МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
Кафедра фундаментальной математики и механики

РЕКОМЕНДОВАНО К ЗАЩИТЕ
В ГЭК И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ
ЗАИМСТВОВАНИЯ
Заведующий кафедрой
к.ф.-м.н.,
____________ К.Ю. Басинский
1 июля 2019 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(магистерская диссертация)

КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В ПОДВИЖНОМ СОСУДЕ

01.04.01 Математика
Магистерская программа «Вычислительная механика»

Выполнил работу Студент 2 курса очной формы обучения	Соснин Александр Николаевич
Научный руководитель к.ф.-м.н., доцент кафедры ФМиМ	Басинский Константин Юрьевич
Рецензент к.т.н., ст. преподаватель кафедры программного обеспечения ТюмГУ	Пушкарев Александр Николаевич

г. Тюмень, 2019

Оглавление

Введение

Исследование колебаний свободной поверхности жидкости в подвижном сосуде на основе нелинейных уравнений является сложной задачей математической физики. Математические методы хорошо разработаны, согласуются с экспериментальными данными и вошли в инженерную практику.

Подвижность и текучесть жидкостей объясняется близким расположением молекул между собой (силы их взаимодействия гораздо выше внешних усилий) и особенностями теплового движения молекул (колебания вокруг положений равновесия и перескоки из одного положения равновесия в другое).

Задача о движении жидкости с открытой поверхностью в сосуде, имеющим заданное перемещение в пространстве, является распространённой в настоящее время и определяет **актуальность** настоящего исследования.

Данная работа посвящена изучению свободной поверхности жидкости в подвижном сосуде.

Целью работы является решение задачи о колебаниях жидкости в подвижном сосуде.

Задачи:

1. Поставить задачу о колебаниях жидкости в подвижном сосуде
2. Решить поставленную задачу
3. Проанализировать решение и влияние различных параметров на амплитуду колебаний жидкости и форму свободной поверхности

Апробация результатов исследования. Основные результаты исследования не были представлены.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. В первой главе представлено решение задачи о колебаниях жидкости в подвижном сосуде. Во второй главе представлен частный случай решения этой задачи для широких сосудов.

Глава 1. Колебания жидкости в подвижном сосуде

1.1. Постановка задачи

В данной задаче будет рассмотрен прямоугольный сосуд, который наполнен до определённого уровня тяжёлой жидкостью (рисунок 1). Перемещения данного сосуда поступательно в горизонтальном направлении вызывает появление горизонтальной упругой силы, приложенной к твёрдой массе сосуда и пропорциональной величине смещения сосуда от некоторого среднего положения.

Необходимо определить частоту собственных колебаний сосуда с налитой в него жидкостью.

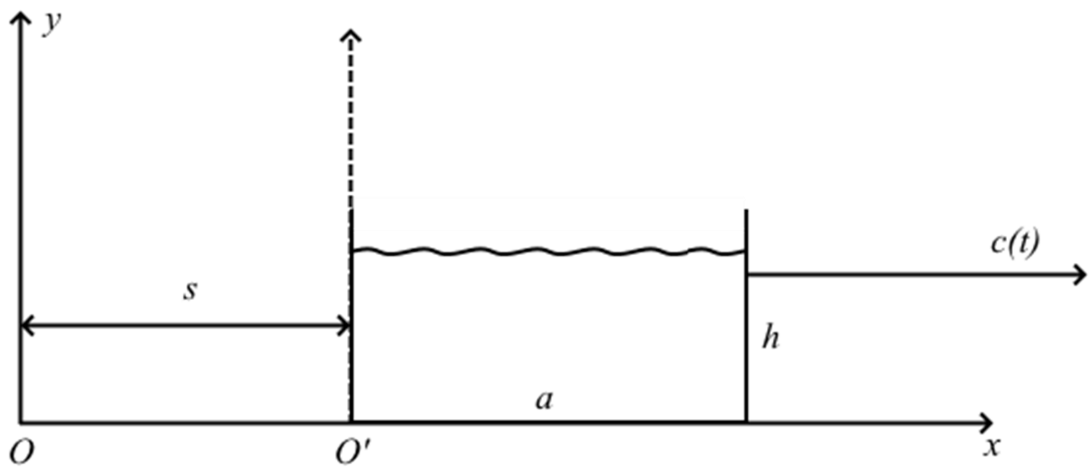

Рисунок 1. Постановка задачи

Ось Ox совпадает с горизонтальной стенкой сосуда, по которой сосуд может скользить. С движущимся сосудом связана подвижная система координат $xO'y$, начало её в левом нижнем углу сосуда. Буквой s обозначено расстояние левой стенки сосуда от неподвижного начала координат, a – ширина, h – высота сосуда. $\varphi\ (x, y; t)$ – потенциал относительных скоростей частиц жидкости. Скорость сосуда (подвижной системы координат) в направлении оси Ox обозначим $c(t)$.

