}) + u_{ij-1}^{n+1}$$

$$v_{ij}^{n+1} = C_1 v_{i+1j}^n + C_2 v_{ij+1}^n + C_3 v_{ij-1}^{n+1} + C_4 p_z$$

$$v_{ij}^{n+1} = C_1 v_{i+1j}^n - 2C_2 \frac{\sigma_T}{\nu \rho_0} \frac{\Delta Z}{\Delta r} (T_{i+1j}^n - T_{ij}^{n+1}) + (C_2 + C_3) v_{ij-1}^{n+1} + C_4 p_z$$

c)

$$T_{ij+1}^n = \widetilde{h}_2 (\widetilde{T} - T_{ij}^{n+1}) + T_{ij-1}^{n+1}$$

$$T_{ij}^{n+1} = D_1 T_{1j}^n + D_2 T_{0j+1}^n + D_3 T_{0j-1}^{n+1}$$

$$T_{ij}^{n+1} = \frac{1}{1 + D_2 \widetilde{h}_2} \{D_1 T_{i+1j}^n + (D_2 + D_3) T_{0j-1}^{n+1} + D_2 \widetilde{h}_2 \widetilde{T}\}$$

d)

$$p_{ij}^{n+1} = \frac{1}{F} \left\{ \rho_0 \left(v_{ij}^n [v_{ij}^n \cdot 2r\Delta r^2 - r\Delta r\Delta z (u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1}) - 2r\Delta r^2 v_{ij}^{n+1}] + \right. \right.$$

$$v_{ij}^{n+1} [(v_{ij}^{n+1} - 2)r\Delta r^2 + r\Delta r\Delta z (u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1})] - u_{ij}^n [(v_{ij}^n \Delta r + 2ru_{ij}^n) \Delta z^2 +$$

$$2r\Delta r\Delta z (v_{i+1j}^n - v_{ij}^{n+1}) + \frac{2v\Delta r\Delta z^2}{r}] + u_{i-1j}^{n+1} \cdot u_{ij}^n r\Delta z^2 + \frac{v\Delta r\Delta z^2}{r} \left[2 \cdot u_{i+1j}^n + \frac{u_{ij}^n \Delta r}{\Delta r^2} \right] \left. \right\} +$$

$$p_{i+1j}^n (\Delta r\Delta z^2 + r(\Delta r^2 + \Delta z^2)) + p_{i-1j}^{n+1} r\Delta z^2 + (p_{ij+1}^n + p_{ij-1}^{n+1}) r\Delta r^2 \left. \right\}$$

$$u_{ij}^{n+1} = C_1 u_{i+1j}^n - 2C_2 \frac{\sigma_T}{\nu \rho_0} \frac{\Delta Z}{\Delta r} (T_{i+1j}^n - T_{ij}^{n+1}) + (C_2 + C_3) u_{ij-1}^{n+1} + C_4 p_r$$

$$v_{ij}^{n+1} = C_1 v_{i+1j}^n - 2C_2 \frac{\sigma_T}{\nu \rho_0} \frac{\Delta Z}{\Delta r} (T_{i+1j}^n - T_{ij}^{n+1}) + (C_2 + C_3) v_{ij-1}^{n+1} + C_4 p_z \quad (2.2.10)$$

$$T_{ij}^{n+1} = \frac{1}{1 + D_2 \widetilde{h}_2} \{D_1 T_{i+1j}^n + (D_2 + D_3) T_{0j-1}^{n+1} + D_2 \widetilde{h}_2 \widetilde{T}\}$$

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{n+1} = \frac{1}{F} \left\{ \rho_0 \left(v_{ij}^n [v_{ij}^n \cdot 2r\Delta r^2 - r\Delta r\Delta z(u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1}) - 2r\Delta r^2 v_{ij}^{n+1}] \right. \right. \\
+ v_{ij}^{n+1} [(v_{ij}^{n+1} - 2)r\Delta r^2 + r\Delta r\Delta z(u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1})] \\
- u_{ij}^n \left[(v_{ij}^n \Delta r + 2ru_{ij}^n)\Delta z^2 + 2r\Delta r\Delta z(v_{i+1j}^n - v_{ij}^{n+1}) \right. \\
+ \left. \left. \frac{2v\Delta r\Delta z^2}{r} \right] + u_{i-1j}^{n+1} \cdot u_{ij}^n r\Delta z^2 \right. \\
+ \left. \frac{v\Delta r\Delta z^2}{r} \left[2 \cdot u_{i+1j}^n + \frac{u_{ij}^n \Delta r}{\Delta r^2} \right] \right) \\
+ p_{i+1j}^n (\Delta r\Delta z^2 + r(\Delta r^2 + \Delta z^2)) + p_{i-1j}^{n+1} r\Delta z^2 \\
+ (p_{ij+1}^n + p_{ij-1}^{n+1}) r\Delta r^2 \left. \right\}
\end{aligned}$$

Где $i = 0, j = N$.

4. Верхний правый угол $r = R$ и $z = h_0$

a)

$$u_{ij}^n = 0$$

b)

$$v_{ij}^n = 0$$

с) По аналогии с предыдущими расчетами, подставляем выражение для верхней границы в правое граничное условие

$$T_{ij+1}^n = \widetilde{h}_2 (\widetilde{T} - T_{ij}^{n+1}) + T_{ij-1}^{n+1}$$

$$T_{ij}^{n+1} = \frac{1}{1 - B_1} \{ B_2 T_{i-1j}^{n+1} + B_3 T_{ij+1}^n + B_4 T_{ij-1}^{n+1} \}$$

$$T_{ij}^{n+1} = \frac{1}{1 - B_1 + B_3 \widetilde{h}_2} \{ B_2 T_{i-1j}^{n+1} + (B_3 + B_4) T_{ij-1}^{n+1} + B_3 \widetilde{h}_2 \widetilde{T} \}$$

$$\begin{aligned}
d) \quad p_{ij}^{n+1} = & \frac{1}{F} \left\{ \rho_0 \left(v_{ij}^n [v_{ij}^n \cdot 2r\Delta r^2 - r\Delta r\Delta z(u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1}) - 2r\Delta r^2 v_{ij}^{n+1}] + \right. \right. \\
& v_{ij}^{n+1} [(v_{ij}^{n+1} - 2)r\Delta r^2 + r\Delta r\Delta z(u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1})] - u_{ij}^n [(v_{ij}^n \Delta r + 2ru_{ij}^n)\Delta z^2 + \\
& 2r\Delta r\Delta z(v_{i+1j}^n - v_{ij}^{n+1}) + \frac{2v\Delta r\Delta z^2}{r}] + u_{i-1j}^{n+1} \cdot u_{ij}^n r\Delta z^2 + \frac{v\Delta r\Delta z^2}{r} \left[2 \cdot u_{i+1j}^n + \frac{u_{ij}^n \Delta r}{\Delta r^2} \right] \Big) + \\
& \left. p_{i+1j}^n (\Delta r\Delta z^2 + r(\Delta r^2 + \Delta z^2)) + p_{i-1j}^{n+1} r\Delta z^2 + (p_{ij+1}^n + p_{ij-1}^{n+1}) r\Delta r^2 \right\}
\end{aligned}$$

$$u_{ij}^n = 0$$

$$v_{ij}^n = 0$$

$$T_{ij}^{n+1} = \frac{1}{1 - B_1 + B_3 \widetilde{h}_2} \{ B_2 T_{i-1j}^{n+1} + (B_3 + B_4) T_{ij-1}^{n+1} + B_3 \widetilde{h}_2 \widetilde{T} \}$$

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{n+1} = & \frac{1}{F} \left\{ \rho_0 \left(v_{ij}^n [v_{ij}^n \cdot 2r\Delta r^2 - r\Delta r\Delta z(u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1}) - 2r\Delta r^2 v_{ij}^{n+1}] \right. \right. \\
& + v_{ij}^{n+1} [(v_{ij}^{n+1} - 2)r\Delta r^2 + r\Delta r\Delta z(u_{i+1j}^n - u_{ij}^{n+1})] \\
& - u_{ij}^n \left[(v_{ij}^n \Delta r + 2ru_{ij}^n)\Delta z^2 + 2r\Delta r\Delta z(v_{i+1j}^n - v_{ij}^{n+1}) \right. \\
& \left. \left. + \frac{2v\Delta r\Delta z^2}{r} \right] + u_{i-1j}^{n+1} \cdot u_{ij}^n r\Delta z^2 \right. \\
& \left. + \frac{v\Delta r\Delta z^2}{r} \left[2 \cdot u_{i+1j}^n + \frac{u_{ij}^n \Delta r}{\Delta r^2} \right] \right) \\
& + p_{i+1j}^n (\Delta r\Delta z^2 + r(\Delta r^2 + \Delta z^2)) + p_{i-1j}^{n+1} r\Delta z^2 \\
& \left. + (p_{ij+1}^n + p_{ij-1}^{n+1}) r\Delta r^2 \right\} \tag{2.2.11}
\end{aligned}$$

Где $i = M, j = N$.

2.3. Инициализация программы

1. Ввод входных параметров

$\tilde{T} = 293.15$	[K]	Температура окружающей среды
$\nu = 1.0006 \cdot 10^{-6}$	[м ² /с]	Кинематическая вязкость
$\sigma_T = 0.145 \cdot 10^{-3}$	[Н/м]	Температурный коэффициент поверхностного натяжения
$a = 0.143 \cdot 10^{-6}$	[м ² /с]	Коэффициент теплопроводности
$\rho_0 = 1000$	[кг/м ³]	Плотность воды
$h_0 = z \cdot 10^{-4}$	[м]	Начальная толщина слоя воды, где z – значение
$g = 9.8$	[м/с ²]	Ускорение свободного падения
$\lambda = 0.6$	[Вт/(м · K)]	Коэффициент теплопроводности
$h_1 = 5$	[Вт/(м ² · K)]	Коэффициент теплоотдачи на нижней границе
$h_2 = 50$	[Вт/(м ² · K)]	Коэффициент теплоотдачи на верхней границе
$R = 6 \cdot 10^{-3}$	[м]	Радиус рассматриваемой области
$p_0 = 101325$	[Па]	Атмосферное давление
$W = 0.2$	[Вт]	Мощность лазера
$r_b = 0.395 \cdot 10^{-3}$	[м]	Радиус луча лазера
$\varepsilon = 1e - 4$	–	Задаваемая точность

2. Запуск программного кода в MATLAB (*Приложение 2*). Процесс сошелся на 12 124 итерации.

