

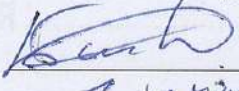
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК  
Кафедра фундаментальной математики и механики

РЕКОМЕНДОВАНО К ЗАЩИТЕ  
В ГЭК И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ  
ЗАИМСТВОВАНИЯ

Заведующий кафедрой

к. ф. -м. н.

 Басинский К.Ю.

2019 г.

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**  
(магистерская диссертация)

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ В  
ТОНКОМ СЛОЕ ВОДЫ МЕТОДОМ ФУНКЦИИ ТОКА**

01.04.01 Математика

Магистерская программа «Вычислительная механика»

Выполнил работу  
Студент 2 курса  
очной формы обучения



(Подпись)

Чебан  
Андрей  
Иванович

Научный руководитель  
к. ф. -м. н.,  
доцент



(Подпись)

Актаев  
Нуркен  
Ерболатович

Рецензент  
к. ф. -м. н.,  
заведующий кафедрой  
Моделирования физических  
процессов и систем  
Физико-Технического  
института ТюмГУ



(Подпись)

Ганопольский  
Родион  
Михайлович

Тюмень, 2019

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	8
ПРИБЛИЖЕНИЕ БУССИНЕСКА.....	10
ОБЕЗРАЗМЕРИВАНИЕ.....	14
«ФУНКЦИЯ ТОКА, ЗАВИХРЕННОСТЬ, ТЕМПЕРАТУРА».....	16
ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ И ДИСКРЕТИЗАЦИЯ.....	20
АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ.....	25
АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ.....	32
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	38
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	39
Приложение 1. Код программы.....	42

## ВВЕДЕНИЕ

Капельный кластер представляет собой самоорганизующийся левитирующий монослой микрокапель, обычно расположенных в гексагонально упорядоченную структуру над локально нагретым тонким (около 1 мм) слоем воды. Капельный кластер типологически сходен с коллоидными кристаллами. Это явление наблюдалось впервые в 2004 году, и после этого оно было тщательно изучено. Принципиально важным для формирования и устойчивого существования капельного кластера является локальный характер нагрева поверхности раздела жидкость-газ; в этом случае термокапиллярные потоки не должны возникать в слое. Над локально нагретой областью межфазной поверхности пар резко охлаждается по мере удаления от поверхности жидкости. Как следствие, в газовой среде образуются микрокапельки, некоторые из которых выпадают на межфазной поверхности, образуя кластер. Капельный кластер обеспечивает дополнительный механизм рассеяния энергии и является диссипативной структурой. Этот механизм состоит в поглощении тепловой энергии и нижней части капли, и ее передаче в верхнюю часть термокапиллярными силами. [11-12]

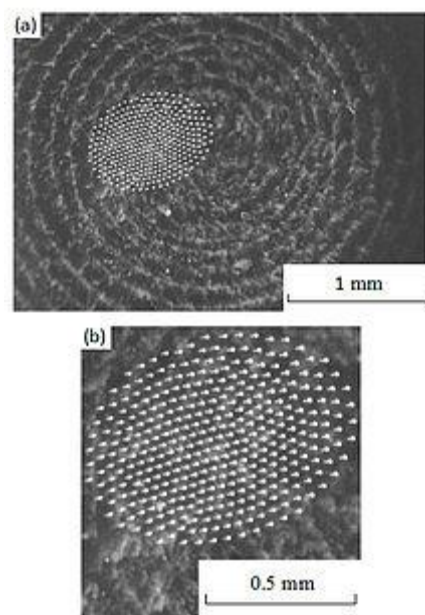


Рисунок 1. Первые фотографии капельного кластера

Повышенный интерес к активно развивающимся областям микрофлюидики и технологий «лаборатория на кристалле» определяет актуальность этой темы.

Строгая пространственная локализация кластера дает качественно новые возможности для разработки прецизионных методов изучения физико-химических процессов в условиях, максимально приближенных к атмосферным. Создаваемые прорывные технологии позволяют углубить понимание процессов химической эволюции атмосферных загрязнений и связанных с этим глобальных изменений климата, повысить эффективность распыляемых средств химической и биологической защиты растений и др. Ведется разработка новых методов абиогенного синтеза сложных органических молекул в микрокапельном реакторе и изучение способности микроорганизмов к жизнедеятельности в атмосферных аэрозолях. [19]

В данном направлении микрофлюидики ведется активная работа, например, в [26] предложен метод микрохимической реакции с участием микрокапель, а также показано, что микрокаплями можно управлять отдельно бегущим электрическим полем, которое возникает при подаче последовательного напряжения на электроды. Реагенты помещают в капли, которые сталкиваются и сливаются, что приводит к химическим реакциям, которые включают подщелачивание фенолфталеина и реакцию люциферин-люцифераза.

Кроме того, в работе [13] акцентируется, что многие из новых исследований сложных биологических систем в конечном счете ограничены их потребностью в измерениях биохимических реакций с еще более высокой пропускной способностью. Авторы представляют общую платформу для скрининга сверхвысокой пропускной способности с использованием микрофлюидики на основе капель, которая преодолевает эти ограничения и революционизирует как масштаб, так и скорость скрининга. Они используют водные капли, диспергированные в масле, в качестве реакционных сосудов пиколитрового объема и просеивают их со скоростью тысяч в секунду. Чтобы продемонстрировать ее мощь, они применяют систему для направленной эволюции, выявляя новые

мутации фермента пероксидазы хрена, проявляющих каталитические скорости более чем в 10 раз быстрее, чем их родитель, который уже является очень эффективным ферментом. По сравнению с современными роботизированными системами скрининга весь анализ выполняется с увеличением скорости в 1000 раз и снижением стоимости в 1 миллион раз.

Интересным представляется содержание статьи [25], где сообщается о диамагнитной левитации капель и частиц объема фемтолитра, а также демонстрируется их хранение на кристалле и высокая точность манипулирования (перемещение, объединение, сборка и вращение). Также показывается основанный на левитации микрофлюидный процессор для обработки капель, частиц с объемом, в миллиарды раз меньшим, чем в типичных микрофлюидных устройствах.

Таким образом, данная отрасль науки является быстроразвивающейся и актуальной в контексте современной микрофлюидики и ее применения.

Для генерации левитирующих скоплений капель над локально нагретой поверхностью воды используется модифицированная лабораторная установка. Нагретая лазером пластина ситалла (кристаллическая стеклокерамика) с непрозрачным графитовым покрытием используется в качестве подложки для слоя воды, который создает кластер левитирующих капель. Кластер стабилизируется с помощью инфракрасного нагрева, как недавно было продемонстрировано в статьях. [18] [20] [22]

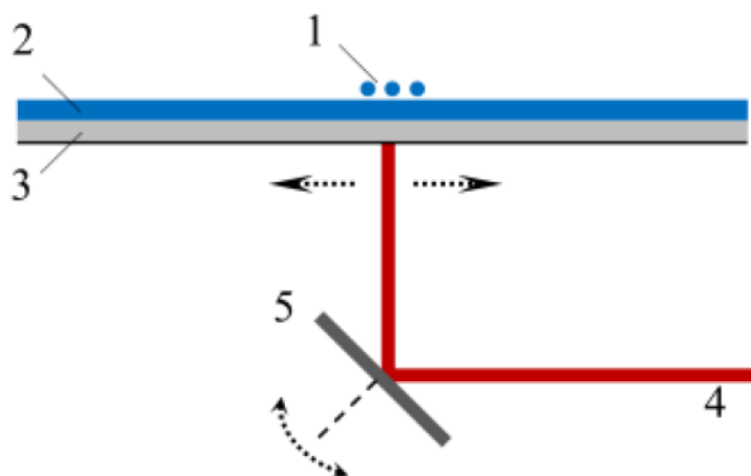


Рисунок 2. Схема вида сбоку лабораторной установки: 1 - капельный кластер, 2 – тонкий слой воды, 3 - подложка из ситалла с черной нижней поверхностью, 4 - лазерный луч, 5 - зеркало MEMS

В рамках данной работы рассматриваются процессы естественной конвекции в тонком слое воды, нагретом лазерным лучом через поверхность ситалла. Поведение плавающих одиночных капель и скоплений капель в набегающем потоке водяного пара и захваченного воздуха было первоначально изучено экспериментально. [17]

В данной же работе предложен численный эксперимент в физико-математической постановке для исследования процессов в тонком слое жидкости. Это важная задача, потому что интенсивность и вид потоков, которые происходят в слое воды, играют ключевую роль в формировании капельного кластера. [23] Они влияют на стабильность и поддержание кластера в этом состоянии. Кроме того, численная симуляция вызывает повышенный интерес, поскольку позволяет сократить число натуральных экспериментов, а также затраты и время на их проведение. А полная математическая модель позволяет предсказывать результаты экспериментов на установке.

Таким образом, основной целью работы является численное исследование конвективных течений при генерации капельного кластера. Работа состоит из построения математической модели в приближении Буссинеска, приведенной к виду в переменных: «температура, функция тока, завихренность», а также её численной симуляции с использованием конечно-разностных методов. В качестве алгоритма решения используется итерационный алгоритм Гаусса-Зейделя.

Для этого необходимо выполнить следующие задачи:

1. Построить физико-математическую модель для рассматриваемой задачи в приближении Буссинеска
2. Провести обезразмеривание полученной модели, используя характерные параметры системы
3. Выполнить переход к переменным «температура, функция тока, завихренность»
4. Дискретизировать полученные уравнения, используя метод конечных разностей

5. Написать алгоритм, используя итерационный метод Гаусса-Зейделя и численную схему решения
6. Создать код в Delphi 7, который реализует численную модель (Приложение 1)
7. Проанализировать полученные результаты

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

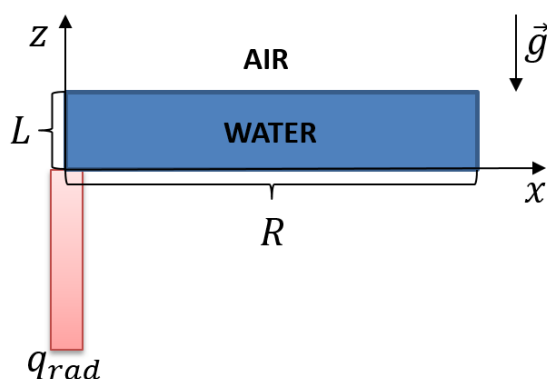


Рисунок 3. Рассматриваемая задача

Рассмотрим следующую физическую постановку задачи, показанной на Рисунке 3. Рассмотрим конвективные потоки в тонком слое воды, которые возникают при нагреве снизу, через слой ситалла с помощью лазера, тепловой поток которого аппроксимируется с помощью (1). Описание свободной конвекции в слое воды строится на использовании приближения Буссинеска. Система уравнений Буссинеска включает в себя уравнение Навье-Стокса, которое выражает закон сохранения импульса, уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения массы, а также закон сохранения энергии – уравнение теплопроводности.

$$q_{rad} = \frac{W}{\pi(r_b + 3.66 * 10^{-4})^2} \exp\left(-\frac{2x^2}{(r_b + 3.66 * 10^{-4})^2}\right) \quad (1)$$

Где  $W = 0.2$  Вт – мощность лазера;

$r_b = 0.395$  мм – радиус (луча) пучка.