1.2. Решение задачи

Функция φ удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям.

Из требования непротекания стенок и дна сосуда получаем следующие условия:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=0,\ \ x=a} = 0, \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0.$$

Из условий постоянства давления вдоль свободной поверхности жидкости получаем:

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=h} = \ddot{c}x,$$

Уравнение поверхности жидкости в системе координат xOy:

$$\eta = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{y=h} - \frac{\dot{c}}{g}x + h. \tag{1}$$

Рассмотрим периодическое движение, обозначив через σ частоту, тогда

$$\varphi\ (x, y; t) = \varphi\ (x, y)e^{i\sigma t}, s(t) = s_0 e^{i\sigma t};$$

$$c(t) = c_0 e^{i\sigma t}, c_0 = i\sigma s_0.$$

Приняв эти обозначения, изменим предыдущие условия:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=0,\ \ x=a} = 0, \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\sigma^2}{g}\varphi\right)_{y=h} = -\frac{c_0{\sigma^2}^2}{g}x \tag{2}$$

и

$$\eta = h + \frac{i\sigma}{g}(\varphi - c_0 x)_{y=h}. \tag{3}$$

Для построения гармонической функции, удовлетворяющей условиям (2), рассмотрим функцию:

$$\varphi\ (x, y) = \operatorname{ch} ky \cos kx,$$

где $k = \pi n/a,\ n$ – произвольное целое число.

Образуем ряд с неопределёнными коэффициентами:

$$\varphi\ (x, y) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}y\cos\frac{\pi n}{a}x. \tag{4}$$

Составим для этой функции левую часть последнего из условий (2)

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\sigma^2}{g}\varphi\right)_{y=h} = \frac{\pi}{a}\left[-\frac{1}{2}\xi A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(n\operatorname{sh} rn - \xi\operatorname{ch} rn\right)\cos\frac{\pi n}{a}x\right],$$

где

$$r = \frac{\pi h}{a}, \xi = \frac{ac^2}{\pi g}.$$

Возьмём затем разложение, суммировав только по нечётным n

$$x = \frac{1}{2}a - \frac{4a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\cos\frac{\pi n}{a}x}{n^2};$$

Составим теперь последнее из условий (2):

$$-\frac{1}{2}ac_0\xi\left(1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\cos\frac{\pi n}{a}x}{n^2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\xi A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,(n\,\mathrm{sh}\,rn - \xi\,\mathrm{ch}\,rn)\cos\frac{\pi n}{a}x. \quad (5)$$

Отсюда получаем значения неизвестных коэффициентов A_n:

$$A_0 = ac_0, A_n = 0\ (n = 2, 4, 6, \dots),$$
$$A_n = \frac{4ac_0\xi}{\pi^2}\frac{1}{n^2(n\,\mathrm{sh}\,rn - \xi\,\mathrm{ch}\,rn)}\,(n = 1, 3, 5, \dots).$$

Потенциал скоростей относительного движения жидкости запишется так:

$$\varphi\,(x, y) = \frac{1}{2}ac_0 + \frac{4ac_0\xi}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\mathrm{ch}\frac{\pi n}{a}y}{n^2(n\,\mathrm{sh}\,rn - \xi\,\mathrm{ch}\,rn)}\cos\frac{\pi n}{a}x. \quad (6)$$

Если частота колебаний σ такова, что дня некоторого целого нечётного значения индекса n справедливо равенство

$$\xi = n\,\mathrm{th}\,rn, \quad (7)$$

то формула (6) не может быть использована, т.к. требуется учёт нелинейных слагаемых в условиях задачи. Если же равенство (7) справедливо для чётного n, то согласно равенству (5), коэффициент A_n с этим индексом остаётся произвольным, а в формуле (6) появляется одно слагаемое с неопределённым коэффициентом