ГЛАВА 3. ОПИСАНИЕ И АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы рассчитали модель локально нагреваемого горизонтального слоя вязкой несжимаемой жидкости без ПАВ, изменив начальную толщину слоя: $h_0 = 0,275$ [мм], $h_0 = 0,3$ [мм], $h_0 = 0,4$ [мм], $h_0 = 0,5$ [мм], $h_0 = 0,6$ [мм], $h_0 = 0,7$ [мм], $h_0 = 0,8$ [мм]. На следующих рисунках представлены график изменения и поведения толщины слоя при локальном нагреве, поля скоростей и температур при разных начальной толщине, график скоростей деформации и диаграмма отклонений деформации от начальной толщины слоя, выраженная в процентах.

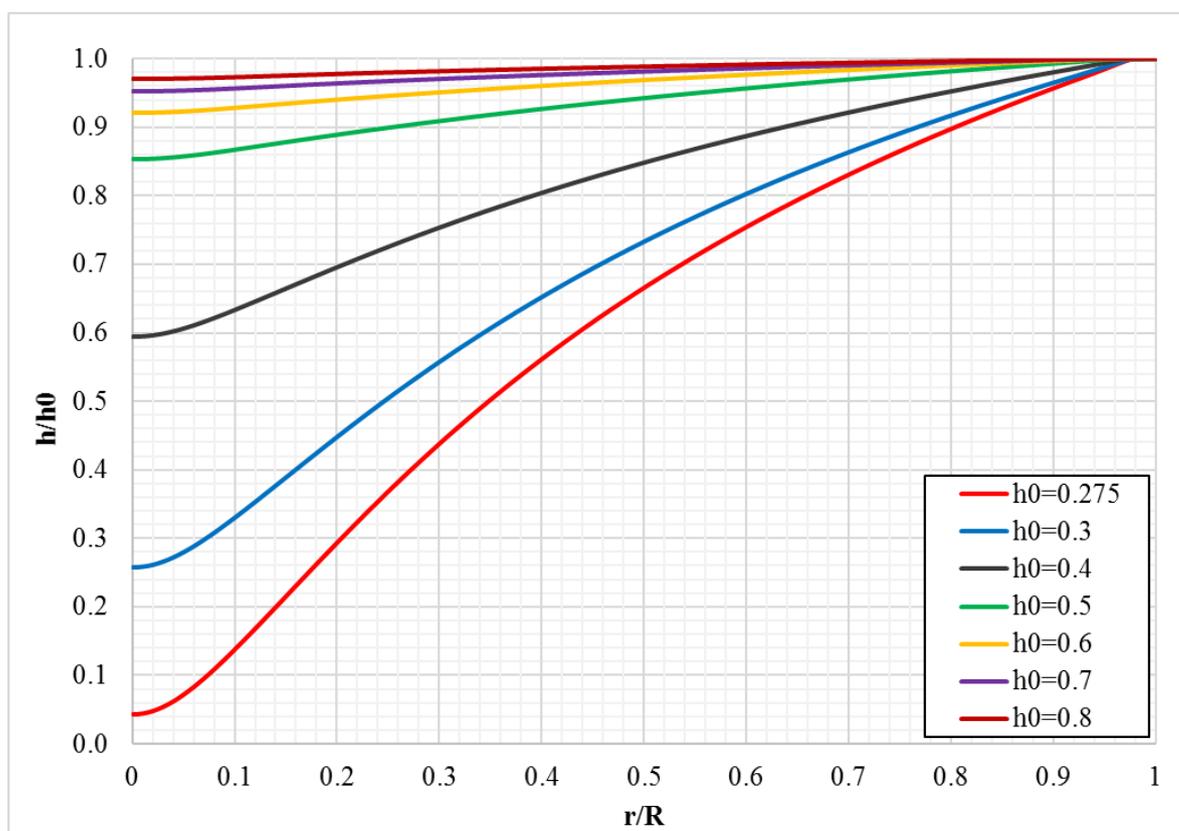


Рисунок 3 Безразмерные профили для различной начальной толщины слоев жидкости

На рисунке 3 показаны радиальные распределения толщины слоя жидкости для различных значений начальной толщины слоя (h_0). Отсюда следует, что чем меньше толщина исходного слоя, тем больше относительная глубина при одном и том же нагреве. Это очевидно, так как нагревается меньше жидкости.

Поле скоростей

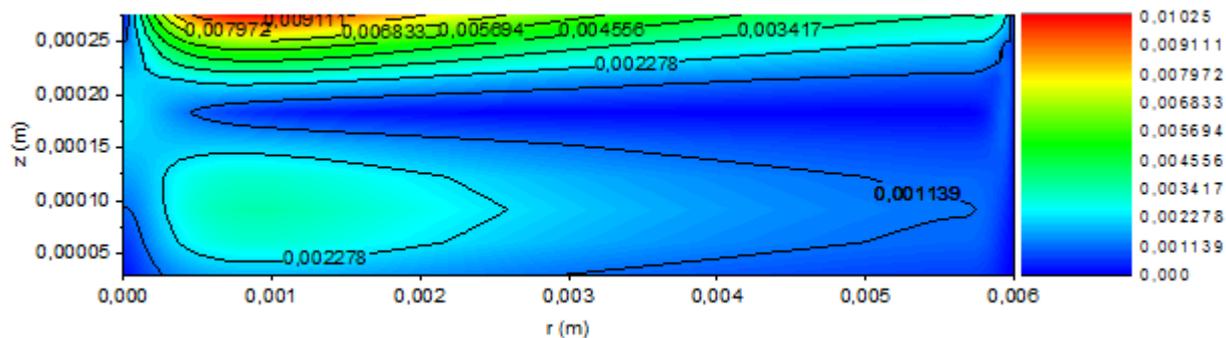


Рисунок 4 Поле скоростей [м/с], при $h_0=0.275$ [мм]

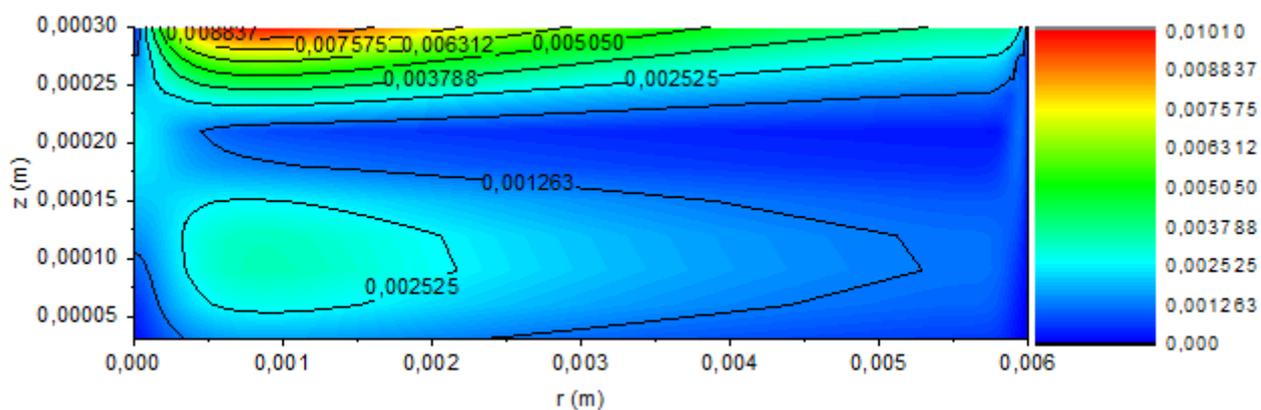


Рисунок 5 Поле скоростей [м/с], при $h_0=0.3$ [мм]

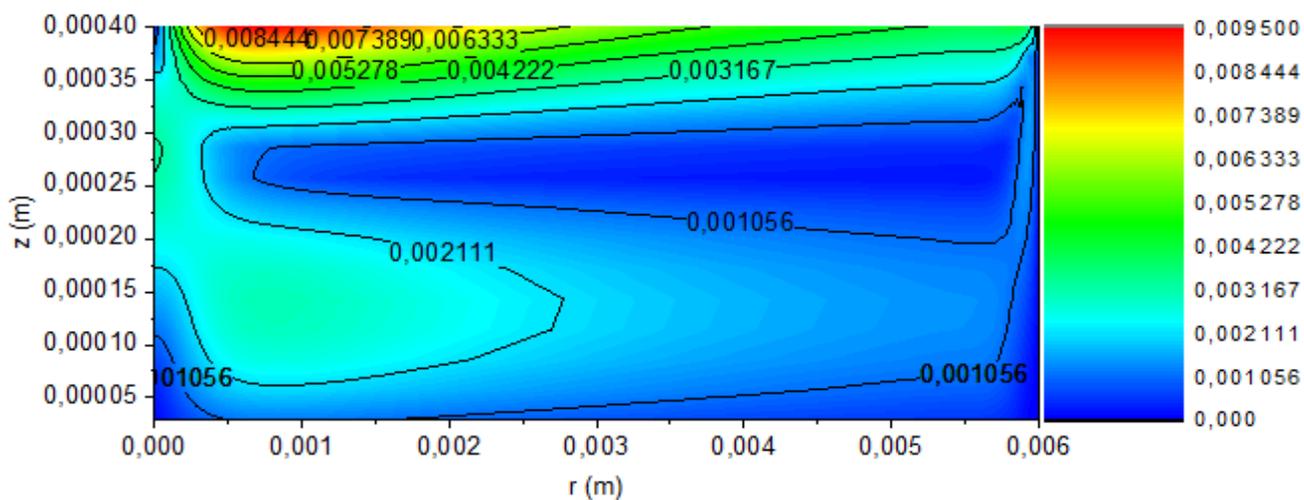


Рисунок 6 Поле скоростей [м/с], при $h_0=0.4$ [мм]