Основные допущения модельной задачи:

- Тонкий слой жидкости ( $L < R$ )
- Предполагается, что течение стационарное и ламинарное



- Жидкость вязкая и несжимаемая
- Гравитация действует вдоль оси  $Z$  вертикально вниз
- Задача двумерная и симметричная относительно оси  $Z$
- Слой ситалла заменятся непроницаемой границей

## ПРИБЛИЖЕНИЕ БУССИНЕСКА

Если предположить, что в жидкости в поле силы тяжести имеет место механическое равновесие, то распределение температуры в нем должно зависеть только от высоты  $z$ :  $T=T(z)$ . Если распределение температуры не удовлетворяет этому требованию, являясь в общем случае функцией всех трех координат, то механическое равновесие в жидкости невозможно. Более того, даже если  $T=T(z)$ , то механическое равновесие все еще может быть невозможным, если вертикальный градиент температуры направлен вниз и в абсолютном значении превышает определенное предельное значение. [3]

Отсутствие механического равновесия приводит к появлению в жидкости внутренних потоков, которые стремятся смешать жидкость так, чтобы в ней была установлена постоянная температура. Такое движение, возникающее в поле силы тяжести, называется свободной (или естественной) конвекцией.

Выведем уравнения, описывающие конвекцию. Мы будем рассматривать жидкость как несжимаемую. Это означает, что предполагается, что давление изменяется незначительно вдоль жидкости, так что изменением плотности под влиянием изменения давления можно пренебречь. Например, в атмосфере, где давление изменяется с высотой, это означает, что мы не будем считать его столбы слишком высокими, в которых изменение плотности с высотой становится значительным. Что касается изменения плотности из-за неравномерного нагрева жидкости, то этим изменением, конечно, нельзя пренебрегать. Именно это приводит к появлению сил, вызывающих конвекционное движение.

Запишем переменную температуру в виде  $T = T_0 + T'$ , где  $T_0$  некоторое постоянное среднее значение, от которого измеряется неравномерность температуры  $T'$ . Предположим, что  $T'$  мало по сравнению с  $T_0$ .

Плотность жидкости также записывается в виде  $\rho = \rho_0 + \rho'$  с постоянной  $\rho_0$ . Из-за небольшого изменения температуры  $T'$ , вызванное этим изменение плотности  $\rho'$  также мало, и мы можем записать:

$$\rho' = \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial t} \right)_p T' = -\rho_0 \beta T' \quad (2)$$

где  $\beta = -\rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial T}$  температурный коэффициент расширения жидкости. Мы предполагаем, что  $\beta > 0$ .

При давлении  $p = p_0 + p'$ , значение  $p_0$  не будет постоянным. Это давление, соответствующее механическому равновесию при постоянной (равной  $T_0$  и  $\rho_0$ ) температуре и плотности. Оно изменяется с высотой согласно гидростатическому уравнению:

$$p_0 = \rho_0 \mathbf{g} \mathbf{r} + const = -\rho_0 g z + const \quad (3)$$

где координата  $z$  отсчитывается вертикально вверх.

В столбе жидкости высотой  $h$  гидростатический перепад давления составляет  $\rho_0 g h$ . Этот перепад приводит к изменению плотности на  $\sim \rho g h / c^2$ , где  $c$  — скорость звука. Исходя из условий, по сравнению с самой плотностью, и по сравнению с ее тепловым изменением (2) это изменение должно быть пренебрежимо. Или по-другому, должно удовлетворяться неравенство:

$$\frac{gh}{c^2} \ll \beta \theta \quad (4)$$

где  $\theta$  — характерная разность температур.

Начнем с преобразования уравнения Навье — Стокса, которое при наличии поля тяжести имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}$$

получающийся добавлением к правой стороне действующей на единицу массы силы  $\mathbf{g}$ . Подставим сюда  $p = p_0 + p'$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho'$ . С точностью до малых первого порядка имеем:

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla(p_0 + p')(\rho_0 + \rho')^{-1} = \frac{\nabla(p_0 + p')}{\rho_0} \left( 1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right)^{-1} =$$

$$= \frac{\nabla(p_0 + p')}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) = \frac{\nabla p_0}{\rho_0} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} - \frac{\nabla p_0}{\rho_0^2} \rho'$$

или, подставляя (1) и (2):

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \mathbf{g} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} + \mathbf{g} T' \beta$$

Подставляя это выражение в уравнение Навье-Стокса и опуская индекс у  $\rho_0$ :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\mathbf{g} - \frac{\nabla p'}{\rho} - \mathbf{g} T' \beta + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} = -\frac{\nabla p'}{\rho} - \mathbf{g} T' \beta + \nu \Delta \mathbf{v}$$

Получаем окончательно:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p'}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} - \beta \mathbf{g} T' \quad (5)$$

В уравнении теплопроводности член, содержащий вязкость, при свободной конвекции, как можно показать, мал по сравнению с другими членами уравнения и потому может быть опущен. Таким образом, получаем:

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T' = \chi \Delta T' \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) вместе с уравнением непрерывности  $div \mathbf{v} = 0$  представляют собой полную систему уравнений, описывающих свободную конвекцию.

Используя вышеупомянутые предположения, система уравнений Буссинеска в векторной форме принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p'}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} - \beta \mathbf{g} T' \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T' = \chi \Delta T' \\ div \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Где  $\rho$  – плотность жидкости [кг/м<sup>3</sup>];

$t$  – время [с];

$p'$  – давление [Па];

$\mathbf{v}$  – вектор скорости [м/с];

$\nu$  – кинематическая вязкость [Па·с];

$g$  – ускорение свободного падения [м/с<sup>2</sup>];

$T'$  – температура [К];

$\beta$  – коэффициент объемного расширения [1/К];

$\chi$  – температуропроводность [м<sup>2</sup>/с].

Модель включает в себя уравнение Навье – Стокса, уравнение теплопроводности и уравнение несжимаемости и для стационарного случая принимает вид:

$$\begin{cases} (\nu \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p'}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} - \beta g T' \\ (\nu \nabla) T' = \chi \Delta T' \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

В эту систему пяти уравнений, определяющих неизвестные функции  $\mathbf{v}$ ,  $p'/\rho$ ,  $T'$ , входят три параметра:  $\nu$ ,  $\chi$  и  $g\beta$ . Кроме того, в их решение входят характерная длина  $L$  и характерная разность температур  $\theta$ . Характерная скорость теперь отсутствует, поскольку никакого вынужденного посторонними причинами движения нет, и все течение жидкости обуславливается ее неравномерной нагретостью. Из этих величин можно составить две независимые безразмерные комбинации. В качестве них обычно выбирают число Прандтля и число Рэлея или число Грасгофа. [4]

## ОБЕЗРАЗМЕРИВАНИЕ

Следующая задача - получить безразмерную результирующую систему уравнений. Представление физических зависимостей через безразмерные параметры позволяет сократить общее количество параметров, определяющих задачу, в результате чего исследование проблемы упрощается.

Необходимые условия:

а) выбрать значения признаков для всех переменных (размерных констант) и ввести безразмерные переменные как отношение их размерных значений к значениям признаков;

б) размерные константы задачи и размерные константы образуют некоторые безразмерные комплексы (критерии), число которых значительно меньше количества размерных констант.

Таким образом, один набор фиксированных значений критериев соответствует широкому разнообразию наборов размерных констант, которые соответствуют таким модам.

Таким образом, обезразмеренная система имеет следующие преимущества:

1. уменьшение количества независимых параметров;
2. одна решенная безразмерная версия соответствует обширному классу размерных задач;
3. все параметры имеют порядок, близкий к единице, что позволяет более эффективно использовать технологические ресурсы вычислительных средств.

Для получения безразмерной системы уравнений для уравнений Буссинеска (8) используются следующие комплексы, перечисленные в Таблице 1.

Величина	Размеры	Скорость	Температура	Давление	Число Грасгофа	Число Прандтля
Обозначение	$x, z$	$v$	$T$	$p$	$Gr$	$Pr$
Обезразмеривающий комплекс	$L$	$\frac{g\beta T_0 L^2}{v}$ or $\frac{g\beta q L^3}{\lambda v}$	$T_0$ или $\frac{qL}{\lambda}$	$\frac{\rho g \beta T_0 L}{\lambda}$ или $\frac{\rho g \beta q L^2}{\lambda}$	$\frac{g\beta T_0 L^3}{v^2}$ или $\frac{g\beta q L^4}{\lambda v^2}$	$\frac{v}{\chi}$

Таблица 1

Где  $L$  – характерная длина [м];

$q$  – тепловой поток через любую границу [Вт/м<sup>2</sup>];

$\lambda$  – коэффициент теплопроводности [Вт/(м\*К)].

В качестве характерной длины выбирается толщина слоя жидкости. Поскольку наибольший градиент температуры вызывает нагрев, создаваемый лазером, то разумно выбрать для обезразмеривания  $q = q_{rad}|_{x=0} = q_0$  при  $x=0$ , где лазер создает наибольший тепловой поток.

Для удобства, безразмерные аналоги величин запишем в тех же обозначениях, что и их размерные аналоги.