Найдём результирующую сил давлений жидкости на стенки сосуда. Интеграл Бернулли для медленных движений жидкости:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \dot{c}x - g(y-h),$$

или

$$\frac{p}{\rho} = i\sigma(\varphi - c_0 x) - g(y-h).$$

Распределение давлений вдоль вертикальных стенок сосуда будет

$$\left(\frac{p}{\rho}\right)_{x=0} = i\sigma\varphi(0,y) - g(y-h),$$

$$\left(\frac{p}{\rho}\right)_{x=a} = i\sigma[\varphi(a,y) - ac_0] - g(y-h).$$

Отсюда результирующие сил давления на левую и правую стенку будут соответственно равны:

$$X_1 = -\rho \int\limits_0^{\eta(0)} [i\sigma\varphi(0,y) - g(y-h)]\,dy,$$

$$X_2 = \rho \int\limits_0^{\eta(a)} \{i\sigma[\varphi(a,y) - ac_0] - g(y-h)\}dy.$$

Преобразуем эти выражения, пользуясь формулой (6); получим

$$X_1 + X_2 = -i\sigma a\rho c_0 h - \frac{8i}{\pi^3}\rho a^2 c_0 \sigma \xi {\sum_{n=1}^{\infty}}' \frac{\operatorname{sh} rn}{n^3(n \operatorname{sh} rn - \xi \operatorname{ch} rn)}.$$

Составим уравнение движения сосуда. m – масса сосуда, λ^2 – коэффициент пропорциональности в выражении упругой силы, действующей на массу сосуда.

Представим выражение силы $X = (X_1 + X_2)e^{i\sigma t}$, действующей на сосуд со стороны жидкости, в таком виде:

$$X = \pi\rho g h \xi s - \frac{8gp}{\pi^2} a^2 \xi s {\sum_{n=1}^{\infty}}' \frac{\operatorname{sh} rn}{n^3(n \operatorname{sh} rn - \xi \operatorname{ch} rn)}.$$

Проанализируем это уравнение при помощи программы MatLab и получим график зависимости силы воздействия на сосуд от частоты колебаний жидкости (рисунок 2).

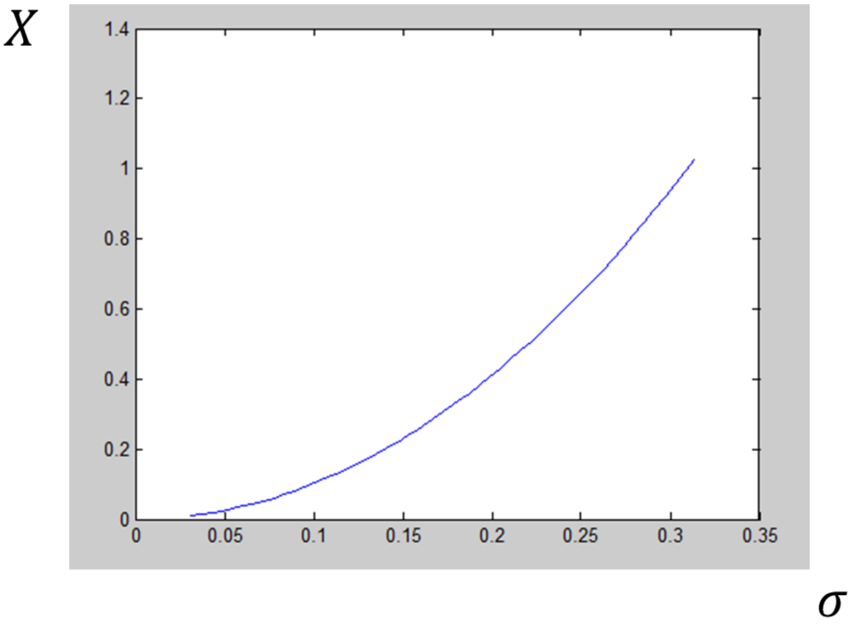

Рисунок 2. График зависимости давлений на стенках сосуда от частоты

Уравнение движения сосуда запишется так:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}+\lambda^2 s = X,$$

или

$$m\frac{d^2s}{dt^2}+\left\{\lambda^2-\pi\rho gh\xi-\frac{8g\rho}{\pi^2}a\xi^2{\sum_{n=1}^{\infty}}'\frac{1}{n^3(n-\xi\operatorname{cth} rn)}\right\}s=0.$$

Это уравнение должно иметь частное решение вида

$$s=s_0e^{i\sigma t}.$$

После преобразований:

$$\lambda^2-\frac{\pi g}{a}M\xi-\frac{8\rho g}{\pi^2}a^2\xi{\sum_{n=1}^{\infty}}'\frac{1}{n^3(n-\xi\operatorname{cth} rn)}=0, \tag{8}$$

где $M=m+\rho ah$ – масса всей системы.