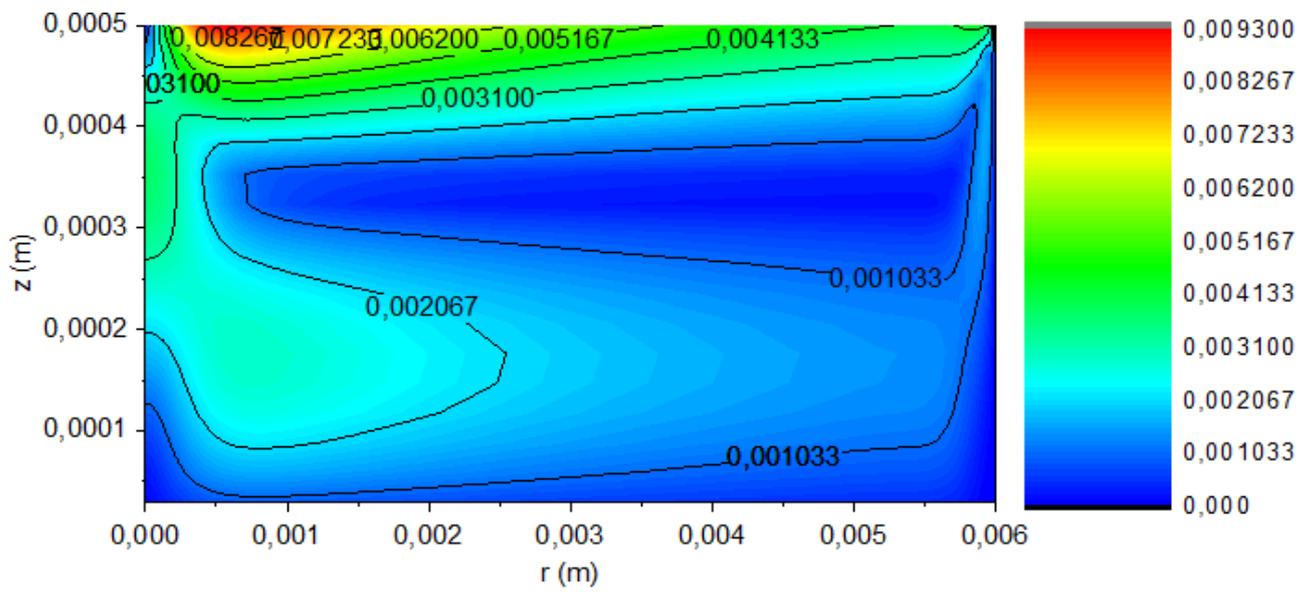


Рисунок 7 Поле скоростей [м/с], при $h_0=0.5$ [мм]

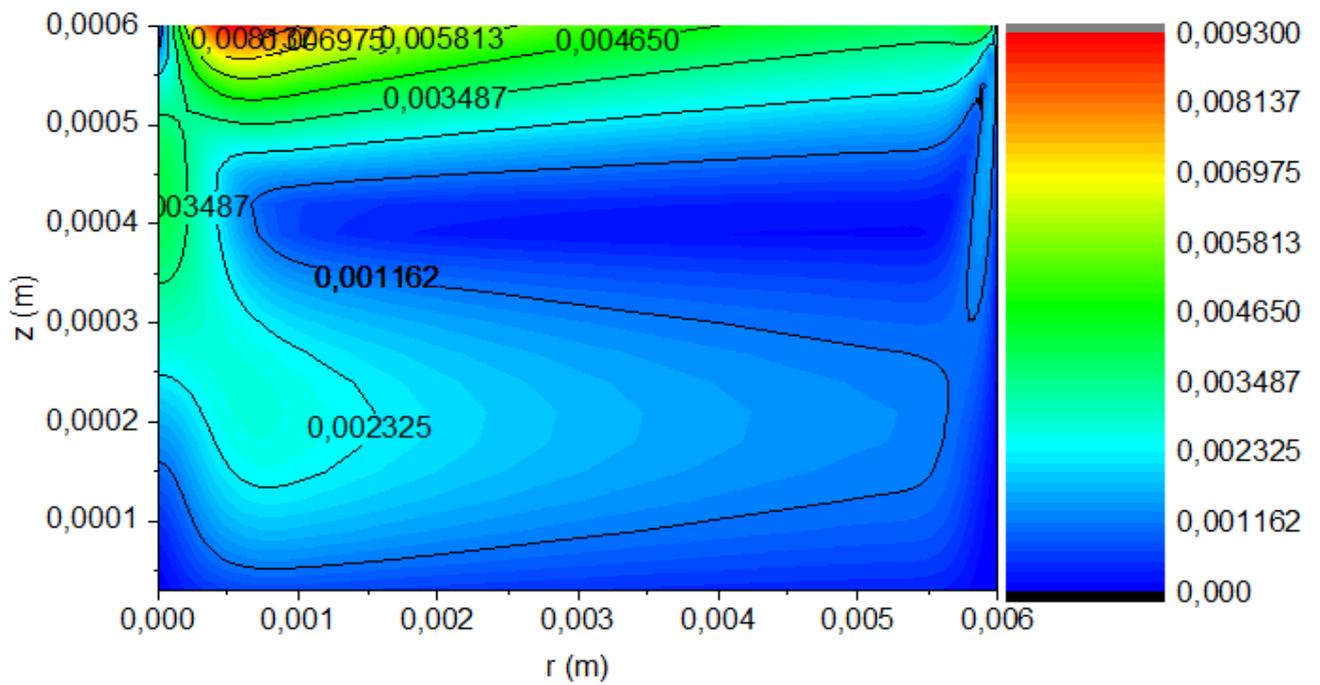


Рисунок 8 Поле скоростей [м/с], при $h_0=0.6$ [мм]

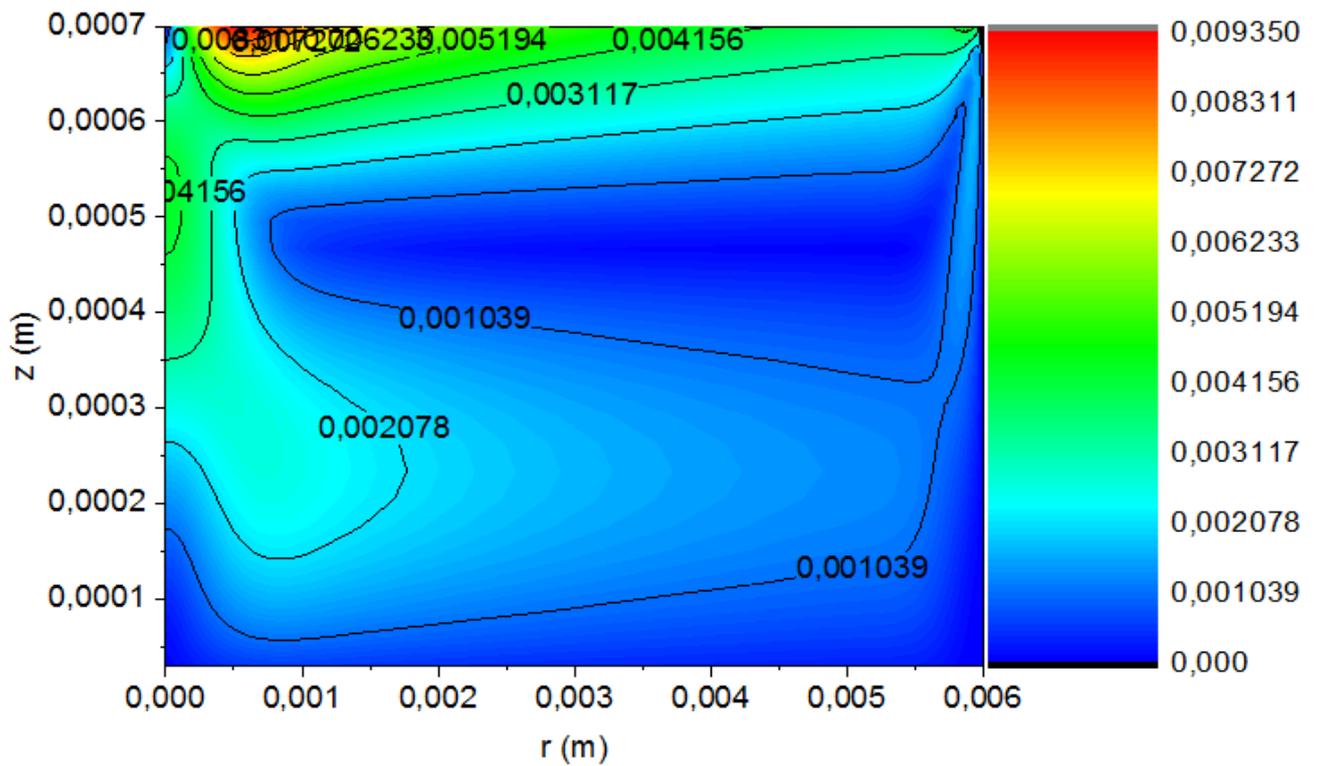


Рисунок 9 Поле скоростей [м/с], при $h_0=0.7$ [мм]

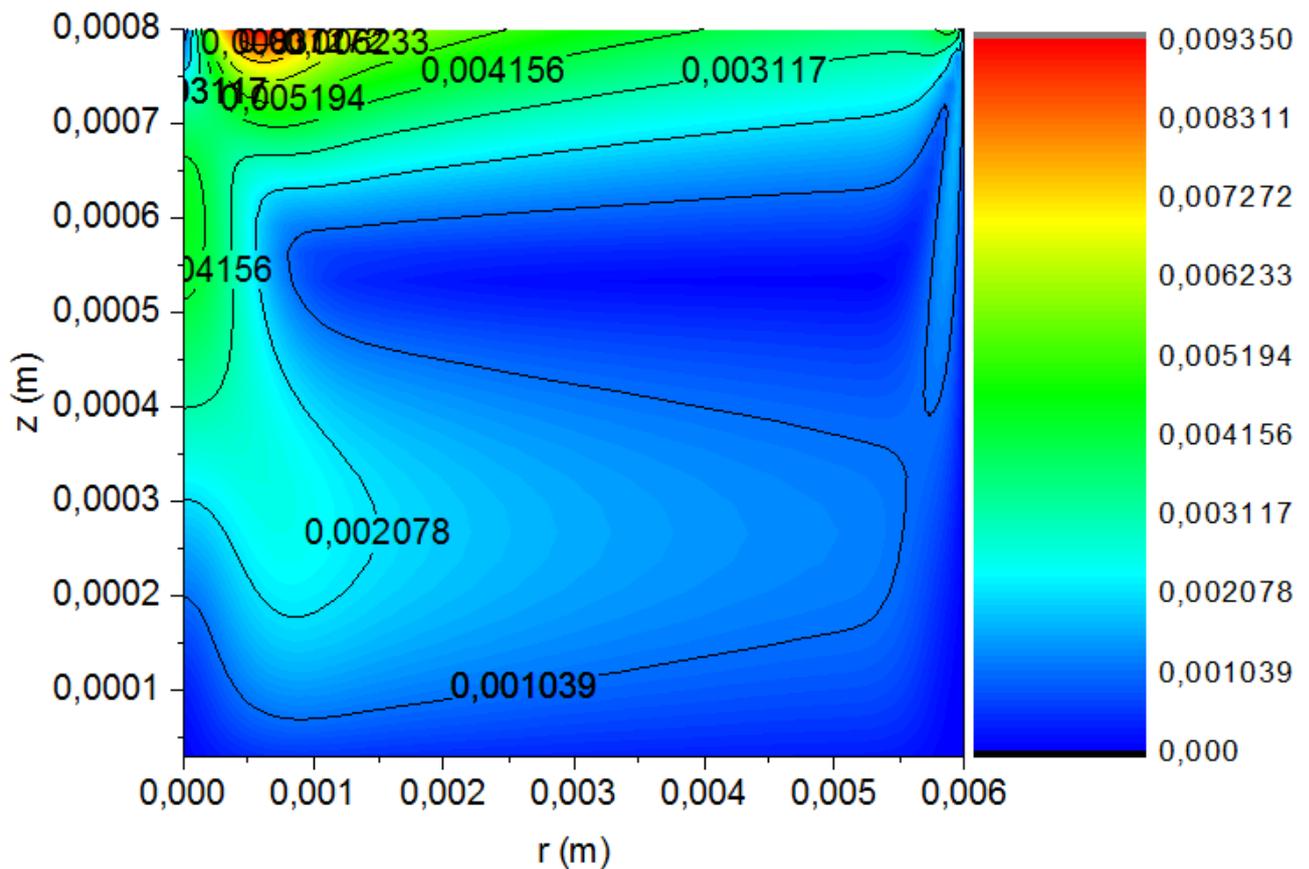


Рисунок 10 Поле скоростей [м/с], при $h_0=0.8$ [мм]

На рисунках 4-10 представлены поля скоростей для разных начальных толщин слоя жидкости. Стоит отметить, что максимальная скорость потока на

свободной поверхности составляет 1 [мм/с]. Физическое объяснение этого факта состоит в том, что на поверхности имеются термокапиллярные силы, вызванные неравномерным распределением тепла. Верхний слой жидкости движется от центра нагрева к краям рассматриваемой области, в то время как, в нижних слоях жидкости возникает обратное движение, вызванное под действием сил тяжести. Это инициирует стабильное циркуляционное движение жидкости вблизи места нагрева.