Тогда безразмерная результирующая система уравнений записывается следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} Gr(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \Delta\mathbf{v} + T\mathbf{k} \\ Gr(\mathbf{v}\nabla)T = \frac{\Delta T}{Pr} \\ div\mathbf{v} = 0 \end{array} \right. \quad (9)$$

Где  $\mathbf{k}$  – единичный вектор оси  $z$ ,  $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$

## «ФУНКЦИЯ ТОКА, ЗАВИХРЕННОСТЬ, ТЕМПЕРАТУРА»

Рассматриваемая система аналогична уравнениям Навье-Стокса для несжимаемых течений. Разница заключается в конвективном члене в уравнении импульса. Поэтому для ее решения применяются аналогичные методы. Одним из основных методов является использование системы уравнений в физических переменных. Однако в этой статье мы используем второй метод, в переменных «температура, функция тока, завихренность». Такой выбор переменных является традиционным в вычислительной гидродинамике и позволяет исключить из рассмотрения достаточно трудоемкое в расчетах поле давления. Точное аналитическое решение модельных уравнений, как правило, невозможно из-за сильно нелинейного характера всей системы дифференциальных уравнений задачи. Для получения численного решения (всегда приближенного) выполняется переход к дискретным, алгебраическим уравнениям, которые, собственно, и составляют численную или, точнее, компьютерную модель решаемой задачи. Компьютерную - поскольку все расчеты могут быть сделаны только на компьютере, причем, чем подробнее модель учитывает условия задачи, тем более мощные компьютеры требуются для выполнения расчетов.

Для начала введем декартову прямоугольную систему координат, как показано на Рисунке 3.

Тогда в этой системе координат система уравнений примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\ Gr \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ Gr \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + T \\ Gr \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \end{array} \right. \quad (10)$$

Где  $u$  и  $v$  скорость в направлении оси  $X$  и  $Z$  соответственно.



Чтобы получить уравнение для давления - уравнение Пуассона, необходимо продифференцировать второе уравнение из системы (10) по  $x$ , а третье – по  $z$ . Далее, суммируя полученные уравнения, учитывая уравнение неразрывности и выполняя необходимые преобразования получаем:

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial T}{\partial z} - 2Gr \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad (11)$$

Чтобы перейти к переменным «функция тока, завихренность», введем функцию тока  $\varphi$  следующим образом:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial z}; v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (12)$$

Такое определение автоматически удовлетворяет уравнению неразрывности из (10) для любой функции  $\varphi$  и для всех течений, удовлетворяющих уравнению неразрывности, такая функция существует. Более того, можно увидеть, что  $(\mathbf{v}\nabla)\varphi = 0$ , откуда следует, что вектор скорости  $\mathbf{v}$  касателен к линиям с равными значениями  $\varphi$  – «линиям тока». [15]

Завихренность определяется соотношением:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \quad (13)$$

Затем, используя выражения (12) и (13), система переписывается в переменные «температура, функция тока, завихренность», которая включает уравнение переноса завихренности и уравнение для функции тока.

Чтобы получить уравнение для переноса завихренности продифференцируем по  $z$  второе уравнение из системы (10):

$$Gr \left( \frac{\partial u}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} v \right) = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \quad (14)$$

А также по  $x$  – третье уравнение из системы (10):

$$Gr \left( \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} v + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} u \right) = - \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial x} \quad (15)$$

Теперь вычтем из (14) – (13) и учтем уравнение неразрывности из (10):

$$\begin{aligned} Gr \left( u \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) + v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right) \\ = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{\partial T}{\partial x} \end{aligned} \quad (16)$$

Или, наконец, учитывая определения (12) и (13), получаем уравнение переноса завихренности:

$$Gr \left( u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\partial T}{\partial x} \quad (14)$$

Уравнение для функции тока получается подстановкой определений (12) в (13).

Таким образом, исходная система в переменных «температура, функция тока, завихренность» принимает вид:

$$\begin{cases} Gr \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\omega \\ Gr \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \end{cases} \quad (13)$$

Для определения давления можно использовать уравнение (11), подставив в него выражение для функции тока (12).

$$\left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial z} + 2Gr \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right)^2 \right) \quad (14)$$

Эта система особенно удобна в тех случаях, когда мы хотим найти только поле скоростей течения и поле температуры; для этого необходимо совместно решить систему уравнений (13), так как она не содержит давления. Если мы все же хотим

найти давление, то его легко получить, решая уравнение (14) после того, как найдены значения  $\varphi$  и  $\omega$ .

## ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ И ДИСКРЕТИЗАЦИЯ

Таким образом, наша задача описывается системой уравнений (13). Более того, система уравнений Буссинеска в двумерном приближении ввиду ее сложности может быть решена только численными методами. Однако стоит учитывать особенности нашей задачи, связанные с граничными условиями. [5]

На нижней и правой границах выполняются условия непроницаемости и прилипания:  $u = 0$ ,  $v = 0$ . На верхней свободной поверхности  $v = 0$  и  $\partial u / \partial z = 0$ , а на оси симметрии слева ненулевой будет только компонента скорости направленная вдоль оси  $Z$ , то есть  $u = 0$ ,  $\partial v / \partial r = 0$ .

Что касается температуры, то будем рассматривать левую и правую границу как адиабатные стенки, то есть  $\partial T / \partial x = 0$ . Для верхней свободной поверхности процесс теплообмена между поверхностью воды и окружающей атмосферой описывается законом Ньютона-Рихмана:

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=L} = h(T_0 - T) \quad (15)$$

Где  $h$  – коэффициент теплопередачи [Вт/(м<sup>2</sup>\*К)],

$T_0$  – постоянная температура окружающей среды [К].

Что после обезразмеривания и выполнения необходимых преобразований принимает вид:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=1} = \frac{hT_0}{q_0} - NuT \quad (16)$$

Где  $Nu = \frac{Lh}{\lambda}$  – число Нуссельта.

Для нижней границы мы используем аналогичное условие, но оно также содержит дополнительный тепловой поток, который выражается через параметр лазера (1):

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = h(T_0 - T) + q \quad (17)$$

Или в безразмерном виде:

$$-\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{hT_0}{q_0} - NuT + q \quad (18)$$

Граничные условия в безразмерном виде для  $\varphi$ ,  $\omega$  и  $T$  преобразуются к виду:

– на правой границе

$$\varphi = 0; \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

– на верхней границе

$$\varphi = 0; \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{hT_0}{q_0} - NuT; \omega = 0 \quad (20)$$

– на левой границе

$$\varphi = 0; \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

– на нижней границе

$$\varphi = 0; \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0; -\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{hT_0}{q_0} - NuT + q \quad (22)$$

Для дискретизации полученных уравнений и граничных условий мы используем метод конечных разностей. Конечно-разностные методы (МКР) представляют собой численные методы решения дифференциальных уравнений путем их аппроксимации разностными уравнениями, в которых конечные разности аппроксимируют производные. Мы используем следующие разности [2]:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (23)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (25)$$

Используя выражения (23) – (25) и обозначая:  $j = 1 \dots J$  - индекс для координаты  $x$ , а  $k = 1 \dots K$  - индекс для координаты  $z$ , аппроксимируем записанные дифференциальные уравнения разностными уравнениями на пространственной сетке:

$$\left\{ \begin{aligned} & Gr \left( \frac{(\varphi_{j,k+1} - \varphi_{j,k}) (\omega_{j+1,k} - \omega_{j,k})}{\Delta z \Delta x} - \frac{(\varphi_{j+1,k} - \varphi_{j,k}) (\omega_{j,k+1} - \omega_{j,k})}{\Delta x \Delta z} \right) = \\ & = \frac{(\omega_{j+1,k} - 2\omega_{j,k} + \omega_{j-1,k})}{(\Delta x)^2} + \frac{(\omega_{j,k+1} - 2\omega_{j,k} + \omega_{j,k-1})}{(\Delta z)^2} + \frac{(T_{j+1,k} - T_{j,k})}{\Delta x} \\ & \frac{(\varphi_{j+1,k} - 2\varphi_{j,k} + \varphi_{j-1,k})}{(\Delta x)^2} + \frac{(\varphi_{j,k+1} - 2\varphi_{j,k} + \varphi_{j,k-1})}{(\Delta z)^2} = -\omega_{j,k} \\ & Gr \left( \frac{(\varphi_{j,k+1} - \varphi_{j,k}) (T_{j+1,k} - T_{j,k})}{\Delta z \Delta x} - \frac{(\varphi_{j+1,k} - \varphi_{j,k}) (T_{j,k+1} - T_{j,k})}{\Delta x \Delta z} \right) = \\ & = \frac{1}{Pr} \left( \frac{(T_{j+1,k} - 2T_{j,k} + T_{j-1,k})}{(\Delta x)^2} + \frac{(T_{j,k+1} - 2T_{j,k} + T_{j,k-1})}{(\Delta z)^2} \right) \end{aligned} \right. \quad (26)$$

Где  $\Delta x$  – шаг по оси  $X$ ;

$\Delta z$  – шаг по оси  $Z$ .

Аналогично, воспользуемся конечно-разностными приближениями для граничных условий:

– на правой границе ( $J, k$ ) при  $x=R/L, z=0 \dots 1$

Для функции тока:

$$\begin{aligned} \varphi_{J,k} &= 0 \\ \frac{(\varphi_{J+1,k} - \varphi_{J,k})}{\Delta x} &= 0 \end{aligned}$$

Для уравнения теплопроводности:

$$\frac{(T_{J+1,k} - T_{J,k})}{\Delta x} = 0$$

Откуда получим окончательно комплекс граничных условий:

$$\varphi_{J,k} = 0 \text{ и } \varphi_{J+1,k} = 0$$

$$T_{J,k} = T_{J+1,k} \quad (27)$$

– на верхней границе (j, K) при  $x=0\dots R/L$ ,  $z=1$

Для функции тока:

$$\varphi_{j,K} = 0$$

Для уравнения теплопроводности:

$$\frac{(T_{j,K+1} - T_{j,K-1})}{2\Delta z} = \frac{hT_0}{q_0} - Nu T_{j,K}$$

Откуда получим окончательно комплекс граничных условий:

$$\varphi_{j,K} = 0$$

$$T_{j,K+1} = 2\Delta z \frac{hT_0}{q_0} - 2\Delta z Nu T_{j,K} + T_{j,K-1} \quad (28)$$