Определив корень ξ можно найти движение сосуда и форму открытой поверхности жидкости. Применяя формулу (1), находим

$$\eta=h-\frac{\sigma c_0}{g}\{\left(\frac{1}{2}a-x\right)+\frac{4a\xi}{\pi^2}{\sum_{n=1}^{\infty}}'\frac{\cos\frac{\pi n}{a}x}{n^2(n\operatorname{th} rn-\xi)}\}\sin\sigma t. \tag{9}$$

Найдём выражение для нахождения удалённых корней уравнения (8). Рассмотри значение ξ, равное

$$\xi = k\ \operatorname{th} kr + \zeta,$$

где k – какое-либо нечётное число, ζ – новая искомая величина. Для малых значений ζ принимаем, что

$$\lambda^2 - \frac{\pi g}{a} M\xi = \left(\lambda^2 - \frac{\pi g}{a} Mk\ \operatorname{th} kr\right) - \frac{\pi g}{a} M\zeta,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^3(n - \xi \operatorname{cth} rn)} = \frac{1}{k^3(k - \xi \operatorname{cth} rk)} + \sum_{n=1}^{\infty}{}'' \frac{1}{n^3(n - \xi \operatorname{cth} rn)} =$$

$$= -\frac{\operatorname{th} rk}{\zeta k^3} + \sum_{n=1}^{\infty}{}'' \frac{1}{n^3} \frac{\operatorname{th} rn}{n \operatorname{th} rn - k \operatorname{th} kn} + \cdots$$

В суммах с двумя штрихами исключаем значение n, равное k. Далее

$$\frac{8\rho g}{\pi^2} a\xi^2 \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^3(n - \xi \operatorname{cth} rn)} = -\frac{8\rho g}{\pi^2} a \frac{\operatorname{th}^3 rk}{k\zeta} + \cdots$$

Таким образом, левая часть уравнения (8) принимает следующий вид:

$$\lambda^2 - \frac{\pi g}{a} Mk \operatorname{th} kr - \frac{\pi g}{a} M\zeta + \frac{8\rho g}{\pi^2} a \frac{\operatorname{th}^3 rk}{k\zeta} + \cdots$$

При больших значениях k это выражение будет обращаться в нуль, если величину ζ взять равной

$$\frac{8\rho g}{\pi^3 M k^2}.$$

Тогда получаем удалённые корни уравнения частот

$$\xi = k \operatorname{th} kr + \frac{8\rho a^2}{\pi^3 M k^2} + \cdots$$

Подставляя вместо ξ и r их значения, получим

$$\sigma^2 = \frac{\pi g}{a} k \operatorname{th} \frac{\pi h}{a} k + \frac{8\rho g a^2}{\pi^2 M k^2} + \cdots$$

Эта формула показывает, что высокие частоты колебаний сосуда с жидкостью близки по величине к аналогичным в неподвижном сосуде.

Если упругая сила отсутствует, $\lambda = 0$, то колебания сосуда около положения равновесия будут возникать только от волновых движений жидкости. Частоту таких колебаний можно определить из уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^3(n-\xi \operatorname{cth} rn)} = -\frac{\pi^3 M}{8pa^2}\frac{1}{\xi}. \tag{10}$$

Это уравнение необходимо для решения задачи о колебаниях сосуда, наполненного жидкостью и подверженного действию внешней периодической силы. Если в направлении оси Ox действует на сосуд сила

$$F = fe^{i\sigma t},$$

то уравнения движения сосуда запишется так:

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} - \left\{\pi\rho g h\xi - \frac{8g\rho}{\pi^2} a\xi^2 \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^3(n-\xi \operatorname{cth} rn)}\right\} s = fe^{i\sigma t}. \tag{11}$$

Вынужденные колебания сосуда будут определяться формулой

$$s = -\frac{fe^{i\sigma t}}{\pi\rho g h\xi - \frac{8g\rho}{\pi^2} a\xi^2 \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^3(n-\xi \operatorname{cth} rn)}}.$$

Прировняв нулю знаменатель, получаем уравнение (10), которое будет определять опасные частоты.