Температурное поле

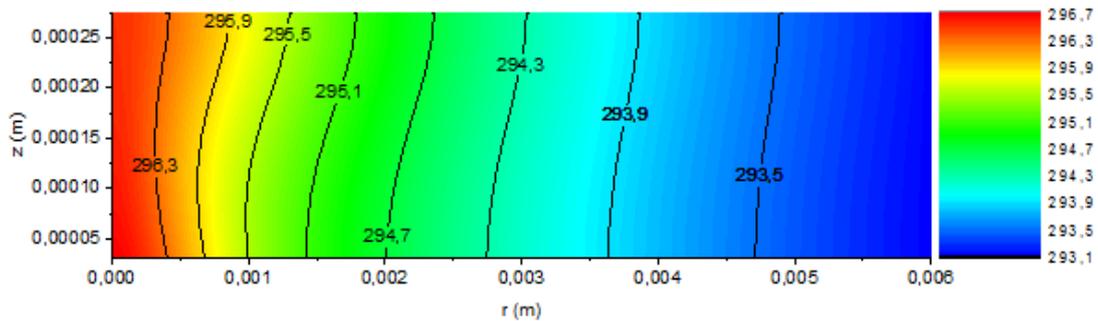


Рисунок 11 Поле температуры [м/с], при $h_0=0.275$ [мм]

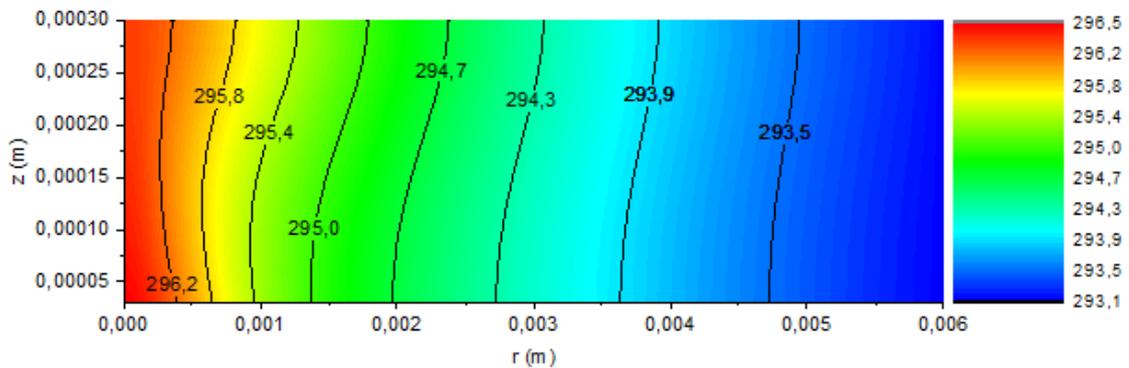


Рисунок 12 Поле температуры [м/с], при $h_0=0.3$ [мм]

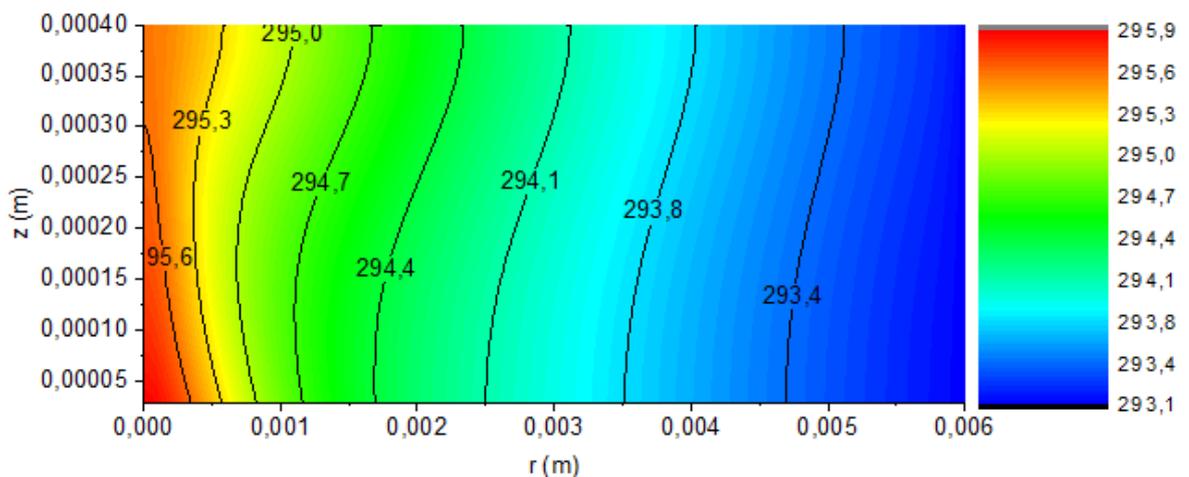


Рисунок 13 Поле температуры [м/с], при $h_0=0.4$ [мм]

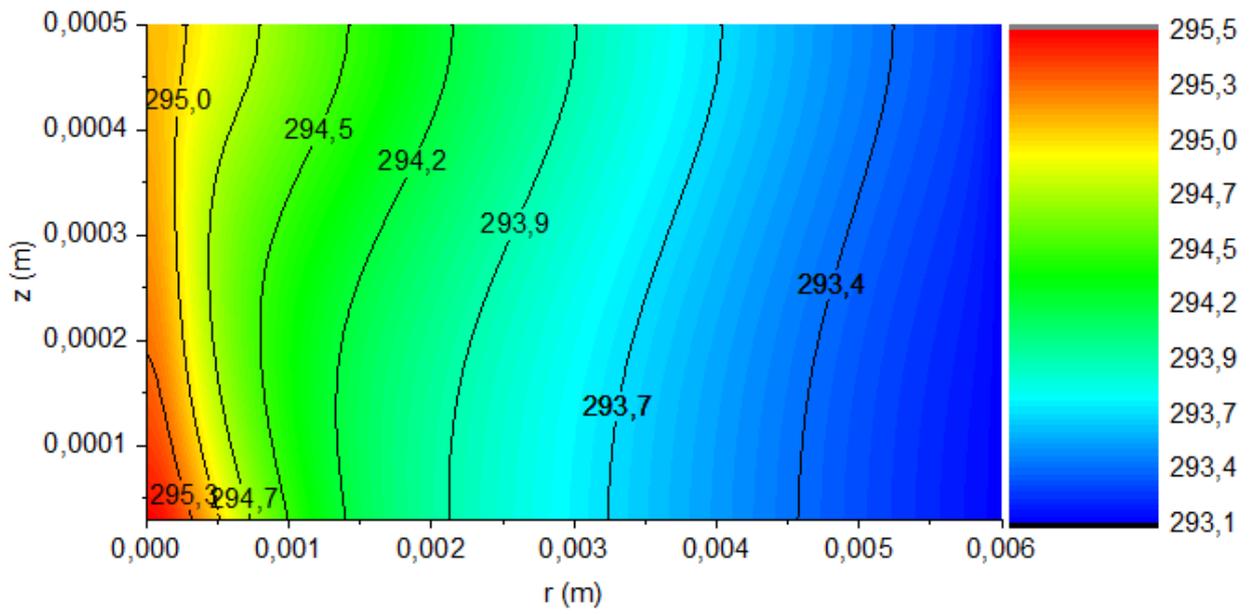


Рисунок 14 Поле температуры [м/с], при $h_0=0.5$ [мм]

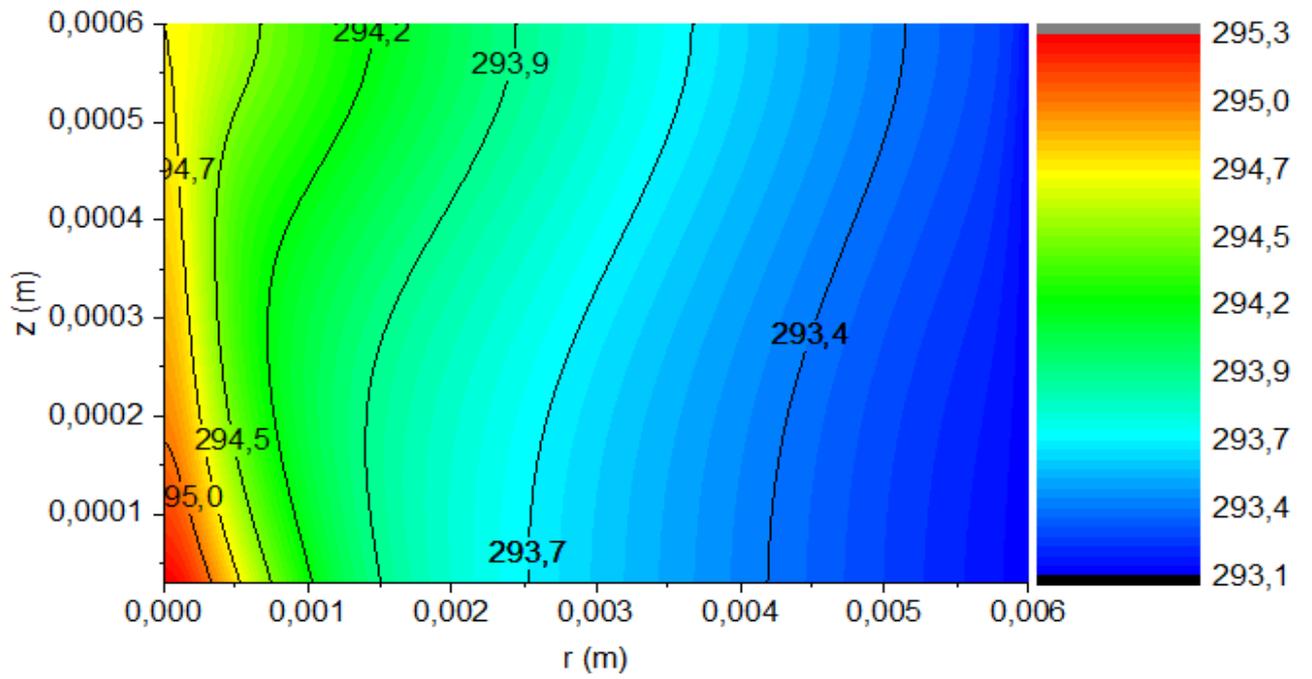


Рисунок 15 Поле температуры [м/с], при $h_0=0.6$ [мм]