– на левой границе (1, k) при  $x=0$ ,  $z=0\dots 1$

Для функции тока:

$$\varphi_{1,k} = 0$$

Для уравнения теплопроводности:

$$\frac{(T_{1,k} - T_{0,k})}{\Delta x} = 0$$

Откуда получим окончательно комплекс граничных условий:

$$\varphi_{1,k} = 0$$

$$T_{1,k} = T_{0,k} \quad (29)$$

– на нижней границе (j, 1) при  $x=0\dots R/L$ ,  $z=0$

Для функции тока:

$$\varphi_{j,1} = 0$$

$$\frac{(\varphi_{j,1} - \varphi_{j,0})}{\Delta z} = 0$$

Для уравнения теплопроводности:

$$-\frac{(T_{j,2} - T_{j,0})}{2\Delta z} = \frac{hT_0}{q_0} - Nu T_{j,1} + q$$

Откуда получим окончательно комплекс граничных условий:

$$\varphi_{j,1} = 0 \text{ и } \varphi_{j,0} = 0$$

$$T_{j,0} = 2\Delta z \frac{hT_0}{q_0} - 2\Delta z Nu T_{j,1} + 2\Delta z q + T_{j,2} \quad (30)$$



## АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Эта система может быть решена различными методами. В этой работе мы используем итерационный метод Гаусса-Зейделя. Основная идея модификации метода, в отличие от метода Якоби, заключается в том, что новые значения используются сразу по мере их получения, тогда как в методе Якоби они не используются до следующей итерации. [9]

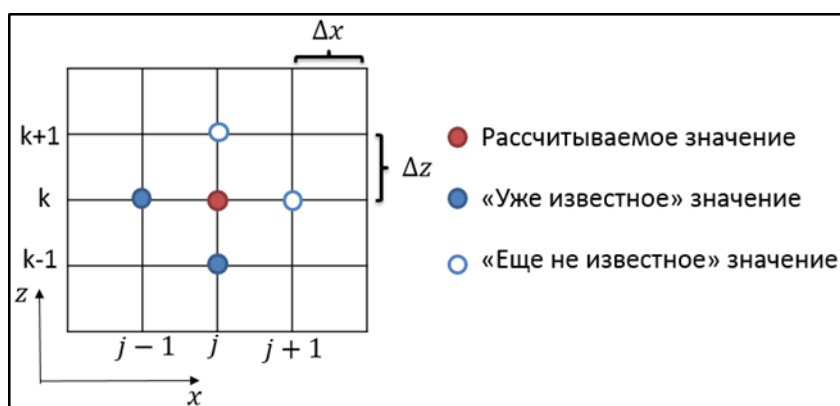


Рисунок 4. Схема вычислений

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений:

$$Ax = b \text{ или } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения системы  $x_1$ , из второго  $x_2$  и т.д. Тогда будем иметь:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n) \\ \dots \\ x_j = \frac{b_j}{a_{jj}} - \frac{1}{a_{jj}}(a_{j1}x_1 + \dots + a_{jj-1}x_{j-1} + a_{jj+1}x_{j+1} + \dots + a_{jn}x_n) \end{cases}$$

Как видно, каждая новая итерация начинается с расчета  $x_1$  через уже известные значения  $x$ , полученные в предыдущей итерации.

$$x_1^{k+1} = \frac{b_1}{a_{11}} - (a_{12}x_2^k + a_{13}x_3^k + \dots + a_{1n}x_n^k)/a_{11}$$

Как уже говорилось ранее метод Гаусса–Зейделя схож с методом простой итерации, но различия появляются при расчете  $x_2^{n+1}$ . В выражении для расчета  $x_2^{n+1}$  для  $x_1$  используется значение, полученное на данной итерации, а не с предыдущей, как в методе простой итерации. Таким образом будут рассчитываться последующие значения  $x$ . Тогда система примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{n+1} = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2^n + \dots + a_{1n}x_n^n) \\ x_2^{n+1} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1^{n+1} + \dots + a_{2n}x_n^n) \\ \dots \\ x_j^{n+1} = \frac{b_j}{a_{jj}} - \frac{1}{a_{jj}}(a_{j1}x_1^{n+1} + a_{jj}x_{j-1}^{n+1} + a_{jj}x_{j+1}^{n+1} + \dots + a_{jn-1}x_{j-1}^{n+1}) \end{array} \right.$$

Или группируя коэффициенты:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{n+1} = c_{12}x_2^n + \dots + c_{1j}x_j^n + d_1 \\ x_2^{n+1} = c_{21}x_1^{n+1} + \dots + c_{2j}x_j^n + d_2 \\ \dots \\ x_j^{n+1} = c_{j1}x_1^{n+1} + \dots + c_{jj-1}x_{j-1}^{n+1} + d_j \end{array} \right.$$

Где

$$c_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & j \neq i \\ 0, & j = i \end{cases} \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad i = \overline{1, k}$$

Таким образом, уравнения системы будут вычисляться по формуле

$$x_i^{n+1} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}x_j^{n+1} + \sum_{j=i}^n c_{ij}x_j^n + d_i, \quad i = \overline{1, k}$$

Где  $x_i^0 = d_i$ . Согласно теореме условия сходимости метода, имеем следующее условие сходимости:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k}$$

При этом хотя бы для одного уравнения неравенство должно выполняться строго. Эти условия являются достаточными для сходимости метода, но они не являются необходимыми, т. е. для некоторых систем итерации сходятся и при нарушении условия.

Условие окончания итерационного процесса Зейделя при достижении точности  $\varepsilon$  имеет вид

$$\|Ax^k - b\| \leq \varepsilon \text{ или } \delta = \max_i |x^k - x^{k-1}| \leq \varepsilon$$

Расчет начинается с нижнего левого угла и заканчивается в правом верхнем углу для каждой итерации. Обход сетки возможен как по горизонтали, так и по вертикали. В то же время для расчета каждого узла сетки есть два уже известных значения (на этой итерации) и два еще не известных. Мы берем неизвестные узлы из предыдущей итерации.

Для обозначения номера итерации будем использовать  $n = 1 \dots N_{\max}$ , где  $N_{\max}$  - максимальное количество итераций. Применяя данный метод к уравнению переноса завихренности, получаем:

$$\begin{aligned} \omega_{j,k}^{n+1} = \frac{1}{\varphi_{j+1,k}^n - \varphi_{j,k+1}^n + 2C + 2D} & \left[ \omega_{j+1,k}^n (\varphi_{j,k}^n - \varphi_{j,k+1}^n + C) \right. \\ & + \omega_{j-1,k}^{n+1} C + \omega_{j,k+1}^n (\varphi_{j+1,k}^n - \varphi_{j,k}^n + D) + \omega_{j,k-1}^{n+1} D \\ & \left. + \frac{(T_{j+1,k}^n - T_{j,k}^n) \Delta z}{Gr} \right] \end{aligned} \quad (31)$$

К уравнению для функции тока:

$$\begin{aligned} \varphi_{j,k}^{n+1} = \frac{1}{2(\Delta z)^2 + 2(\Delta x)^2} & \left[ \varphi_{j+1,k}^n (\Delta z)^2 + \varphi_{j-1,k}^{n+1} (\Delta z)^2 + \varphi_{j,k+1}^n (\Delta x)^2 \right. \\ & \left. + \varphi_{j,k-1}^{n+1} (\Delta x)^2 + \omega_{j,k}^n (\Delta x)^2 (\Delta z)^2 \right] \end{aligned} \quad (32)$$

И к уравнению теплопроводности:

$$T_{j,k}^{n+1} = \frac{1}{\varphi_{j+1,k}^n - \varphi_{j,k+1}^n + 2A + 2B} [T_{j+1,k}^n (\varphi_{j,k}^n - \varphi_{j,k+1}^n + A) + T_{j-1,k}^{n+1} A + T_{j,k+1}^n (\varphi_{j+1,k}^n - \varphi_{j,k}^n + B) + T_{j,k-1}^{n+1} B] \quad (33)$$

Где использованы следующие обозначения для констант:

$$C = \frac{\Delta z}{Gr\Delta x}; D = \frac{\Delta x}{Gr\Delta z} \quad (34)$$

$$A = \frac{\Delta z}{PrGr\Delta x}; B = \frac{\Delta x}{PrGr\Delta z}$$

Кроме того, необходимо переопределить граничные условия в рамках выбранного метода. Это достигается подстановкой соответствующего граничного условия в итерационное уравнение процесса.

– на правой границе подставим (27) в (31) – (33):

$$\varphi_{j,k}^{n+1} = 0$$

$$T_{j,k}^{n+1} = \frac{1}{A + 2B} (T_{j-1,k}^{n+1} A + T_{j,k+1}^n B + T_{j,k-1}^{n+1} B) \quad (35)$$

– на верхней границе подставим (28) в (31) – (33):

$$\varphi_{j,K}^{n+1} = 0$$

$$T_{j,K}^{n+1} = \frac{1}{2A + 2B + 2\Delta z Nu B} \left( T_{j+1,K}^n A + T_{j-1,K}^{n+1} A + T_{j,K-1}^{n+1} 2B + 2\Delta z \frac{hT_0}{q_0} B \right) \quad (36)$$

– на левой границе подставим (29) в (31) – (33):

$$\varphi_{1,k}^{n+1} = 0$$

$$T_{1,k}^{n+1} = \frac{1}{\varphi_{2,k}^n + A + 2B} (T_{2,k}^n A + T_{1,k+1}^n (\varphi_{2,k}^n + B) + T_{1,k-1}^{n+1} B) \quad (37)$$

– на нижней границе подставим (30) в (31) – (33):

$$\varphi_{j,1}^{n+1} = 0$$

$$T_{j,1}^{n+1} = \frac{1}{-\varphi_{j,2}^n + 2A + 2B + 2\Delta z Nu B} \left( T_{j+1,1}^n (-\varphi_{j,2}^n + A) + T_{j-1,1}^{n+1} A + T_{j,2}^n 2B + \left( 2\Delta z \frac{hT_0}{q_0} + 2\Delta z q \right) B \right) \quad (38)$$

Граничные условия для завихренности получим с помощью разложения функции в ряд Тейлора в приграничных узлах, как показано в работах Тома. [8]

Тогда граничные условия для завихренности примут вид:

– на правой границе:

$$\omega_{J,k}^{n+1} = \frac{2}{(\Delta x)^2} \varphi_{J-1,k}^{n+1} \quad (39)$$

– на верхней границе:

$$\omega_{j,K}^{n+1} = 0 \quad (40)$$

– на левой границе:

$$\omega_{1,k}^{n+1} = 0 \quad (41)$$

– на нижней границе подставим (30) в (31) – (33):

$$\omega_{j,1}^{n+1} = \frac{2}{(\Delta z)^2} \varphi_{j,2}^n \quad (42)$$

Чтобы замкнуть численное описание системы, необходимо задать условия в углах, которые выводятся путем совмещения условий на границах.