Проанализируем это уравнение и найдём зависимость амплитуды колебаний свободной поверхности жидкости от её плотности (рисунок 3) и от частоты колебаний (рисунок 4).

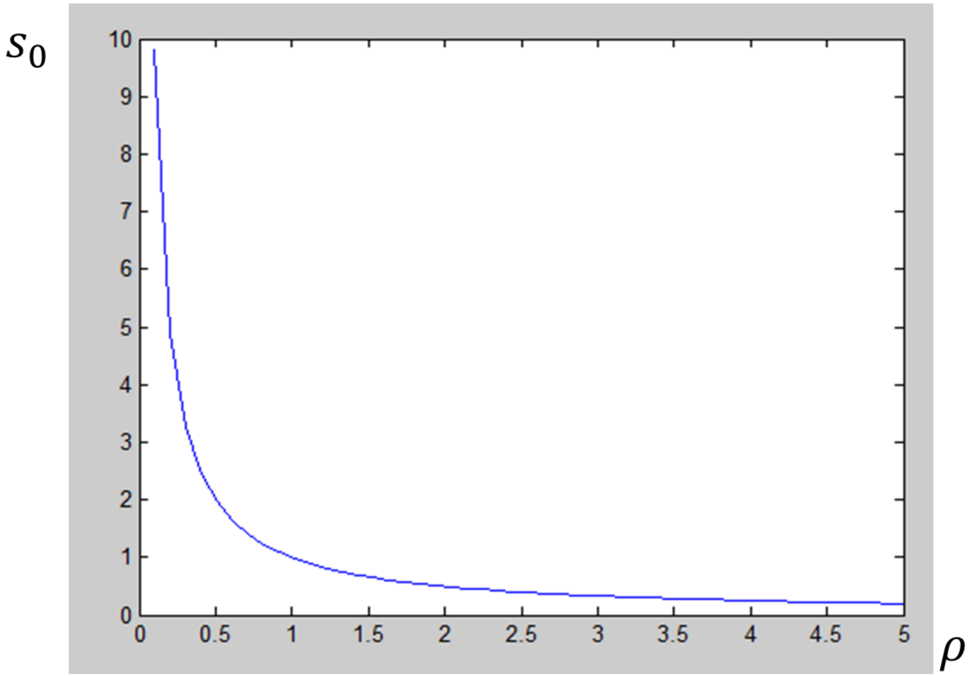

Рисунок 3. График зависимости амплитуды от плотности

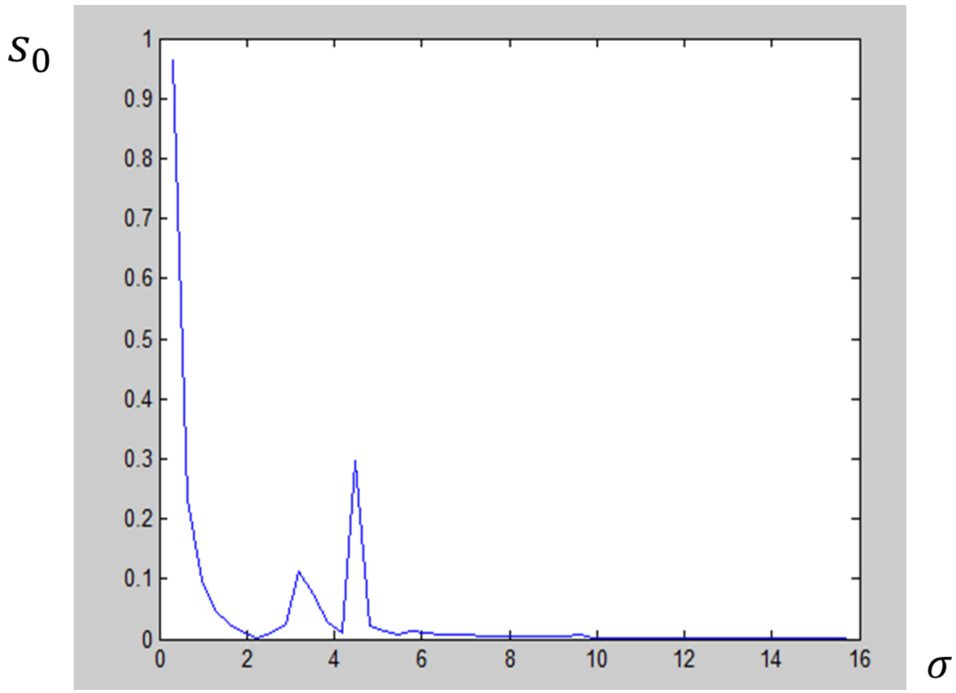

Рисунок 4. График зависимости амплитуды от частоты

Данная задача возникает при решении задач о поведении на волне судна с жидкой нагрузкой. Заменив воздействие морских волн на поверхность судна одной силой получаем уравнение (11), а по уравнению (10) определяем частоты опасных волн, число которых бесконечно.

Глава 2. Колебания жидкости в широком подвижном сосуде

2.1. Изменение задачи

Если ширина сосуда несравненно больше его глубины, формулы (11) и (12) принимают простой вид. Чтобы его получить, рассмотрим функцию комплексного переменного ζ:

$$F(\zeta) = \frac{1}{\zeta \operatorname{th} \zeta - \mu}, \mu = \xi r.$$

Данную функцию можно разложить в ряд по главным частям по способу Коши. Функция $F(\zeta)$ имеет простые полюсы в точках

$$\tau_0, -\tau_0, \zeta_k = i\tau_k \quad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots),$$

где τ_0 – положительный действительный корень уравнения

$$\zeta \operatorname{th} \zeta - \mu = 0, \tag{12}$$

а ζ_k – чисто мнимые корни этого же уравнения, причём τ_k – действительный корень уравнения

$$\tau \operatorname{th} \tau + \mu = 0. \tag{13}$$

2.2. Решение

Выполнив необходимые действия, получим следующее разложение:

$$F(\zeta) = -\frac{1}{\mu} + \frac{2\zeta^2}{{\tau_0}^2 + (\xi - \xi^2)} \frac{1}{\zeta^2 - {\tau_0}^2} + 2\zeta^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\xi - \xi^2) - {\tau_k}^2} \frac{1}{\zeta^2 + {\tau_k}^2}. \tag{14}$$