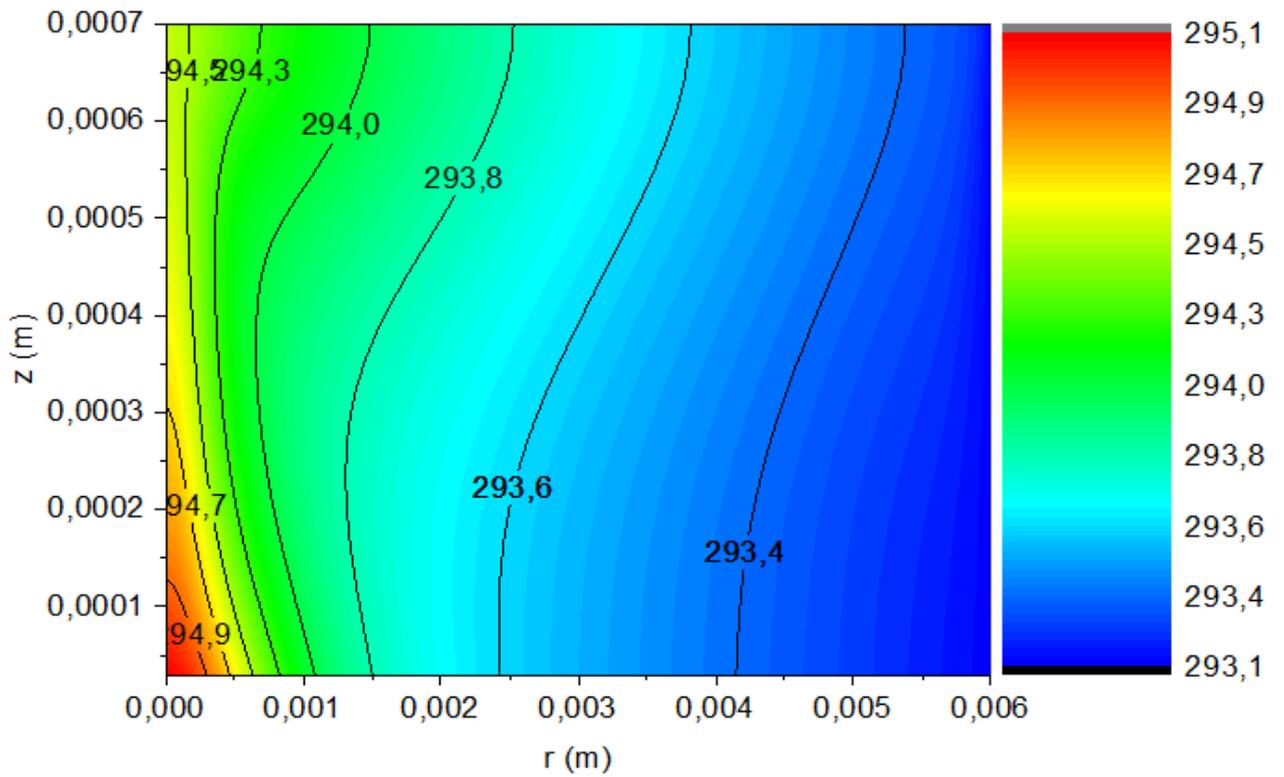


Рисунок 16 Поле температуры [м/с], при $h_0=0.7$ [мм]

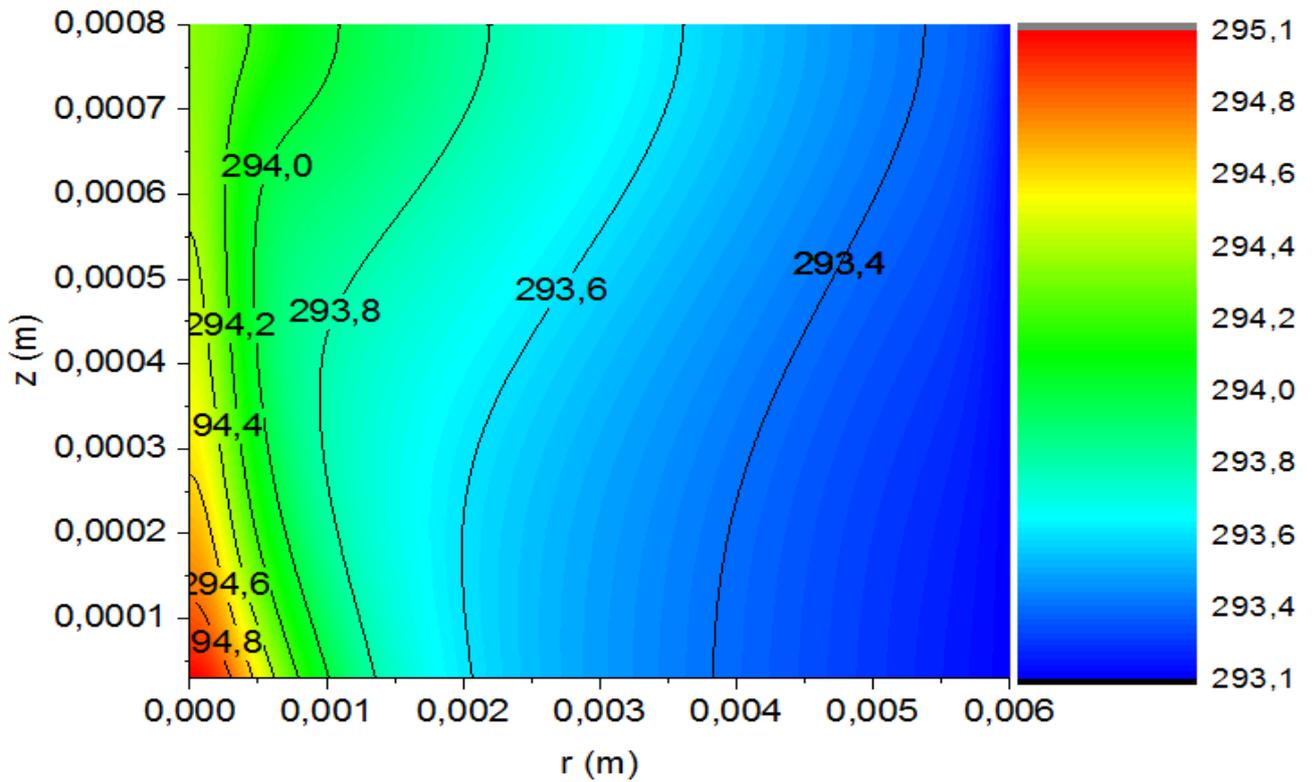


Рисунок 17 Поле температуры [м/с], при $h_0=0.8$ [мм]

На рисунках 11-17 показаны распределение температуры в слое жидкости при различных толщинах начального слоя этой жидкости. Заметим, что в

тонком слое максимальная температура выше, чем в более толстом в силу размера своей начальной толщины.

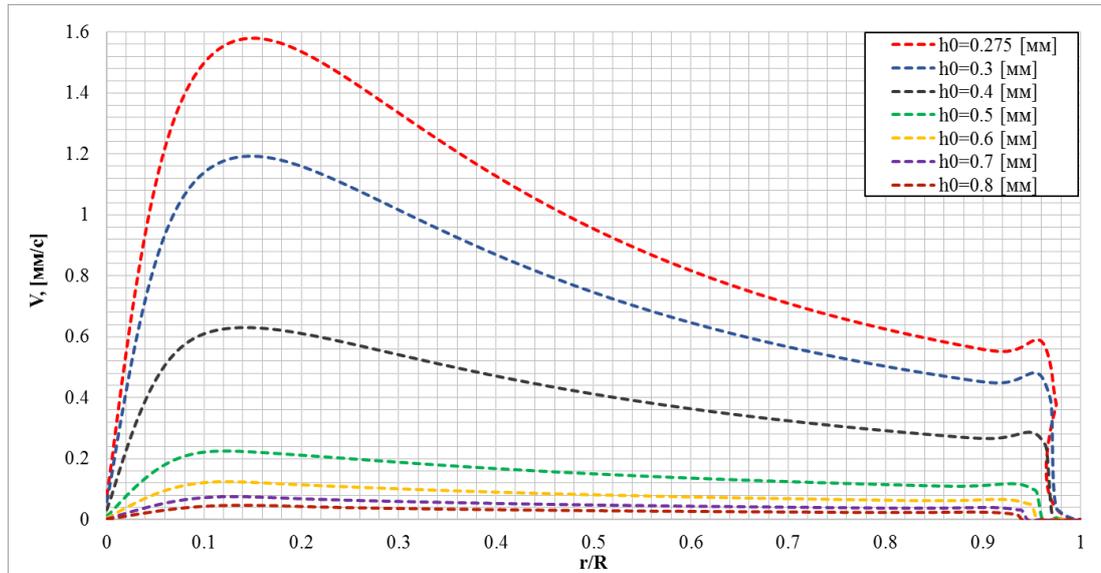


Рисунок 18 Скорости изменений деформаций поверхности жидкости при изменении начальной толщины

Из рисунка 19 мы видим, что, начиная с $h_0 = 0.7$ [мм] и увеличивая толщину, скорость практически одинаковая, однако, скорость деформации тонкого слоя значительно превышает скорость деформации толстого слоя жидкости. Это можно объяснить быстрым нагревом тонкого слоя и самой высокой скоростью жидкости на поверхности (равной 1 [мм/с]).