Для верхнего левого угла получаем:

$$\varphi_{1,K}^{n+1} = 0$$

$$T_{1,K}^{n+1} = \frac{1}{A + 2B + 2\Delta z Nu B} \left( T_{2,K}^n A + T_{1,K-1}^{n+1} 2B + 2\Delta z \frac{hT_0}{q_0} B \right) \quad (43)$$

$$\omega_{1,K}^{n+1} = 0$$

Для правого верхнего угла:

$$\varphi_{J,K}^{n+1} = 0$$

$$T_{J,K}^{n+1} = \frac{1}{A + 2B + 2\Delta z Nu B} \left( T_{J-1,K}^{n+1} A + T_{J,K-1}^{n+1} 2B + 2\Delta z \frac{hT_0}{q_0} B \right) \quad (44)$$

$$\omega_{J,K}^{n+1} = 0$$

Для левого нижнего угла:

$$\varphi_{1,1}^{n+1} = 0$$

$$T_{1,1}^{n+1} = \frac{1}{A + 2B + 2\Delta z Nu B} \left( T_{2,1}^n A + T_{1,2}^n 2B + 2\Delta z \frac{hT_0}{q_0} B + 2\Delta z q B \right) \quad (45)$$

$$\omega_{1,1}^{n+1} = 0$$

Для правого нижнего угла:

$$\varphi_{J,1}^{n+1} = 0$$

$$T_{J,1}^{n+1} = \frac{1}{A + 2B + 2\Delta z Nu B} \left( T_{J-1,1}^{n+1} A + T_{J,2}^n 2B + 2\Delta z \frac{hT_0}{q_0} B + 2\Delta z q B \right) \quad (46)$$

$$\omega_{J,1}^{n+1} = 0$$

Таким образом, алгоритм решения этой системы заключается в следующем:

1. Задать все константы в уравнениях
2. Задать критерий сходимости и пространственные шаги
3. Установить начальное приближение  $\omega_{j,k}^0, \varphi_{j,k}^0, T_{j,k}^0$
4.  $\omega_{j,k}^n = \omega_{j,k}^0, \varphi_{j,k}^n = \varphi_{j,k}^0, T_{j,k}^n = T_{j,k}^0$
5. For n=1...N<sub>max</sub>
6. For j=1...J  
for k=1...K

- a) Если узел принадлежит границе, то расчет выполняется по граничному условию
- b) Если узел принадлежит угловому узлу, то расчет выполняется по условию для этого узла
- c) В противном случае вычисление новой итерации с использованием метода Гаусса-Зейделя  $\omega_{j,k}^{n+1}, \varphi_{j,k}^{n+1}, T_{j,k}^{n+1}$

#### 7. Проверка критериев сходимости

$$|\omega^{n+1} - \omega^n| \leq \varepsilon, \quad |\varphi^{n+1} - \varphi^n| \leq \varepsilon, \quad |T^{n+1} - T^n| \leq \varepsilon$$

- a) Если все условия выполнены, переход к шагу 8
- b) В противном случае  $\omega_{j,k}^n = \omega_{j,k}^{n+1}, \varphi_{j,k}^n = \varphi_{j,k}^{n+1}, T_{j,k}^n = T_{j,k}^{n+1}; \quad n = n + 1$  и переход к шагу 5

#### 8. Вывод данных, запись значений в файл

Этот алгоритм реализован в среде программирования Delphi 7 (см. Приложение

1). Все физические параметры были выбраны для воды.

Если нам нужно вычислить поле давления, мы можем использовать тот же итерационный алгоритм после вычисления трех основных переменных  $(\varphi, \omega, T)$ , что является преимуществом представления системы уравнений в данных переменных.

## АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

В результате численного решения задачи рассчитаны массивы величин вихря скорости, функции тока и температуры в узлах пространственной сетки. Эти массивы позволили построить распределение изолиний рассчитанных величин.

Сначала рассмотрим температурное поле. Максимум температуры наблюдается на нижней непроницаемой границе слева. Это вызвано тепловым потоком, создаваемым лазером, который аппроксимировался формулой (1) и для которого безразмерный тепловой поток на нижней границе в зависимости от координаты  $X$  имеет вид, показанный на Рисунке 5.

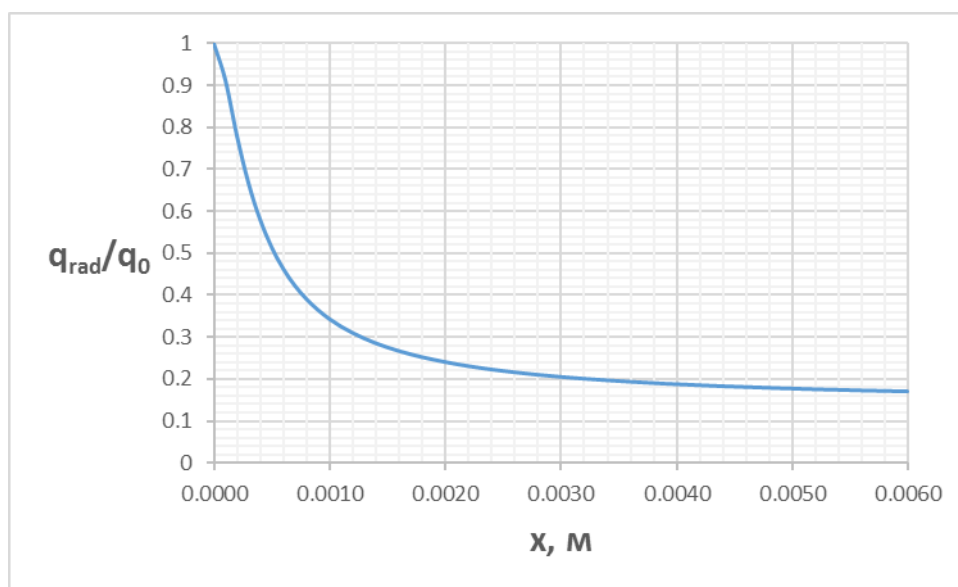


Рисунок 5. Безразмерный тепловой поток, создаваемый источником (лазером)

При рассмотрении изотерм, можно отметить более высокую их плотность вблизи левого нижнего угла рассматриваемой области. Таким образом, логично предположить, что наибольшие потоки в жидкости инициируются в этой области. Кроме того, изотермы изменяют свою кривизну и при продвижении к правой границе стремятся к повторению ее формы.



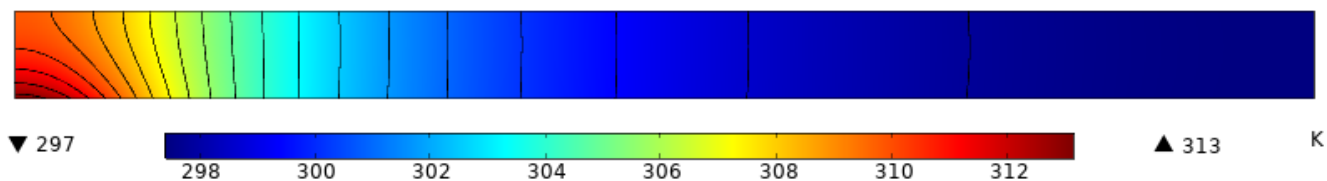


Рисунок 6. Температурное поле и изотермы



Рисунок 7. Изотермы

Перейдем к рассмотрению изолиний функции тока. Вектор скорости в каждой точке изолинии функции тока является касательным к ней, поскольку он перпендикулярен вектору градиента функции тока, являющемуся перпендикуляром к этой линии. Иными словами, изолинии функции тока описывают траектории частиц жидкости для данного поля скорости, т. е. являются линиями тока. Отсюда происходит название функции тока.



Рисунок 8. Линии тока

Визуализация линий тока позволяет заметить, что жидкость поднимается вверх около центра модели (левая граница), затем перемещается вправо вдоль поверхности и опускается вблизи правой границы, образуя, таким образом, циклическое движение. Можно выделить участки с наибольшей плотностью линий тока, а именно близи нижней и верхней границы со смещением влево, относительно центра рассматриваемой области, а также вблизи оси симметрии слева. Области с наибольшими плотностями линий тока соответствуют наибольшим градиентам функции тока, что в свою очередь характеризует наибольшие модули величины скорости. Таким образом, именно в этих областях наблюдаются максимальные конвективные потоки. Эти результаты следует отметить, так как локализация и интенсивность конвективных потоков напрямую влияют на диссипативные свойства системы. [11]

И, в заключение, рассмотрим изолинии вихря скорости. В рассматриваемой задаче на небольшом удалении от левой границы образуется устойчивая область с интенсивным движением жидкости.

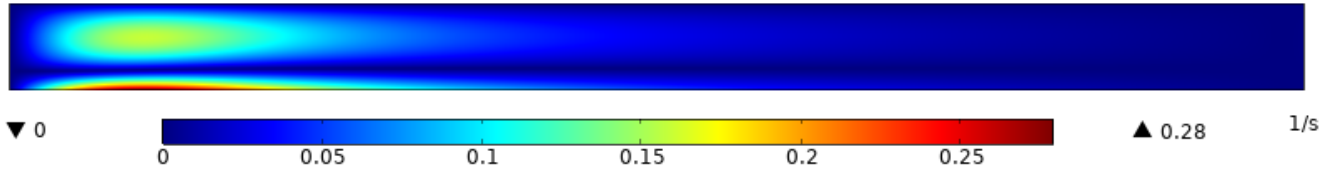


Рисунок 9. Поле распределения завихренности

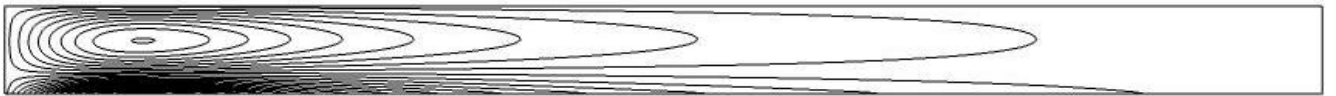


Рисунок 10. Изолинии завихренности

Полученные изолинии для вихря скорости указывают на образование сильного вихря вблизи левой границы, а также более сильного вихря на нижней границе рассматриваемого объема.