Преобразуем формулу (9) на основе равенства 14. Получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\cos \frac{\pi n}{a} x}{n^2 (n \operatorname{th} rn - \xi)} = -\frac{1}{\xi} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\cos \frac{\pi n}{a} x}{n^2} + \frac{2r^3}{{\tau_0}^2 + (\xi - \xi^2)} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\cos \frac{\pi n}{a} x}{r^2 n^2 - {\tau_0}^2} + 2r^3 \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{(\xi - \xi^2) - {\tau_k}^2} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\cos \frac{\pi n}{a} x}{r^2 n^2 - {\tau_k}^2}.$$

Для того чтобы преобразовать правую часть формулы используем равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\cos\frac{\pi n}{a}x}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}\left(1-\frac{2x}{a}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\cos\frac{\pi n}{a}x}{r^2n^2-{\tau_0}^2} = \frac{\pi}{4r\tau_0\cos\frac{\pi\tau_0}{2r}}\sin[\frac{\pi\tau_0}{2r}(1-\frac{2x}{a})],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\cos\frac{\pi n}{a}x}{r^2n^2+{\tau_k}^2} = \frac{\pi}{4r\tau_k\operatorname{ch}\frac{\pi\tau_k}{2r}}\operatorname{sh}[\frac{\pi\tau_k}{2r}(1-\frac{2x}{a})].$$

Тогда получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\cos\frac{\pi n}{a}x}{n^2(n\operatorname{th}rn-\xi)}$$
$$= -\frac{\pi^2}{8\xi}\left(1-\frac{2x}{a}\right) + \frac{\pi r^2}{2\tau_0[{\tau_0}^2+(\xi-\xi^2)]\cos\frac{\pi\tau_0}{2r}}\sin[\frac{\pi\tau_0}{2r}(1-\frac{2x}{a})]$$
$$+\frac{\pi r^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\tau_k[(\xi-\xi^2)-{\tau_k}^2]}\frac{\operatorname{sh}[\frac{\pi\tau_k}{2r}(1-\frac{2x}{a})]}{\operatorname{ch}\frac{\pi\tau_k}{2r}}.$$