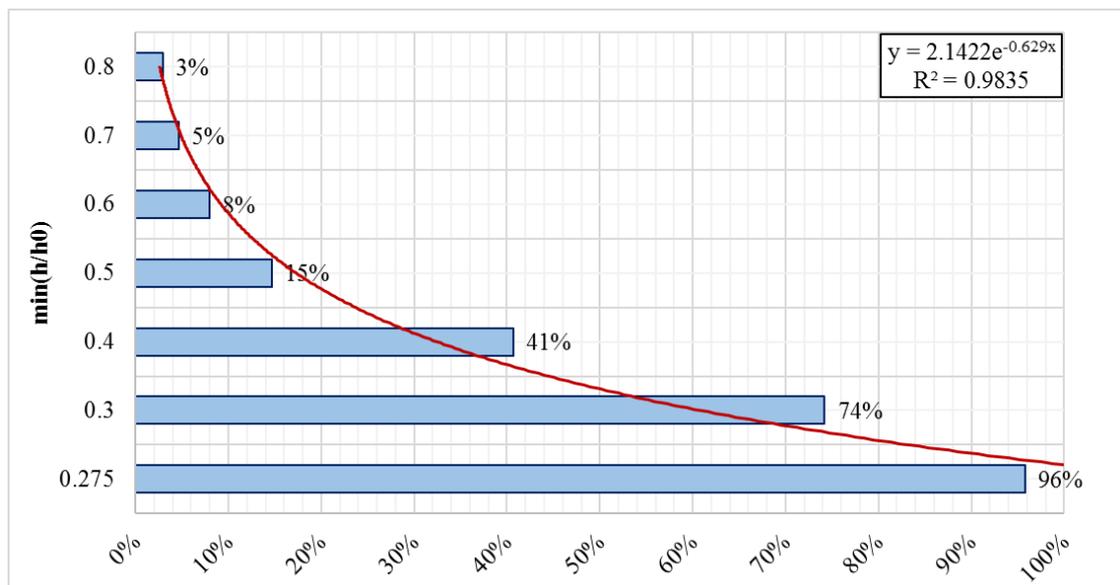


Рисунок 19 Процент отклонения от $h/h_0=1$ [мм]

На рисунке 18 представлено на сколько процентов деформируется свободная поверхность в зависимости от своей начальной толщины одинаково

нагреваемого слоя жидкости. Красным цветом показана экспоненциальная линия тренда. На рисунке также выведено уравнение линии тренда, которое сначала описывает принцип изменения глубины прогиба в зависимости от начальной толщины слоя жидкости, а затем отсекает полученные значения. Отсюда следует, что на данном этапе исследования поведения микросистемы без ПАВ не предоставляется возможным получить закономерность, которой подчиняется деформация поверхности. Это говорит о том, что данная задача требует дальнейшей исследовательской работы.

Получить чистую жидкость (без ПАВ) удается очень редко и только в экспериментальных установках, поскольку это очень сложный и трудоемкий процесс. Моделируя и исследуя задачу локального нагрева горизонтального слоя воды без поверхностно-активных веществ, мы получили, что тонкий слой жидкости проявляет большую деформацию. Подобные результаты решения такой задачи с учетом определенных допущений и упрощений, используемых при выводе уравнения для давления, были получены и показаны в статье И. В. Марчук «Термокапиллярная деформация тонкого локально нагретого горизонтального слоя жидкости». Мы решали данную задачу без упрощений и выводили выражение для давления из уравнений Навье-Стокса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, численные расчеты с предложенной выше моделью тонкого горизонтального слоя вязкой несжимаемой жидкости с локальным нагревом показали, что локальный нагрев этого слоя вызывает деформацию поверхности жидкости и устойчивое циркуляционное движение, которое образуется под действием термокапиллярных сил и гравитации.

Таким образом, выделим основные выводы проделанной работы:

1. изучена литература по теме диссертационной работы,
2. разработана математическая модель и поставлена соответствующая краевая задача математической физики термокапиллярного течения в тонком горизонтальном слое вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью при локальном нагревании этого слоя без поверхностно-активных веществ,
3. выведена и представлена система уравнений в численном виде,
4. написан программный код в MATLAB, используя итерационный метод Гаусса-Зейделя,
5. получена и описана деформация свободной поверхности,
6. представлены поля скоростей и температур для разных начальных толщин,
7. построен график скоростей деформации в зависимости от безразмерной длины (радиуса) слоя воды,
8. представлена диаграмма отклонений деформации от начальной толщины слоя, выраженная в процентах,
9. определены основные выводы:
 - жидкость имеет максимальную скорость на поверхности в области максимального градиента температуры, равная 1 [мм/с];
 - чем меньше толщина начального слоя, тем больше относительная деформация поверхности при том же нагреве,
 - в тонком слое жидкости максимальная температура выше, чем в более толстом в силу размера своей начальной толщины,

- скорость деформации тонкого слоя значительно превышает скорость деформации толстого слоя жидкости.

На данном этапе исследования поведения термокапиллярной деформации горизонтального слоя вязкой несжимаемой жидкости при локальном нагреве этого слоя без ПАВ, не предоставляется возможным получить закономерность, которой подчиняется деформация поверхности. Поэтому данная проблема требует дальнейшей исследовательской работы.

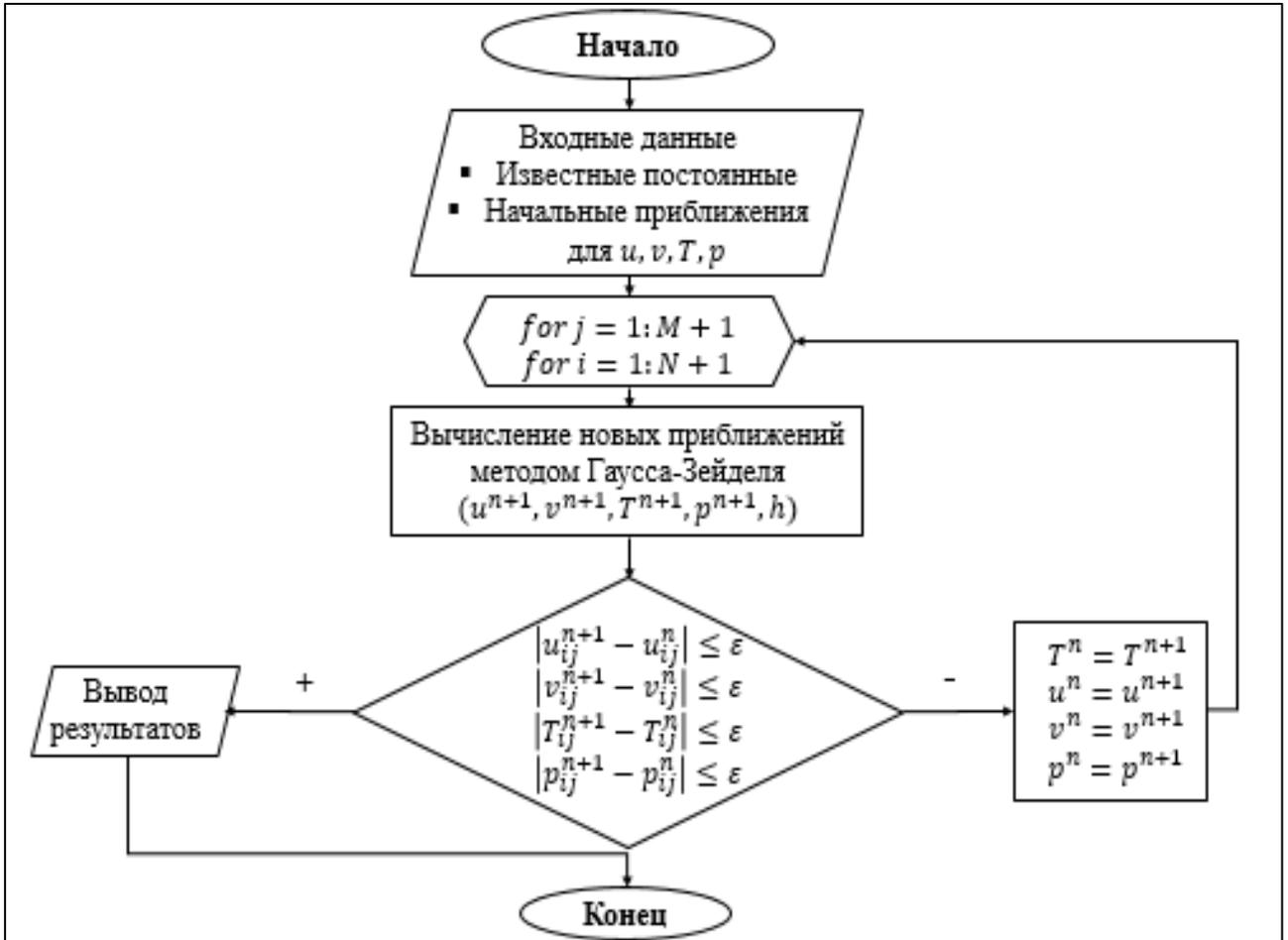
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] – Гордеева В. Ю., Теоретическое исследование влияния термо- и концентрационно-капиллярных эффектов на динамику тонкого слоя испаряющейся полярной жидкости//Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 3-5, 13. – 2014.
- [2] – Зуев А. Л., Тепловая и концентрационная конвекция Марангони в тонких слоях жидкости тема диссертации и автореферата по ВАК РФ 01.02.05, доктор физико-математических наук. – 2005.
- [3] – Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М., ГИДРОДИНАМИКА, Москва: Наука, 1979.
- [4] – Marchuk I.V., Thermocapillary deformation of a thin locally heated horizontal liquid layer// Journal of Engineering Thermophysics. – 2009. - №.3. – С. 227-237.
- [5] – Федорец А. А., Эффекты тепломассопереноса при локальном нагреве межфазной поверхности жидкость-газ, автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук. – 2011.
- [6] – Федорец А. А., Капельный кластер. Письма в ЖЭТФ. — 2004. — № 8. — С .457-459.