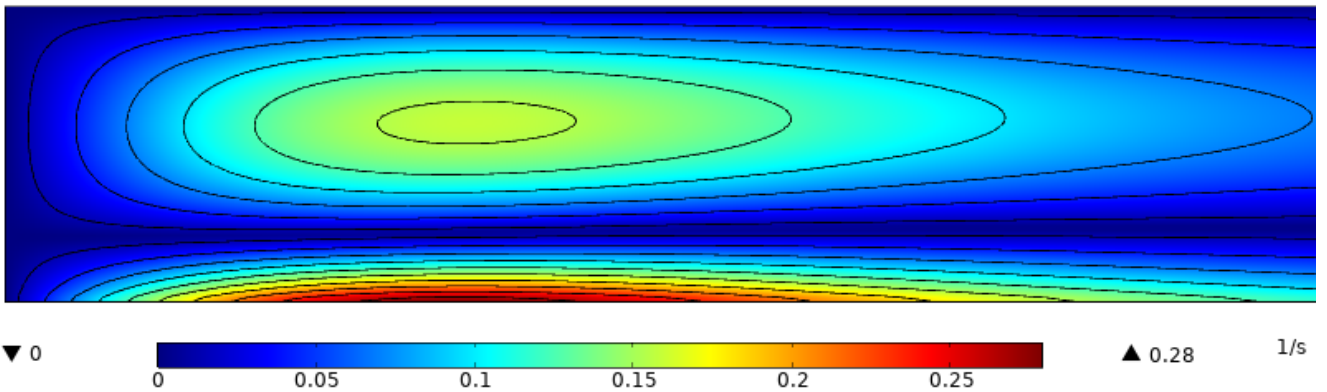


Рисунок 11. Поле распределения завихренности вблизи левой границы

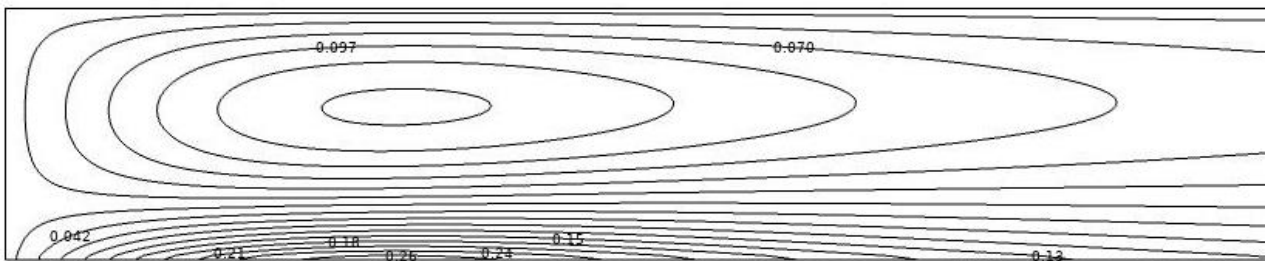


Рисунок 12. Изолинии завихренности вблизи левой границы

Для оценки адекватности полученной модели сравним полученное распределение температуры на свободной поверхности, которая в нашей постановке задачи соответствует верхней границе. В статье [20] приведены

типичные примеры измеренных профилей температуры на свободной поверхности воды для различных значений мощности лазера: 0.2; 0.3; 0.4 Вт.

Разработанная численная модель позволяет воспроизвести аналогичные условия. Сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными показано на Рисунке 13. Форма распределения носит одинаковый характер, что указывает на хорошую воспроизводимость реального эксперимента с помощью численной модели для температурных полей в жидкости. Однако, имеются определенные несоответствия, что вызвано исходными допущениями численной модели, а также используемой аппроксимацией для излучающего теплового потока лазера (Рисунок 14).

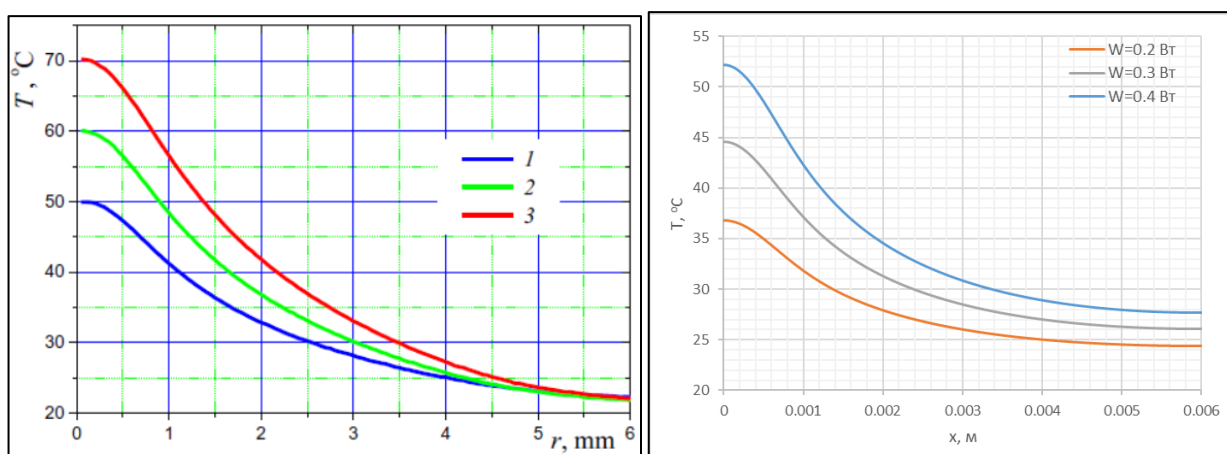


Рисунок 13. Сравнение экспериментального и рассчитанного профилей

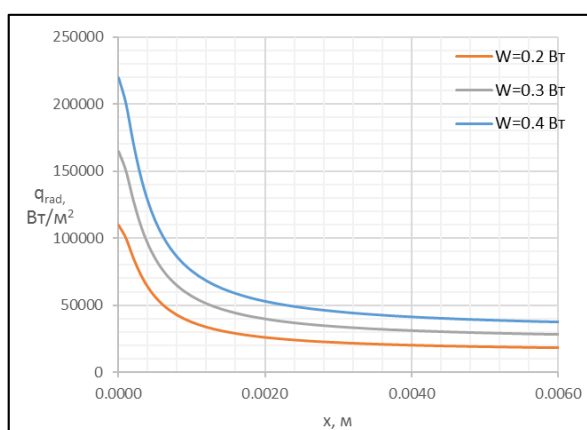


Рисунок 14. Распределение теплового потока лазера на нижней границе численной модели

Кроме того, рассматриваемая численная реализация позволяет выполнить анализ для различных геометрических размеров задачи. Исследуем также толщины

слоя воды 200 и 800 мкм. Изолинии температуры, завихренности и линии тока для них представлены на Рисунках 15-20.