Подставим это выражение в формулу (9) и найдём уравнение поверхности жидкости:

$$\eta = h - \frac{2c_0\sigma^3h^2}{g^2}\{\frac{1}{\tau_0[{\tau_0}^2+(\xi-\xi^2)]\cos\frac{\pi\tau_0}{2r}}\sin[\frac{\pi\tau_0}{2r}\left(1-\frac{2x}{a}\right)]$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\tau_k[(\xi-\xi^2)-{\tau_k}^2]\operatorname{ch}\frac{\pi\tau_k}{2r}}\operatorname{sh}[\frac{\pi\tau_k}{2r}(1-\frac{2x}{a})]\}\sin\sigma t. \quad (15)$$

Если предположить, что параметр r незначителен по величине, как в случае, если отношение глубины жидкости к ширине сосуда мало. Тогда все члены бесконечного ряда (15), начиная с первого, будут малы по своей величине и стремятся к нулю, когда r стремится к нулю (кроме значений x в близи $x = 0$ и $x = a$.

Для малых значений r уравнение поверхности жидкости запишется так

$$\eta = h - \frac{2c_0\sigma^3h^2}{g^2\tau_0[\tau_0{}^2 + (\xi - \xi^2)]}\frac{\sin[\frac{\pi\tau_0}{2r}\left(1 - \frac{2x}{a}\right)]}{\cos\frac{\pi\tau_0}{2r}}\sin\sigma t.$$

Получаем, что поверхность жидкости в широком сосуде, находящемся в колебательном движении, имеет вид синусоиды. Длинна волны $\tilde{\lambda}$ этой синусоиды определяется действительным корнем уравнения (12) для каждого вида колебаний, даваемых уравнением (9). Тогда

$$\tilde{\lambda} = \frac{2ra}{\tau_0}.$$

Для удалённых корней этого уравнения имеем

$$\tau_0 \operatorname{th}\tau_0 = \frac{\sigma^2h}{g}, \sigma^2 = \frac{\pi g}{a}s \operatorname{th}\frac{\pi h}{a}s.$$

Тогда

$$\tau_0 \operatorname{th}\tau_0 = \frac{\pi h}{a}s \operatorname{th}\frac{\pi h}{a}s.$$

следовательно,

$$\tau_0 = \frac{\pi h}{a}s,$$

поэтому

$$\tilde{\lambda} = \frac{4a}{s}.$$

Получаем, что длина волны рассмотренных колебаний будет незначительна, а амплитуда колебаний будет

$$-\frac{2c_0a}{sh}\sqrt{\frac{a}{\pi gs}}\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{2}\pi s\right)}.$$

Данная формула показывает, что амплитуда колебаний, отвечающих нечётному s, исключительно велика; это заключение вытекает из обращения в нуль знаменателя. Для нечётного s амплитуда колебаний будет

$$\pm\frac{2c_0a}{sh}\sqrt{\frac{a}{\pi gs}}.$$

При взятом c_0 эта амплитуда убывает с увеличением параметра s.

Заключение

Во время преддипломной практики была изучена литература на тему «Колебания жидкости в подвижном сосуде» и рассмотрена типичная задача. Данная задача применима при изучении вопроса о судне на волне с жидкой нагрузкой. Заменив воздействие морских волн на поверхность судна одной силой, приходим к уравнению (11), а уравнение (10) будет определять частоты опасных волн (которых бесконечное множество).

Таким образом, были получены следующие результаты:

Поставлена задача о колебаниях жидкости в подвижном сосуде.

Решена поставленная задача.

Проанализировано решение и влияние различных параметров на амплитуду колебаний жидкости и форму свободной поверхности.

Список использованных источников информации

1. Движение свободной приливной волны во вращающемся канале. – Уч. зап. МГУ, Механика, 1937, вып. 7. 20–42.

2. О волновом сопротивлении корабля при неустановившемся движении. – В сб.: «Теоретический сборник ЦАГИ», вып. 4, Труды ЦАГИ, 1937, вып. 301, 16–19.

3. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости / Л.Н. Сретенский – М.: Наука, 1977, 816 с.