Приложение 1

Блок-схема численного моделирования термокапиллярной деформации при локальном нагреве поверхности воды с использованием численного метода Гаусса-Зейделя

Гаусса-Зейделя



Приложение 2. Код программы, выполненной в MATLAB

```
clear all
clc

format short e;

% Settings known parameters
T_env = 20 + 273.15;           % Temperature environment, K
nu = 1.006 * 10 ^(-6);        % Kinematic viscosity, m ^ 2 / c
sigma_T = 0.145*10^(-3);      % Temperature coefficient of surface tension, N / m
a = 0.143 * 10 ^ (- 6);       % Coefficient of thermal diffusivity, m ^ 2 / c
ro0 = 1000;                   % Density of water, kg / m ^ 3
h0 = 4*10 ^ (-4);            % Initial water layer thickness, m
g = 9.8;                      % Acceleration of free fall, m / s ^ 2
epsilon = 10 ^ (-4);         % Specified accuracy
lambda = 0.6;                 % Heat conductivity coefficient, W / (m * K)
h1 = 5;                      % Heat transfer coefficient at the lower limit, W / (m ^ 2 * K)
h2 = 50;                     % Heat transfer coefficient at the upper limit, W / (m ^ 2 * K)
R = 6 * 10 ^ (- 3);          % Radius of the considered area, m
M = 200;                     % The number of steps along the Or axis
N = 40;                      % The number of steps along the Oz axis
p0 = 101325;                 % Atmosphere pressure, Pa
dr = R / (M-1);              % Step on Or axis
dz = h0 / (N-1);            % Oz axis pitch
k = 0;                       % Iteration count
W = 0.2;                    % Laser power, W
rb = 0.395 * 10 ^ (- 3);     % Radius of the laser beam, m

H1=2*h1*dz/lambda;
H2=2*h2*dz/lambda;

% Setting empty two-dimensional arrays of coefficients and desired values
A=zeros(M+1,N+1);
A1=zeros(M+1,N+1);
A2=zeros(M+1,N+1);
A3=zeros(M+1,N+1);
A4=zeros(M+1,N+1);
A5=zeros(M+1,N+1);
B=zeros(M+1,N+1);
B1=zeros(M+1,N+1);
B2=zeros(M+1,N+1);
B3=zeros(M+1,N+1);
B4=zeros(M+1,N+1);
C=zeros(M+1,N+1);
C1=zeros(M+1,N+1);
C2=zeros(M+1,N+1);
C3=zeros(M+1,N+1);
C4=zeros(M+1,N+1);
```

```

D=zeros(M+1,N+1);
D1=zeros(M+1,N+1);
D2=zeros(M+1,N+1);
D3=zeros(M+1,N+1);

u=zeros(M+1,N+1);
v=zeros(M+1,N+1);
T=zeros(M+1,N+1);
p=zeros(M+1,N+1);
q=zeros(M+1,1+1);
uv=zeros(M+1,N+1);

u_old=zeros(M+1,N+1);
v_old=zeros(M+1,N+1);
T_old=zeros(M+1,N+1);
p_old=zeros(M+1,N+1);

% Heat source
for i=1:M+1
    q(i)=W/(pi*(rb+3.66*10^(-4))^2)*exp((-2*(dr*i)^2)/(rb+3.66*10^(-4))^2);
end

% Set initial approximations
for j=1:N+1
    for i=1:M+1
        T_old(j,i)=T_env;
        u_old(j,i)=0;
        v_old(j,i)=0;
        p_old(j,i)=p0;

        T(j,i)=T_old(j,i);
        u(j,i)=u_old(j,i);
        v(j,i)=v_old(j,i);
        p(j,i)=p_old(j,i);
    end;
end;

% Setting initial values for each matrix
U1=u_old; U2=100;
V1=v_old; V2=100;
T1=T_old; T2=300
P1=p_old; P2=102325;

while ((abs(T1-T2)<=epsilon) && (abs(U1-U2)<=epsilon) && (abs(V1-V2)<=epsilon) && (abs(P1-P2)<=epsilon))
for j=1:N+1
    for i=1:M+1
        r=dr*j;
        z=dz*i;

```

```

% Calculate coefficients
A(j,i)=nu*(dr*dz^2+2*r*(dr^2+dz^2))-r*dr*dz*(u_old(j,i)*dz+v_old(j,i)*dr);
A1(j,i)=dz^2/A(j,i)*(nu*(dr+r)-u_old(j,i)*r*dr);
A2(j,i)=nu*r*dz^2/A(j,i);
A3(j,i)=r*dr^2/A(j,i)*(nu-v_old(j,i)*dz);
A4(j,i)=nu*r*dr^2/A(j,i);
A5(j,i)=r*dr^2*dz^2/A(j,i);

B(j,i)=a*(dr*dz^2+2*r*(dr^2+dz^2))-r*dr*dz*(u_old(j,i)*dz+v_old(j,i)*dr);
B1(j,i)=dz^2/B(j,i)*(a*(dr+r)-u_old(j,i)*r*dr);
B2(j,i)=a*r*dz^2/B(j,i);
B3(j,i)=r*dr^2/B(j,i)*(a-v_old(j,i)*dz);
B4(j,i)=a*r*dr^2/B(j,i);

C(j,i)=2*nu*(dr^2+dz^2)-dr^2*dz*v_old(j,i);
C1(j,i)=2*nu*dz^2/C(j,i);
C2(j,i)=(nu-v_old(j,i)*dz)*dr^2/C(j,i);
C3(j,i)=nu*dr^2/C(j,i);
C4(j,i)=dr^2*dz^2/C(j,i);

D(j,i)=2*a*(dr^2+dz^2)-dr^2*dz*v_old(j,i);
D1(j,i)=2*a*dz^2/D(j,i);
D2(j,i)=(a-v_old(j,i)*dz)*dr^2/D(j,i);
D3(j,i)=a*dr^2/D(j,i);

% BOTTOM BOUNDARY
if j==1
    % Bottom left corner
    if i==1
        T(j,i)=1/(1+D3(j,i)*H1)*(D1(j,i)*T_old(j,i+1)+(D3(j,i)+D2(j,i))*T_old(j+1,i)+H1*D3(j,i)*(T_env+q(i)/h1));
        u(j,i)=0;
        v(j,i)=0;
        p(j,i)=1/(F-r*dr^2)*(rho0*(v_old(j+1,i)*(v_old(j+1,i)*2*r*dr^2-r*dr*dz^2*(u_old(j,i+1)-u(j,i))-
            -2*r*dr^2*v(j,i))+v(j,i)*((v(j,i)-2)*r*dr^2+r*dr*dz*(u_old(j,i+1)-u(j,i))+r*dr^2)+
            +u_old(j+1,i)*(v_old(j,i)*dr*dz^2+2*r*dr*dz*(v_old(j,i+1)-v(j,i)))-
            -u(j,i)*(v_old(j,i)*dr*dz^2+2*r*u_old(j,i)*dz^2+2*r*dr*dz*(v_old(j,i+1)-
            -v(j,i)))+(2*nu*dr*dz^2)/r))+u(j,i-1)*u_old(j,i)*r*dz^2+u_old(i+1,j)*(2*nu*dr*dz^2)/r
            +(nu*u_old(j,i)*dr^2*dz^2)/r^3)+
            +p_old(j,i+1)*(dr*dz^2+r*(dr^2+dz^2))+p(j,i-1)*r*dz^2+p_old(j+1,i)*r*dr^2);
    else
        % Bottom boundary center
        if (i>1)&&(i<M+1)
            T(j,i)=1/(1+B2(j,i)*H1)*(B1(j,i)*T_old(j,i+1)+B2(j,i)*T_old(j,i+1)+
                +B3(j,i)*(2*T_old(j+1,i)+H1*(T_env+q(i)/h1)));
            u(j,i)=0;
            v(j,i)=0;
            p(j,i)=1/(F-r*dr^2)*(rho0*(v_old(j+1,i)*(v_old(j+1,i)*2*r*dr^2-r*dr*dz^2*(u_old(j,i+1)-u(j,i))-
                -2*r*dr^2*v(j,i))+v(j,i)*((v(j,i)-2)*r*dr^2+r*dr*dz*(u_old(j,i+1)-u(j,i))+r*dr^2)+
                +u_old(j+1,i)*(v_old(j,i)*dr*dz^2+2*r*dr*dz*(v_old(j,i+1)-v(j,i)))-

```

```

-u(j,i)*(v_old(j,i)*dr*dz^2+2*r*u_old(j,i)*dz^2+2*r*dr*dz*(v_old(j,i+1)-
-v(j,i)))+(2*nu*dr*dz^2)/r)+u(j,i-1)*u_old(j,i)*r*dz^2+u_old(i+1,j)*(2*nu*dr*dz^2)/r
+(nu*u_old(j,i)*dr^2*dz^2)/r^3)+
+p_old(j,i+1)*(dr*dz^2+r(dr^2+dz^2))+p(j,i-1)*r*dz^2+p_old(j+1,i)*r*dr^2);
else
% Bottom right corner
T(j,i)=1/(1-B1(j,i)+B3(j,i)*H1)*(B2(j,i)*T(j,i-1)+B3(j,i)*(2*T_old(j+1,i)+H1*(T_env+q(i)/h1)));
u(j,i)=0;
v(j,i)=0;
p(j,i)=1/(F-r*dr^2)*(rho0*(v_old(j+1,i)*(v_old(j+1,i)*2*r*dr^2-r*dr*dz^2*(u_old(j,i+1)-u(j,i))-
-2*r*dr^2*v(j,i))+v(j,i)*((v(j,i)-2)*r*dr^2+r*dr*dz*(u_old(j,i+1)-u(j,i))+r*dr^2)+
+u_old(j+1,i)*(v_old(j,i)*dr*dz^2+2*r*dr*dz*(v_old(j,i+1)-v(j,i)))-
-u(j,i)*(v_old(j,i)*dr*dz^2+2*r*u_old(j,i)*dz^2+2*r*dr*dz*(v_old(j,i+1)-
-v(j,i)))+(2*nu*dr*dz^2)/r)+u(j,i-1)*u_old(j,i)*r*dz^2+u_old(i+1,j)*(2*nu*dr*dz^2)/r
+(nu*u_old(j,i)*dr^2*dz^2)/r^3)+
+p_old(j,i+1)*(dr*dz^2+r(dr^2+dz^2))+p(j,i-1)*r*dz^2+p_old(j+1,i)*r*dr^2);

end
end
end

if (j>1)&&(j<N+1)
% LEFT BOUNDARY
if i==1
T(j,i)=D1(j,i)*T_old(j,i+1)+D2(j,i)*T_old(j+1,i)+D3(j,i)*T(j-1,i);
u(j,i)=C1(j,i)*u_old(j,i+1)+C2(j,i)*u_old(j+1,i)+C3(j,i)*u(j-1,i)+C4(j,i)*(-1/ro0*(p_old(j,i+1)-p(j,i))/dr);
v(j,i)=C1(j,i)*v_old(j,i+1)+C2(j,i)*v_old(j+1,i)+C3(j,i)*v(j-1,i)+C4(j,i)*(-1/ro0*(p_old(j+1,i)-p(j,i))/dz);
if j==2
p(j,i)=1/(2*L)*(rho0*(v_old(j+1,i)*((v_old(j+1,i)-2*v(j,i)+v_old(j,i))*dr^2-dr*dz*(u_old(j,i+1)-u(j,i)))+
+v(j,i)*((v(j,i)-2*v(j,i))*dr^2-3*dr*dz*(u_old(j+1,i)-u(j,i))+dr*dz*(u_old(j,i+1)-u(j,i)))+
+v_old(j,i+1)*(3*dr*dz*(u_old(j+1,i)-u(j,i))+v(j-1,i)*v_old(j,i)*dr^2+
+((u_old(j,i+1)-u(j,i))*(u_old(j,i)*dz^2+(7*nu*dz^2)/(6*dr)))+
+(2*dz^2 p_old(j,i+1)+(p_old(j+1,i)+p_old(j-1,i))dr^2);
else
p(j,i)=1/(2*L)*(rho0*(v_old(j+1,i)*((v_old(j+1,i)-2*v(j,i)+v_old(j,i))*dr^2-dr*dz*(u_old(j,i+1)-u(j,i)))+
+v(j,i)*((v(j,i)-2*v(j,i))*dr^2-3*dr*dz*(u_old(j+1,i)-u(j,i))+dr*dz*(u_old(j,i+1)-u(j,i)))+
+v_old(i+1,j)*(3*dr*dz*(u_old(i,j+1)-u(i,j)))+v(i,j-1)*v_old(i,j)*dr^2+
+((u_old(j,i+1)-u(j,i))*(u_old(j,i)*dz^2+(7*nu*dz^2)/(6*dr)))+
+(7*nu*dz^2)/(6*dr)*(u(j-1,i)-u(j-2,i)))+(2*dz^2 p_old(j,i+1)+(p_old(j+1,i)+p_old(j-1,i))dr^2);
end;
else
% The main body of the calculated area
if (i>1)&&(i<M+1)
T(j,i)=B1(j,i)*T_old(j,i+1)+B2(j,i)*T(j,i-1)+B3(j,i)*T_old(j+1,i)+B4(j,i)*T(i,j-1);
u(j,i)=A1(j,i)*u_old(j,i+1)+A2(j,i)*u(j,i-1)+A3(j,i)*u_old(j+1,i)+A4(j,i)*u(j-1,i)+
+A5(j,i)*(-1/ro0*(p_old(j,i+1)-p(j,i))/dr);
v(j,i)=A1(j,i)*v_old(j,i+1)+A2(j,i)*v(j,i-1)+A3(j,i)*v_old(j+1,i)+A4(j,i)*v(j-1,i)+
+A5(j,i)*(-1/ro0*(p_old(j+1,i)-p(j,i))/dz);
p(j,i)=1/F*(rho0*(v_old(j+1,i)*((v_old(j+1,i)*2*r*dr^2-2*v(j,i)+v_old(j,i))*dr^2-