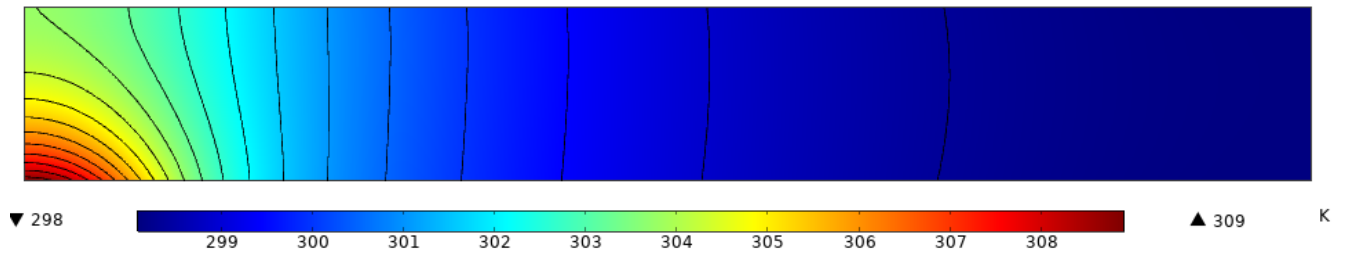


Рисунок 15. Температурное поле и изотермы для слоя 800 мкм

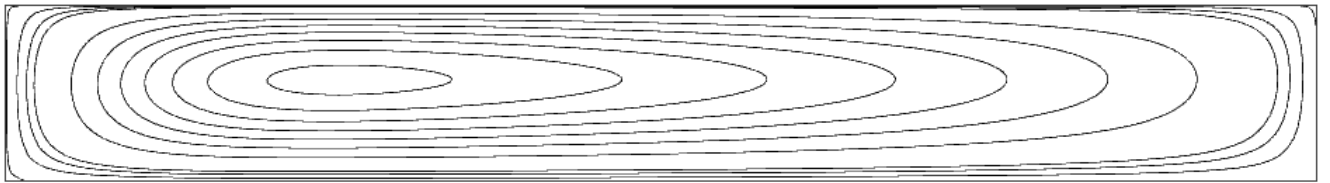


Рисунок 16. Линии тока для слоя 800 мкм

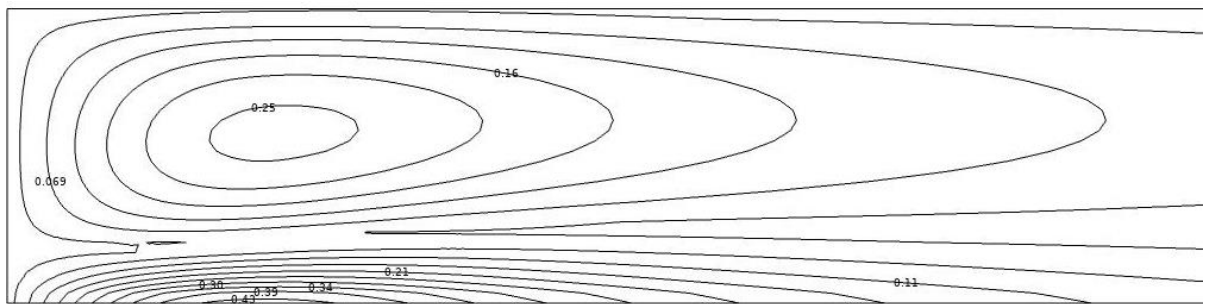


Рисунок 17. Изолинии завихренности вблизи левой границы для слоя 800 мкм

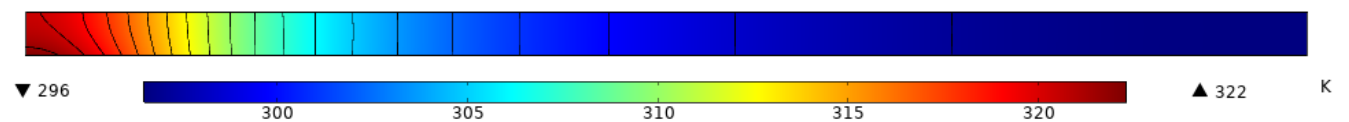


Рисунок 18. Температурное поле и изотермы для слоя 200 мкм

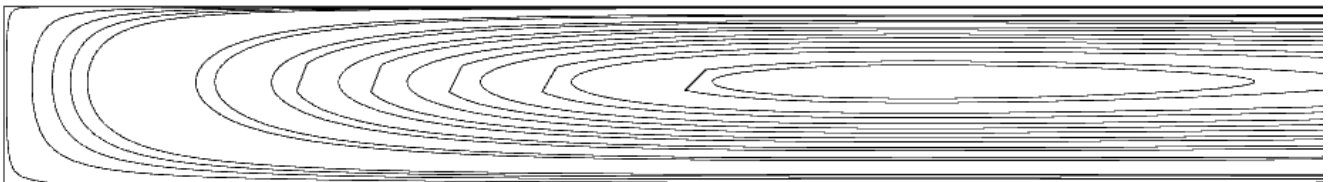


Рисунок 19. Линии тока вблизи левой границы для слоя 200 мкм

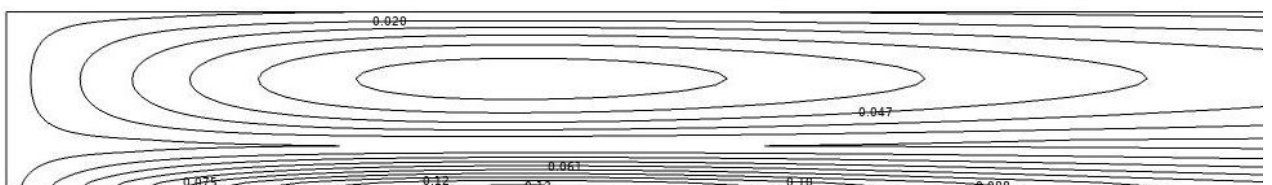


Рисунок 20. Изолинии завихренности вблизи левой границы для слоя 200 мкм

Сравнивая температурные поля, можно отметить, что при уменьшении слоя жидкости изменяется форма изолиний. Чем тоньше слой, тем быстрее форма изолиний начинает повторять форму правой границы при рассмотрении изолиний слева направо. Это может свидетельствовать о преобладании кондуктивных потоков в более тонких слоях жидкости.

Также заметно, что форма линий тока и завихренности не изменяется, то есть поток также носит циклический характер для любой толщины слоя. Однако, значения завихренности уменьшаются, что показывает уменьшение конвективной составляющей в потоке.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в результате проделанной работы была рассмотрена математическая модель конвективных течений в тонком слое воды с локальным источником нагрева, созданным лазером. Эта модель дискретизирована и получен численный алгоритм решения методом Гаусса-Зейделя. Разработанный алгоритм решения реализован в среде программирования Delphi 7. Полученный код можно использовать для целого класса задач конвекции в тонких слоях жидкости в приближении Буссинеска в переменных «функция потока, завихренность, температура».

В результате исследования, получены поля температуры, а также изолинии температуры, завихренности и линии тока. Сравнение полученных значений температуры на свободной поверхности с экспериментальными показало достоверность используемой численной модели.

Кроме того, показано влияние толщины слоя на линии тока, изолинии завихренности и изотермы. Отмечено, что при уменьшении толщины изотермы существенно изменяют свой вид, однако вид линий тока и изолиний завихренности остается прежним. Также изменяются значения завихренности, они становятся меньше при уменьшении слоя. Отсюда можно сделать вывод, что при уменьшении толщины слоя уменьшается конвективная составляющая потока в жидкости. При этом, исходя из формы изотерм, следует что увеличивается кондуктивная составляющая потока в жидкости.

В заключение стоит отметить, что также изучению на данной численной модели подлежит влияние мощности лазерного источника и его типа, поверхностно активных веществ и другие изменения в геометрии задачи, не показанные в данной работе на потоки в жидкости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воеводин А. Ф., Об устойчивости разностных граничных условий для функции вихря на твердой стенке // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1998 – том 38, номер 5 – с.855–859
2. Кунин С. Е., Вычислительная физика – Мир, М., 1992, 518 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теоретическая физика, v. VI, Гидродинамика – 5-е издание, стереотипное, Физматлит, М., 2015, 306-315 с.
4. Милн-Томсон Л. Теоретическая гидродинамика. Пер. с англ. под ред. Н. Н. Моисеева. – М.: Мир, 1964. – 660 с.
5. Нечаев В. В., Ковалевский И. Г., Тупицын А. А., Численное моделирование нестационарного течения и теплообмена при свободной конвекции в замкнутом объеме цилиндра // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование – 2014 – №2 (42)
6. Полежаев В. И., Грязнов В. Л., Метод расчета граничных условий для уравнений Навье–Стокса в переменных “вихрь, функция тока” // Докл. АН СССР – 1974 – том 219, номер 2 – с.301–304
7. Полежаев В. И., Бунэ А. В., Вerezуб Н. А. и др. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье–Стокса – Наука, М., 1987, 271 с.
8. Роуч П., Вычислительная гидродинамика. – Мир, М., 1980, 616 с.
9. Самарский А.А., Теория разностных схем. – М. : Наука, 1977
10. Том А., Эйплт К., Числовые расчеты полей в технике и физике – М., 1964
11. Федорец А.А., Домбровский Л.А., Медведев Д.Н. Влияние инфракрасного облучения на подавление конденсационного роста капель воды в левитирующем капельном кластере // Письма в ЖЭТФ – 2015 – Т. 102. № 7 – с. 507–510

12. Федорец А.А., Марчук И.В., Стрижак П.А., Кабов О.А. Капиллярные волны при коалесценции микрокапель со слоем жидкости // Теплофизика и аэромеханика – 2015 – Т. 22. № 4 – с. 535–538
13. Agresti J.J., Antipov E., Abate A.R., Ahn K., Rowat A.C., Baret J.-C., Marquez M., Ultrahigh-throughput screening in drop-based microfluidics for directed evolution // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America – 107 (9) – 2010 – pp. 4004-4009.
14. Aktaev N.E., Fedorets A.A., Bormashenko E., Nosonovsky M. Langevin Approach to Modeling of Small Levitating Ordered Droplet Clusters // Journal of Physical Chemistry Letters – 2018 – V. 9 – P. 3834–3838
15. Batchelor G. K., An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge Univ. Press – Cambridge, 2000, 470 p.
16. Bekezhanova V. B., Goncharov O. N., Analysis of the exact solution for the evaporative convection problem and properties of the characteristic perturbations // International Journal of Thermal Sciences – 2018
17. Dombrovsky L.A., Fedorets A.A., Medvedev D.N. The use of infrared irradiation to stabilize levitating clusters of water droplets // Infrared Physics and Technology – 2016 – Vol. 75 – P. 124–132
18. Fedorets A.A., Aktaev N.E., Dombrovsky L.A. Suppression of the condensational growth of droplets of a levitating cluster using the modulation of the laser heating power // International Journal of Heat and Mass Transfer — 2018 – V. 127 A – P. 660–664
19. Fedorets A.A., Bormashenko E., Dombrovsky L.A., Nosonovsky M. Droplet clusters: nature-inspired biological reactors and aerosols // Philosophical Transactions of the Royal Society A. – 2019 – V. 377 – article no. 20190121 – 13 pp
20. Fedorets A.A., Dombrovsky L.A. Generation of levitating droplet clusters above the locally heated water surface: A thermal analysis of modified



- installation // *International Journal of Heat and Mass Transfer* – 2017 – V. 104 – P. 1268–1274
21. Fedorets A.A., Dombrovsky L.A., Bormashenko E., Nosonovsky M. On relative contribution of electrostatic and aerodynamic effects to dynamics of a levitating droplet cluster // *International Journal of Heat and Mass Transfer* – 2019 – V. 133 – P. 712–717
22. Fedorets A.A., Dombrovsky L.A., Ryumin P.I. Expanding the temperature range for generation of droplet clusters over the locally heated water surface // *International Journal of Heat and Mass Transfer* – 2017 – V. 113 – P. 1054–1058
23. Fedorets A.A., Frenkel M., Shulzinger E., Dombrovsky L.A., Bormashenko E., Nosonovsky M. Self-assembled levitating clusters of water droplets: Pattern-formation and stability // *Scientific Reports* – 2017 – V. 7 – article no. 1888 – 6 pp
24. Gabyshev D.N., Fedorets A.A., Aktaev N.E., Klemm O., Andreev S.N. Acceleration of the condensational growth of water droplets in an external electric field // *Journal of Aerosol Science* – 2019 – V. 135 – P. 103–112
25. Lyuksyutov I. F., Naugle D. G., Rathnayaka K. D. D., On-chip manipulation of levitated femtodroplets // *Appl. Phys. Lett.* – V. 85 (1817) – 2004
26. Taniguchi T., Torii T., Chemical reactions in microdroplets by electrostatic manipulation of droplets in liquid media // *Lab on a Chip* – 2002 – V.1