```

```

-r*dr*dz*(u_old(j,i+1)-u(j,i))-2*r*dr^2*v(j,i))+v(j,i)*((v(j,i)-2)*r*dr^2+
+r*dr*dz*(u_old(j,i+1)-u(j,i)))+v(j-1,i)*r*dr^2-u(j,i)*(dz^2*(v_old(j,i)*dr+2*r*u_old(j,i))+
+2*r*dz*(u_old(j,i)*dz+dr*(v_old(j,i+1)-v(j,i)))+(2*nu*dr*dz^2)/r)+
+u(j,i-1)*u_old(j,i)*r*dz^2+(nu*dr*dz^2)/r*(2*u_old(j,i+1)+(u_old(j,i)*dr*dz)/r^2))+
+p_old(j,i+1)*(dr*dz^2+r*(dr^2+dz^2))+p(j,i-1)*r*dz^2+(p_old(j+1,i)+p(j-1,i))*r*dr^2);
else
% RIGHT BOUNDARY
T(j,i)=T_env;
u(j,i)=0;
v(j,i)=0;
p(j,i)=1/F*(rho0*(v_old(j+1,i)*(v_old(j+1,i)*2*r*dr^2-r*dr*dz*(u_old(j,i+1)-u(j,i))-2*r*dr^2*v(j,i))
+v(i,j)*((v(i,j)-2)*r*dr^2+r*dr*dz*(u_old(i,j)-u(i,j)))+
+u_old(j+1,i)*(v_old(j,i)*dr*dz^2+2*r*dr*dz*(v_old(j,i)-v(j,i)))+v(j-1,i)*r*dr^2-
-u(j,i)*(dz^2*(v_old(j,i)*dr+2*r*u_old(j,i))+2*r*dz*(u_old(j,i)*dz+dr*(v_old(j,i)-v(j,i)))-
-(2*nu*dr*dz^2)/r)+u(j,i-1)*u_old(j,i)*r*dz^2+
+(nu*dr*dz^2)/r*(2*u_old(j,i)+u_old(j,i)*dr*dz/r^2))+
+p_old(j,i)*(dr*dz^2+r*(dr^2+dz^2))+p(j,i-1)*r*dz^2+(p_old(j+1,i)+p(j-1,i))*r*dr^2);
end;
end;
end;
% TOP BOUNDARY
if j==N
% Top left corner
if i==1
T(j,i)=1/(1+D2(j,i)*H2)*(D1(j,i)*T_old(j,i+1)+D2(j,i)*H2*T_env+(D2(j,i)+D3(j,i))*T(j-1,i));
u(j,i)=C1(j,i)*u_old(j,i+1)+C2(j,i)*(-sigma_T*2*dz/(ro0*nu*dz)*(T_old(j,i+1)-T(j,i)))+(C2(j,i)+
+C3(j,i))*u(j-1,i)+C4(j,i)*(-1/ro0*(p_old(j,i+1)-p(j,i))/dr);
v(j,i)=C1(j,i)*v_old(j,i+1)+C2(j,i)*(-sigma_T*2*dz/(ro0*nu*dz)*(T_old(j,i+1)-T(j,i)))+(C2(j,i)+
+C3(j,i))*v(j-1,i)+C4(j,i)*(-1/ro0*(p(j,i)-p(j-1,i))/dz);
p(j,i)=1/F*(rho0*(v_old(j,i)*(v_old(j,i)*2*r*dr^2-r*dr*dz*(u_old(j,i+1)-u(j,i))-2*r*dr^2*v(j,i))+
+v(j,i)*((v(j,i)-2)*r*dr^2+r*dr*dz*(u_old(j,i+1)-
-u(j,i)))-u_old(j,i)*((v_old(j,i)*dr+2*r*u_old(j,i))*dz^2+
+2*r*dr*dz*(v_old(j,i+1)-v(j,i)))+(2*nu*dr*dz^2)/r)+
+u(j,i-1)*u_old(j,i)*r*dz^2+(nu*dr*dz^2)/r*(2*u_old(j,i+1)+u_old(j,i)*dr/(dr^2)))+
+p_old(j,i+1)*(dr*dz^2+r*(dr^2+dz^2))+p(j,i-1)*r*dz^2+(p_old(j+1,i)+p(j-1,i))*r*dr^2);
else
% Top boundary center
if (i>1)&&(i<M+1)
T(j,i)=1/(1+H2*B3(j,i))*(B1(j,i)*T_old(j,i+1)+B2(j,i)*T(j,i-1)+B3(j,i)*H2*T_env+(B3(j,i)+B4(j,i))*T(j-1,i));
u(j,i)=A1(j,i)*u_old(j,i+1)+A2(j,i)*u(j,i-1)+A4(j,i)*u(j-1,i)+
+A3(j,i)*(-sigma_T*dz)/(ro0*nu*dr)*(T_old(j,i+1)-T(j,i))+A5(j,i)*(-1/ro0*(p_old(j,i+1)-p(j,i))/dr);
v(j,i)=A1(j,i)*v_old(j,i+1)+A2(j,i)*v(j,i-1)+A4(j,i)*v(j-1,i)+
+A3(j,i)*(-sigma_T*dz)/(ro0*nu*dr)*(T_old(j,i+1)-T(j,i))+A5(j,i)*(-1/ro0*(p_old(j+1,i)-p(j,i))/dz);
p(j,i)=1/F*(rho0*(v_old(j,i)*(v_old(j,i)*2*r*dr^2-r*dr*dz*(u_old(j,i+1)-u(j,i))-2*r*dr^2*v(j,i))+
+v(j,i)*((v(j,i)-2)*r*dr^2+r*dr*dz*(u_old(j,i+1)-
-u(j,i)))-u_old(j,i)*((v_old(j,i)*dr+2*r*u_old(j,i))*dz^2+
+2*r*dr*dz*(v_old(j,i+1)-v(j,i)))+(2*nu*dr*dz^2)/r)+
+u(j,i-1)*u_old(j,i)*r*dz^2+(nu*dr*dz^2)/r*(2*u_old(j,i+1)+u_old(j,i)*dr/(dr^2)))+
+p_old(j,i+1)*(dr*dz^2+r*(dr^2+dz^2))+p(j,i-1)*r*dz^2+(p_old(j+1,i)+p(j-1,i))*r*dr^2);

```

```

else
    % Top left corner
    T(i,j)=1/(1-B1(i,j)+B3(i,j)*H2)*(B2(i,j)*T(i-1,j)+B3(i,j)*H2*T_env+T(i,j-1)*(B3(i,j)+B4(i,j)));
    u(j,i)=0;
    v(j,i)=0;
    p(j,i)=1/F*(rho0*(v_old(j,i)*(v_old(j,i)*2*r*dr^2-r*dr*dz*(u_old(j,i+1)-u(j,i))-2*r*dr^2*v(j,i))+
        +v(j,i)*((v(j,i)-2)*r*dr^2+r*dr*dz*(u_old(j,i+1)-
        -u(j,i)))-u_old(j,i)*((v_old(j,i)*dr+2*r*u_old(j,i))*dz^2+
        +2*r*dr*dz*(v_old(j,i+1)-v(j,i)))+(2*nu*dr*dz^2)/r)+
        +u(j,i-1)*u_old(j,i)*r*dz^2+(nu*dr*dz^2)/r*(2*u_old(j,i+1)+u_old(j,i)*dr/(dr^2)))+
        +p_old(j,i+1)*(dr*dz^2+r(dr^2+dz^2))+p(j,i-1)*r*dz^2+(p_old(j,i+1)+p(j-1,i))*r*dr^2);
    end
end
end
uv(j,i)=sqrt(u(j,i).^2+v(j,i).^2);
% Overwriting the results for iteration condition
U1=u_old(j,i);
U2=u(j,i);
V1=v_old(j,i);
V2=v(j,i);
T1=T_old(j,i);
T2=T(j,i);
P1=p_old(j,i);
P2=p(j,i);

% Overwriting the results for one iteration
u_old(j,i)=u(j,i);
v_old(j,i)=v(j,i);
T_old(j,i)=T(j,i);
p_old(j,i)=p(j,i);

end;
end;
end;

uv=sqrt(u.^2+v.^2);
disp('T'); disp(T1);
disp('p'); disp(p1);
disp('u'); disp(u1);
disp('v'); disp(v1);
disp('uv'); disp(uv);

```