## Приложение 1. Код программы

```

1. program Project1;
2.
3. {$APPTYPE CONSOLE}
4.
5. uses
6.   SysUtils, Math;
7.
8. type
9.   array1 = array of Real;
10.  array2 = array of array1;
11.  array3 = array of array2;
12. const
13.  E = 1E-4; //точность
14.  {Вводные данные}
15.  H = 4E-4; //высота
16.  L = 15*H; //длина
17.  nu = 1.006E-6; //кинематическая вязкость воды
18.  g = 9.8; //ускорение свободного падения
19.  Tокr = 293; //температура окр среды
20.  beta = 3.02E-4; //коэф объемного расширения воды
21.  ro = 1000; //плотность воды
22.  Rb = 0.395E-3; //радиус пучка
23.  hi = 0.143e-6; // температуропроводность воды
24.  lyambda1 = 0.6; //теплопроводность воды
25.  h1 = 40; //коэф теплообмена вода-воздух
26.  W = 0.2; //мощность лазера
27.  {/}
28.  {Кол-во точек сетки}
29.  X = 150; //Round(L/dx)+1;
30.  Y = 10; //Round(H/dy)+1;
31.  {/}
32.  {Шаг сетки}
33.  dy = H/(X-1);
34.  dx = L/(Y-1);
35.  {/}
36.  {Комплексы}
37.  //V = g*beta*T0*H*H/nu;
38.  Qo = W/(3.14*(Rb+3.66E-4)*(Rb+3.66E-4));
39.  T0 = Qo*H/lyambda1;
40.  Temp = T0;
41.  P = ro*g*beta*T0*H;
42.  Gr = g*beta*T0*H*H*H/(nu*nu);
43.  Pr = nu/hi;
44.  Nus = H*h1/lyambda1;
45.  {/}

```

```

46.  {Константы для формул}
47.  A = dy/(Pr*Gr*dx);
48.  B = dx/(Pr*Gr*dy);
49.  C = dy/(Gr*dx);
50.  D = dx/(Gr*dy);
51.  {}
52.
53.  function Qrad(x:Real):Real;
54.  begin
55.    Result:=Exp(-2*x*x/(Rb+3.66E-4)/(Rb+3.66E-4));
56.  end;
57.
58.  var
59.    Fi, Omega, T:array3; //массивы решений
60.    i, j:Integer;       //счетчики
61.    kolvo, k:LongInt;   //счетчики контроля сходимости
62.    f:TextFile;        //для записи в файл
63.  begin
64.    {Задаем размерности массивов}
65.    SetLength(Fi, X, Y, 2); // "0" - новые, "1" - старые расчетные данные
66.    SetLength(Omega, X, Y, 2);
67.    SetLength(T, X, Y, 2);
68.    {}
69.    {Задаем начальные значения во всей сетке в "новых"}
70.    for j:=0 to (Y-1) do
71.    begin
72.      for i:=0 to (X-1) do
73.      begin
74.        Fi[i, j, 0]:=0;
75.        Omega[i, j, 0]:=0;
76.        T[i, j, 0]:=Tokr/T0;
77.      end;
78.    end;
79.    {}
80.    {Граничные}
81.    {for i:=0+1 to (X-1)-1 do
82.    begin
83.      //Omega[i, 0, 0]:=0.5;
84.      T[i, 0, 0]:=1.05;
85.    end;
86.    {}
87.    k:=0;
88.    repeat
89.      kolvo:=0;
90.      {Перезаписываем в "старые" данные}
91.      for j:=0 to (Y-1) do
92.      begin
93.        for i:=0 to (X-1) do

```

```

94.     begin
95.         Fi[i,j,1]:=Fi[i,j,0];
96.         Omega[i,j,1]:=Omega[i,j,0];
97.         T[i,j,1]:=T[i,j,0];
98.     end;
99. end;
100.    {}
101.    {Рассчет новых}
102.    for j:=0 to (Y-1) do
103.        begin
104.            for i:=0 to (X-1) do
105.                begin
106.                    if (i>0) and (i<(X-1)) and (j>0) and (j<(Y-1)) then
//середина
107.                        begin
108.                            Fi[i,j,0]:= (1/(2*(dy*dy)+2*(dx*dx)))*(Fi[i+1,j,1]*(dy*dy)+
109.                                Fi[i-1,j,0]*(dy*dy)+Fi[i,j+1,1]*(dx*dx)+Fi[i,j-
110.                                    1,0]*(dx*dx)+Omega[i,j,1]*(dy*dy));
111.                            Omega[i,j,0]:= (1/(Fi[i+1,j,1]-
112.                                Fi[i,j+1,1]+2*C+2*D))*(Omega[i+1,j,1]*(Fi[i,j,1]-Fi[i,j+1,1]+C)+
113.                                Omega[i-1,j,0]*C+Omega[i,j,1]*(Fi[i+1,j,1]-
114.                                    Fi[i,j,1]+D)+Omega[i,j,0]*D+
115.                                    (T[i+1,j,1]-T[i,j,1])*dy/Gr);
116.                            T[i,j,0]:= (1/(Fi[i+1,j,1]-
117.                                Fi[i,j+1,1]+2*A+2*B))*(T[i,j,1]*(Fi[i,j,1]-Fi[i,j+1,1]+A)+
118.                                T[i-1,j,0]*A+T[i,j+1,1]*(Fi[i+1,j,1]-Fi[i,j,1]+B)+T[i,j-
119.                                    1,0]*B);
120.                        end;
121.                    if (i>0) and (i<(X-1)) and (j=0) then //низ
122.                        begin
123.                            Fi[i,j,0]:=0;
124.                            Omega[i,j,0]:=-2/sqr(dy)*Fi[i,j+1,1];
125.                            T[i,j,0]:= (1/(-Fi[i,j+1,1]+2*A+2*B+2*dy*Nus*B))*(T[i+1,j,1]*(-
126.                                Fi[i,j+1,1]+A)+
127.                                T[i-
128.                                    1,j,0]*A+T[i,j+1,1]*2*B+(2*dy*h1*Tokr/Qo+2*dy*Qrad(i*dx))*B);
129.                        end;
130.                    if (j>0) and (j<(Y-1)) and (i=0) then //лево
131.                        begin
132.                            Fi[i,j,0]:=0;
133.                            Omega[i,j,0]:=0;
134.                            T[i,j,0]:= (1/(Fi[i+1,j,1]+A+2*B))*(T[i+1,j,1]*A+T[i,j+1,1]*(Fi[i+1,j,1]+B)+T[i,j-
135.                                    1,0]*B);
136.                        end;
137.                    if (i>0) and (i<(X-1)) and (j=(Y-1)) then //верх
138.                        begin
139.                            Fi[i,j,0]:=0;

```

```

132.         Omega[i,j,0]:=0;
133.         T[i,j,0]:=(1/(2*A+2*B+2*dy*Nus*B))*(T[i+1,j,1]*A+T[i-
134.         1,j,0]*A+T[i,j-1,0]*2*B+2*dy*h1*Tokr/Qo*B);
135.         end;
136.         if (j>0) and (j<(Y-1)) and (i=(X-1)) then //право
137.         begin
138.         Fi[i,j,0]:=0;
139.         Omega[i,j,0]:=-2/sqr(dx)*Fi[i-1,j,0];
140.         T[i,j,0]:=(1/(A+2*B))*(T[i-1,j,0]*A+T[i,j+1,1]*B+T[i,j-
141.         1,0]*B);
142.         end;
143.         if (i=0) and (j=(Y-1)) then //верхний левый угол
144.         begin
145.         Fi[i,j,0]:=0;
146.         Omega[i,j,0]:=0;
147.         T[i,j,0]:=(1/(A+2*B+2*dy*Nus*B))*(T[i+1,j,1]*A+T[i,j-
148.         1,0]*2*B+2*dy*h1*Tokr/Qo*B);
149.         end;
150.         if (i=(X-1)) and (j=(Y-1)) then //верхний правый угол
151.         begin
152.         Fi[i,j,0]:=0;
153.         Omega[i,j,0]:=0;
154.         T[i,j,0]:=(1/(A+2*B+2*dy*Nus*B))*(T[i-1,j,0]*A+T[i,j-
155.         1,0]*2*B+2*dy*h1*Tokr/Qo*B);
156.         end;
157.         if (i=0) and (j=0) then //нижний левый угол
158.         begin
159.         Fi[i,j,0]:=0;
160.         Omega[i,j,0]:=0;
161.         T[i,j,0]:=(1/(A+2*B+2*dy*Nus*B))*(T[i+1,j,1]*A+T[i,j+1,1]*2*B+2*dy*h1*Tokr/Qo*B+2*d
162.         y*Qrad(i*dx)*B);
163.         end;
164.         if (i=(X-1)) and (j=0) then //нижний правый угол
165.         begin
166.         Fi[i,j,0]:=0;
167.         Omega[i,j,0]:=0;
168.         T[i,j,0]:=(1/(A+2*B+2*dy*Nus*B))*(T[i-
169.         1,j,0]*A+T[i,j+1,1]*2*B+2*dy*h1*Tokr/Qo*B+2*dy*Qrad(i*dx)*B);
170.         end;
171.         end;
172.         end;
173.         {/}
174.         {Проверяем на сходимост}
175.         for j:=0+1 to (Y-1)-1 do begin
176.         for i:=0+1 to (X-1)-1 do begin
177.         if (Abs(Fi[i,j,0]-Fi[i,j,1])<=E) then Inc(kolvo);
178.         if (Abs(Omega[i,j,0]-Omega[i,j,1])<=E) then Inc(kolvo);

```

```

173.         if (Abs(T[i,j,0]-T[i,j,1])<=E) then Inc(kolvo);
174.         end;
175.         end;
176.         {}
177.         Inc(k);
178.     until (k>1E2) or (kolvo>(3*X*Y));
179.     {}
180.     {Вывод контроля сходимости}
181.     Writeln('e = ',e:2:4);
182.     Writeln('k = ',k, ' > ',1E2:2:0);
183.     Writeln('kolvo = ',kolvo, ' > ',3*X*Y);
184.     {}
185.     {Запись данных в блокноты}
186.     AssignFile(f,'Fi.txt');
187.     Rewrite(f);
188.     for j:=(Y-1) downto 0 do begin
189.         for i:=0 to (X-1) do begin
190.             write(f,Fi[i,j,0],';');
191.         end;
192.         writeln(f,' ');
193.     end;
194.     CloseFile(f);
195.     AssignFile(f,'Omega.txt');
196.     Rewrite(f);
197.     for j:=(Y-1) downto 0 do begin
198.         for i:=0 to (X-1) do begin
199.             write(f,Omega[i,j,0],';');
200.         end;
201.         writeln(f,' ');
202.     end;
203.     CloseFile(f);
204.     AssignFile(f,'T.txt');
205.     Rewrite(f);
206.     for j:=(Y-1) downto 0 do begin
207.         for i:=0 to (X-1) do begin
208.             write(f,T[i,j,0],';');
209.         end;
210.         writeln(f,' ');
211.     end;
212.     CloseFile(f);
213.     {}
214.     Readln;
215. end.

```